General Relativity and Cosmology

General Relativity and Cosmology

Wang Yongjiu



广义相对论和宇宙学

GENERAL RELATIVITY AND COSMOLOGY

GENERAL RELATIVITY AND COSMOLOGY

Wang Yongjiu

王永久 / 著



湖南科学技术出版社

General Relativity and Cosmology

General Relativity and Cosmology

Wang Yongjiu



广义相对论和宇宙学

GENERAL RELATIVITY AND COSMOLOGY

GENERAL RELATIVITY AND COSMOLOGY

Wang Yongjiu

王永久 / 著



湖南科学技术出版社

广义相对论和宇宙学

著　　者：王永久
责任编辑：胡海清
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路66号
　　　　　http：//www.hnstp.com
邮购联系：本社直销科　0731－4441720
印　　刷：湖南省新华印刷二厂
　　　　　（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　编：422001
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：2000年12月第1版第1次
开　　本：850mm×1168mm　1/32
印　　张：27
插　　页：8
字　　数：711000
书　　号：ISBN 7-5357-2980-0/O·183
定　　价：90.00元
（版权所有·翻印必究）

以致廣大
以盡精微

王永久著《广义相对论和宇宙学》

王綬琯題

中国科学院院士、数学物理学部副主任王绶琯的题词：

以致广大、以尽精微。



作者于1991年在日本京都和当代卓越的物理学家、英国剑桥大学教授霍金的合影

王永久,我国引力与相对论天体物理学家,湖南师范大学教授,1939年生于吉林省梅河口市,1964年毕生于北京师范大学。他与合作者在国内外重要杂志上发表论文一百余篇,在国内外出版专著9部,曾获"国际引力研究荣誉奖"(美国)、国家教委科技进步奖等多项奖励。1986年被评为《国家级有突出贡献的科技专家》。他严格地解决了时钟佯谬问题,提



GRAVITY RESEARCH FOUNDATION
PO BOX 81389
WELLESLEY HILLS MA 02181-0004
USA

May 2, 1995

Dear Dr. YongJiu Wang,

The Trustees have asked me to let you know that the judges selected your essay to receive honorable mention this year. Congratulations on your good work.

We trust your interest will continue and you may decide to enter the competition again in the future.

Sincerely,

George M. Rideout, Jr.
President

获奖通知译文

国际引力研究基金会

基金创立者 W.Babson

基金会主席 M.Rideout,Jr. 1995.5.2

亲爱的王博士：

基金会的董事们让我通知您，评委们一致推选您的论文获1995年度荣誉奖，祝贺您的出色的工作。

我们相信您将继续保持兴趣并继续参加今后的竞争。

您的忠诚的

George M.Rideout, Jr.

（签字）

主席

（本书作者两次荣获国际引力研究荣誉奖，此为1995年获奖的中英文通知）

前言

PREFACE

近年来，许多作者对于高维复合场理论感兴趣，是因为人们已经沿着统一场论的方向做了许多研究工作．人们采用了规范场的思想，分解空间几何的思想，超对称的思想，等等．按照这些思想，人们提出了诸多复合场理论方案．本书重点介绍了几种有代表性的方案．

按照著名的黑洞无毛定理，所有稳态黑洞都只由三个参量唯一确定，这三个参量就是黑洞的质量、角动量和电（磁）荷．原来的物质分布、电磁场分布和诸多信息均在形成黑洞时消失了．美国物理学家Bowick[97]指出，将阿贝尔规范理论推广到非阿贝尔情况时，黑洞除了具有上述三个参量以外，“是否还可以携带非阿贝尔荷，例如QCD色荷，目前尚不清楚”．书中给出了关于黑洞第四参量存在性的论证．

在经典黑洞热力学中，黑洞的熵与普通热力学中的熵相同．在量子理论中，黑洞的熵除了含经典（主级）部分以外，还含有量子修正部分．书中讨论了计算黑洞量子熵的两类方法——即壳(on shell）和离壳（off shell）方法，并比较了各种离壳方法（砖墙法，顶角奇异性法，钝锥法和体积截断法），阐明了它们与即壳方法之间的联系．

大爆炸宇宙模型成功地解释了自$t=10^{-2}$秒（轻核形成）至$t=10^{10}$年（现在）宇宙演化阶段的观测事实．其中包括元素的起源

(氦丰度测量)，星系光谱的宇宙学红移，3K 微波背景辐射，星系计数，宇宙大尺度的均匀各向同性等．因此，大爆炸宇宙模型是普遍被人们所接受的，故称之为标准宇宙模型．然而，标准宇宙模型也有它的困难，就是在 $t=0$（大爆炸奇点）到 $t=10^{-10}$秒这一极早期演化阶段中的四个问题：奇点问题，视界问题，平直性问题和磁单极问题．本书中的“暴胀宇宙学”一章比较详细地阐述了 20 世纪 80 年代诞生的暴胀宇宙学理论．这一理论解决了上述四个问题中的后三个．它已经把我们带到了 $t=10^{-35}$秒的宇宙极早期，已接近于宇宙的开端．至于第一个问题，即宇宙的初始奇点（宇宙的创生）问题，是量子宇宙学要回答的问题．

广义相对论宇宙学（标准宇宙学）是建立在爱因斯坦引力理论基础上的．严格地说，量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上．然而，至今尚未建立一个令人满意的量子引力理论．尽管如此，人们仍然可以根据已经了解的量子引力的某些特征，去寻找各种途径，尝试解决量子宇宙学的主要问题——宇宙的创生问题．80 年代初，哈特 (Hartle)、霍金 (Hawking)、维林金 (Vilenkin) 等人提出，用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态，宇宙动力学方程即惠勒-德维特方程．这样，只要确定宇宙的边界条件，便可定量地研究宇宙的创生问题了．

对于宇宙波函数的选择和宇宙边界条件的确定，哈特-霍金和维林金分别提出了不同的方案，这两个方案构成了目前量子宇宙学的两个学派．本书比较详细地阐述了哈特-霍金的量子宇宙学理论和维林金的量子宇宙学理论，并对这两个理论做了比较．

由于复合场理论、量子黑洞和量子宇宙学理论要求读者具有广义相对论、量子场论和微分几何的知识，为了让读者能够独立使用本书，书中安排了广义相对论和微分几何等基础内容，放在前两篇和其他各篇的开头讲述．

全书包括广义相对论的数学基础、广义相对论的物理基础、引力场和复合场方程的解、黑洞物理、广义相对论宇宙学和量子宇宙学六篇．书中包括作者和国内外同行学者们近年来的研究成果．为

了便于阅读，选入了作者近年来为研究生讲课的讲义中的若干内容和一些著作中的部分内容，后者主要取自刘辽(1987 年，1999 年)、S. Weinberg(1972 年)、M. Carmeli(1982 年)、Q. Ivanitzkaya(1979 年)、D. Kramer(1980 年)、赵峥(1999 年)等人的著作.

为了便于读者阅读和选题，书中对于具有普遍意义的章节，均给出了详细的推导过程；对于一些启发性的内容，则只给出物理思想和数学技巧方面的要点.

作者深深感谢刘辽教授、D. Kramer 教授和 C. Will 教授，他们曾对作者部分论文的初稿提出过有益的意见.

作者与合作者荆继良教授，余洪伟教授和唐智明教授获得了两届“国际引力研究荣誉奖”和一届国家教委科技进步奖，获奖论文的内容已写入书中. 还有骆宏悌、郭鸿钧、樊军、吕君丽、周三庆、罗新炼、黄亦斌、符立亚、张靖仪、吴胜香、申立、苏成悦、程立伟、王世良、陈菊华等诸同事，对书稿的整理付出了辛勤的劳动，作者一并表示衷心的感谢!

王永久

1999 年 5 月 10 日

于中国科学院物理所专家招待所

目录
CONTENTS

第 1 篇　广义相对论的数学基础

1　微分几何

§1.1　拓扑学基础

1. 拓扑空间

定义　设 X 是一个集合，τ 是 X 的一子集簇，且满足

(1) τ 中成员的任意并仍属于 τ，即：若 $G_\alpha \in \tau$，则 $\bigcup_\alpha G_\alpha \in \tau$；

(2) τ 中成员的有限交仍属于 τ，即：若 G_1，$G_2 \in \tau$，则 $G_1 \cap G_2 \in \tau$；

(3) $\varnothing$，X 属于 τ.

则称 (X, τ) 为一个拓扑空间，τ 称为 X 上的一个拓扑(或一个拓扑结构)，τ 中的元素 G 称为 (X, τ) 或 X 的开集.

拓扑空间 (X, τ) 也可简称为"X 是一个空间"，X 中的元素叫空间中的一个点.

例如，设 X 是一个集，则 $\tau = \{\varnothing, X\}$ 是 X 的一个拓扑，称

为平凡拓扑；而 $\tau=\{G|任何 G\subset X\}$ 也是 X 的一个拓扑，称为离散拓扑. 可见，同一集合可有不止一个拓扑.

设 (X, τ) 是一个拓扑空间，$\forall x\in X$，包含 x 的一个开集称为 x 的一个邻域.

定义 设 X 是一个集合，若映射 $\rho: X\times X\to R$ 满足

(1) $\rho(x, y)\geqslant 0$, $\rho(x, y)=0\Leftrightarrow x=y$;

(2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;

(3) $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$.

则称 (X, ρ) 为度量(或距离)空间，ρ 称为 X 上的度量(或距离)函数，$\rho(x,y)$ 称为点 x 和 y 之间的距离，X 称为基础集合.

欧氏空间是熟知的度量空间.

设 $a\in X$, $\delta>0$, 则以 a 为中心、以 δ 为半径的开球表为 $S(a;\delta)=\{x|x\in X, \rho(x,a)<\delta\}$.

设 (X, ρ) 为度量空间，$S(a, \delta)$ 为以 a 为中心、δ 为半径的开球，令

$\tau=\{G|G\subset X$, 且 $\forall a\in G$, $\exists S(a, \delta)\subset G\}$，则易验证 τ 是 X 上的一个拓扑：

(1) 若 $a\in\bigcup_{\alpha} G_\alpha$, $G_\alpha\in\tau$, 则 $\exists\ \delta>0$, 使 $S(a, \delta)\subset G_{\alpha_i}\subset\bigcup_{\alpha} G_\alpha$;

(2) 若 $a\in G_1\cap G_2$, G_1、$G_2\in\tau$, 则 $\exists\ \delta_1, \delta_2>0$, 使 $S(a, \delta_1)\subset G_1$, $S(a, \delta_2)\subset G_2$, 令 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $S(a, \delta)\subset S(a, \delta_1)\cap S(a, \delta_2)\subset G_1\cap G_2$;

(3) 显然 $\varnothing$ 和 X 属于 τ.

故 (X, τ) 是一个拓扑空间，叫做由 (X, ρ) 诱导的拓扑空间.

对于一个给定的拓扑，可从中选出足够多的开集，使该拓扑中的每个开集都是由这些选出的开集"生成"的，这就是拓扑基.

定义 令 (X, τ) 是一个拓扑空间. 开集簇 $\tau_*=\{B_\alpha\}$ 是 τ 的一个基(或空间 X 的基)，如果每个开集都能表为 τ_* 中某些元素的并，称 τ_* 中成员为"基开集".

定理 设 $\tau_*\subset\tau$ 是一个基，则 $G\subset X$ 是开集 $\Leftrightarrow\forall\ x\in G$，$\exists\ B\in\tau_*$，使得 $x\in B\subset G$.

证明 $\Rightarrow$据定义，开集 $G=\bigcup\limits_{\alpha}B_\alpha$，其中 $B_\alpha\in\tau_*$. 故 $\forall\ x\in G=\bigcup\limits_{\alpha}B_\alpha$，$\exists\ \alpha$ 使得 $x\in B_\alpha\subset G$；

$\Leftarrow$若 $\forall\ x\in G$，$\exists\ B_x\in\tau_*$，使 $x\in B_x\subset G$，则 $G=\bigcup\{B_x\mid x\in G\}$，即 G 为开集.

因 τ 本身就是一个基，故由定理给出一个有用的判断开集的方法：

$A\subset X$ 是开集 $\Leftrightarrow\forall\ x\in A$，$\exists\ x$ 的一个邻域 G(即 τ 的成员)，使 $x\in G\subset A$.

设 (X,τ) 是拓扑空间，$Y\subset X$. 令 $\tau_y=\{H\mid H=G\cap Y,\ G\in\tau\}$，则可验证 (Y,τ_y) 是拓扑空间：

(1) $\bigcup\limits_{\alpha}H_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha}(G_\alpha\cap Y)=(\bigcup\limits_{\alpha}G_\alpha)\cap Y$；

(2) $H_1\cap H_2=(G_1\cap Y)\cap(G_2\cap Y)=(G_1\cap G_2)\cap Y$；

(3) $\varnothing=\varnothing\cap Y$，$Y=X\cap Y$.

故 (Y,τ_y) 也是拓扑空间，称为由 (X,τ) 诱导的子拓扑空间或相对拓扑空间，τ_y 称为导出拓扑.

显然，若 $\{B_\alpha\mid\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是 τ 的一个基，则 $\{Y\cap B_\alpha\}$ 就是 τ_y 的一个基. 导出拓扑的优点是：子空间 (Y,τ_y) 中的拓扑概念几乎全部可以看做原空间中的拓扑概念限制在 Y 上来考虑.

设 $\alpha=1,2,\cdots,n$，(X_α,τ_α) 是拓扑空间，$G_\alpha\in\tau_\alpha$ 是 X_α 上的开集. 令 $X=\prod\limits_{\alpha=1}^{n}X_\alpha$，且 $G_\alpha\in\tau$ 为 X 的、形如 $G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$ 的子集的并集，那么 τ 是 X 上的一个拓扑，拓扑空间 (X,τ) 称为拓扑空间 $(X_\alpha,\tau_\alpha)(\alpha=1,\cdots,n)$ 的拓扑积，或积空间.

可以证明，此处构造的 τ 确是 X 中的一个拓扑：

(1)，(3)显然满足；

(2) 设 $G,G'\in\tau$，则 $G=\bigcup\limits_{i\in I}G_{1i}\times G_{2i}\times\cdots\times G_{ni}$，$G'=\bigcup\limits_{j\in I}G'_{1j}$

$\times G'_{2j} \times \cdots \times G'_{nj}$. 令 $G_{\alpha(i,j)} = G_{\alpha i} \cap G'_{\alpha j}$，可知 $G_{\alpha(i,j)}$ 是 X_α 的开集. 故 $G \cap G' = \bigcup_{i,j \in I} G_{1(i,j)} \times G_{2(i,j)} \times \cdots \times G_{n(i,j)} \in \tau$.

设 X 是一个空间，Y 是一个集合. $p: X \to Y$ 是一个满射. 称 $\tau_p = \{G \subset Y \mid p^{-1}(G) \subset X$ 是开集$\}$是由 p 决定的 Y 中的粘合拓扑.

不难验证，τ_p 是 Y 中的一个拓扑.

设 X 是一个空间，R 是 X 中一个等价关系，X/R 是商集，$P: X \to X/R$ 为 $x \to [x]$ 是自然投影. 在商集 X/R 中，由投影 p: $X \to X/R$决定的 X/R 中的粘合拓扑称为商拓扑. $(X/R, \tau_p)$称为商空间.

定义 $A \subset X$ 是拓扑空间的闭集，如果 $A^c = X - A$ 是开集.

例如，拓扑空间(X, τ)中，$\varnothing$和 X 既是开集又是闭集.

容易证明：闭集的任意交是闭集；闭集的有限并是闭集.

定义 设(X, τ)是拓扑空间，$A \subset X$，且 $x \in X$. 若 x 的在 X 中的任一邻域 G 都包含 $A - \{x\}$的一个点，即 $G \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing$ (x 本身可属于 A，也可不属于 A)，则称 x 为 A 的在 X 中的一个聚点. 称 A 的聚点的全体为 A 的导集，记为 A'. 而 $\overline{A} = A \cup A'$称为 A 的在 X 中的闭包.

由此，$x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall\, G(x)$，$G(x) \cap A \neq \varnothing$，

$x \overline{\in} \overline{A} \Leftrightarrow \exists\, G(x)$，$G(x) \cap A = \varnothing$.

关于闭包，有以下三个定理成立. 在此我们只对其中一个定理进行证明，其余省略.

定理 设(X, τ)为拓扑空间，则

(1) $\forall\, A \subset X$，$A \subset \overline{A}$；

(2) $A \subset X$ 是闭集$\Leftrightarrow \overline{A} = A$.

证明 (1) 的成立很明显.

(2) $\Rightarrow$由(1)$A \subset \overline{A}$，还需证 $\overline{A} \subset A$. 设 $x \in \overline{A}$，但 $x \overline{\in} A$，即 $x \in A^c$. 而 A^c 是开集，故$\exists\, G(x) \subset A^c$，即$\exists\, G(x)$使 $G(x) \cap A = \varnothing$，这表明 $x \overline{\in} \overline{A}$，与假设矛盾. 所以，$x \in A$，即 $\overline{A} \subset A$.

$\Leftarrow$证明 A^c 是开集. 设 $x \in A^c$，则 $x \overline{\in} A = \overline{A}$. 故$\exists\, G(x)$使 G

$(x)\cap A=\varnothing$，即 $G(x)\subset A^c$. 故 A^c 是开集.

定理 $\overline{A}$ 是包含 A 的最小闭集，即

$$\overline{A}=\bigcap\{F\mid F\text{ 是闭集且 }F\supset A\}.$$

定理 设(X,τ)为拓扑空间，则闭包具有如下性质：

(1) $A\subset B\Rightarrow\overline{A}\subset\overline{B}$；　　(2) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$；　　(4) $\overline{\varnothing}=\varnothing$.

定义 设(X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$. A 的内部是被包含在 A 中的最大开集，记作 $\mathrm{Int}(A)$，即

$$\mathrm{Int}A=\bigcup\{G\mid G\text{ 是开集且 }G\subset A\}.$$

由此定义，可推证出

定理 设(X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$，则有 $\mathrm{Int}A=(\overline{A^c})^c$. 特别地，$A$ 是开集$\Leftrightarrow A=\mathrm{Int}A$.

定义 设(X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$. A 的边界定义为 $\partial A=\overline{A}\cap\overline{A^c}$，即 A 的边界中的点既在 A 的闭包中，又在 A 的余集的闭包中.

由定义可知，边界 ∂A 是闭集，且 ∂A 与 ∂A^c 是同一边界($\partial A=\partial A^c$). 若 $x\in\partial A$，则 x 的任一邻域必同时包含 A 和 A^c 中的点.

通过简单的证明，可得如下定理.

定理 设(X,τ)为拓扑空间，$A\subset X$. 则

(1) $\overline{A}=A\cup\partial A$；

(2) A 为闭集，当且仅当 $\partial A\subset A$；A 为开集，当且仅当 $\partial A\subset A^c$.

2. 连续映射和同胚映射

把数学分析中函数连续性定义推广到一般度量空间，并用邻域的概念来叙述，推广到拓扑空间，有如下定义.

定义 设(X,τ_1)和(Y,τ_2)为拓扑空间，$f: X\to Y$ 是一个映射，$a\in X$. 若对 $f(a)$的任何邻域 $V(f(a))\subset Y$，必存在 a 的邻域 $U(a)\subset X$，使得 $f(U(a))\subset V(f(a))$，则称 f 在 a 处连续. 如果 f 在 X 的每点都连续，则称 f 为连续映射.

当 $Y=R$ 时，f 就是通常的连续函数.

定理 设(X, τ_1)和(Y, τ_2)是拓扑空间，$f: X \to Y$ 是映射，则下面四个条件彼此等价

(1) f 是连续映射；

(2) Y 中每个开集在 f 下的逆像是 X 中的开集(反射开集)；

(3) Y 中每个闭集在 f 下的逆像是 X 的闭集(反射闭集)；

(4) 对任何 $A \subset X$，$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

证明 先证(1)⇒(2). 设 V 是 Y 中任一开集，若 $f^{-1}(V) \neq \varnothing$，则 $\forall\, a \in f^{-1}(V)$，有 $f(a) \in V$(开集). 因 f 连续，于是 $\exists\, U(a)$，使得 $f(U(a)) \subset V$，即 $U(a) \subset f^{-1}(V)$，故 $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{a \in f^{-1}(V)} U(a)$ 是 X 中的开集.

再证(2)⇒(3). 由 $f^{-1}(Y-B) = X - f^{-1}(B)$推出.

再证(3)⇒(4). 用反证法. 若(4)不成立，则存在一个 $A \subset X$ 和一点 $a \in \overline{A}$，使得 $f(a) \overline{\in} \overline{f(A)}$. 令 $B = \overline{f(A)}$(它是 Y 的闭集)，上式写为 $f(a) \overline{\in} B$，即 $a \overline{\in} f^{-1}(B)$；又因 $f(A) \subset \overline{f(A)} = B$，故 $A \subset f^{-1}(B)$，于是 $a \in \overline{A} \subset \overline{f^{-1}(B)}$. 由此可见，$a \in \overline{f^{-1}(B)}$，但又 $a \overline{\in} f^{-1}(B)$，故 $f^{-1}(B)$不是 X 的闭集，而 B 是闭集，这与(3)矛盾，因此(4)成立.

最后证(4)⇒(1). 如果(1)不成立，则存在 $a \in X$，与 Y 中含 $f(a)$的某个开集 V，使得 a 的每个邻域都有一点 $x \neq a$，其像 $f(x) \overline{\in} V$，即 $f(x) \in Y-V$，$x \in f^{-1}(Y-V) = A$. 于是 a 是 A 的聚点，因而 $a \in \overline{A}$. 此外，显然 $f(a) \overline{\in} Y-V = \overline{(Y-V)}$(闭集)，又因 $f(A) = ff^{-1}(Y-V) \subset Y-V$ 导致 $\overline{f(A)} \subset \overline{Y-V}$，所以 $f(a) \overline{\in} \overline{f(A)}$. 综上，$a \in \overline{A}$，但 $f(a) \overline{\in} \overline{f(A)}$，这与(4)矛盾. 故(1)成立.

推论 设(X, τ_1)，(Y, τ_2)和(Z, τ_3)都是拓扑空间，并设 $f: X \to Y$，$g: Y \to Z$ 都是连续映射，则 $g \circ f: X \to Z$ 也是连续映射.

定义 设(X, τ_1)和(Y, τ_2)为拓扑空间. 若映射 $f: X \to Y$ 是满单射(一对一，到上)，且 f 及其逆映射 $f^{-1}: Y \to X$ 都是连续的，则称 f 为同胚映射或拓扑映射.

若存在一个同胚映射 $f: X \to Y$，则称拓扑空间 X 和 Y 是同胚的，记作 $X \cong Y$.

关于同胚映射，易证下述定理成立.

定理 设(X, τ_1)和(Y, τ_2)为拓扑空间，若 $f: X \to Y$ 是连续的满单射，则下面的任一条件都能推出 f 是拓扑映射.

(1) 如果 A 是 X 的任一开集，则 $f(A)$是 Y 的开集；

(2) 如果 A 是 X 的任一闭集，则 $f(A)$是 Y 的闭集；

(3) 对任意 $A \subset X$，则 $f(\overline{A}) \supset \overline{f(A)}$(因而 $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$).

拓扑空间之间的同胚关系，实际上是一种等价关系. 属于同一等价类的空间，从拓扑学的角度来看，它们是相同的，具有同样的拓扑性质. 在同胚映射下保持不变的性质，称为拓扑性质或拓扑不变量，如连通性、紧致性等.

3. 可数性和分离性

定义 如果拓扑空间(X, τ)存在一个可数拓扑基，则称(X, τ)为第二可数空间，或说空间 X 是第二可数的.

R^n 空间是第二可数的(中心在有理点、具有有理半径的开球构成可数拓扑基).

定义 设(X, τ)为拓扑空间，$M \subset X$，如果 $\eta = \{G_\alpha\}$是 X 的一簇子集，使得

$$M \subset \bigcup_\alpha G_\alpha,$$

则称 η 为 M 的在 X 中的一个覆盖，如果 η 中的元素的个数是有限的或可数的，则 η 分别称为有限覆盖或可数覆盖；如果 $M = X$，我们简称 η 为 X 的覆盖；特别当所有的 G_α 为开(闭)集时，称 η 为 M 的在 X 中的开(闭)覆盖；如果 $\eta' \subset \eta$ 也是 M 的在 X 中的一个覆盖，则称 η'为 η 的子覆盖.

定理 设(X, τ)为第二可数空间，则它的任一开覆盖 η 有一个可数的子覆盖.

证明 设 τ_* 为可数拓扑基，又 $\tau'_* = \{B \mid B \in \tau_*, B \subset G, G \in \eta\} \subset \tau_*$. 对于每个 $B' \in \tau'_*$，取定一个 $G(B') \in \eta$，使得 $B' \subset$

$G(B')$. 令 $\eta'=\{G(B')\mid B'\in\tau'_*\}$，由于 τ'_* 可数，η' 是 η 的可数子集簇. 余下只须证明 η' 是 η 的子覆盖. 事实上，对任何 $x\in X$ 必有 $G\in\eta$，$x\in G$，于是存在 $B\in\tau_*$，使 $x\in B\subset G$. 从 τ^* 的定义可知 $B\in\tau'_*$，故 $x\in G(B)\in\eta'$.

定义 如果拓扑空间 (X,τ) 的任意两个不同的点有不相交的邻域(即：若 $a\neq b$，则 $\exists\ U(a)\in\tau$，$V(b)\in\tau$，使 $U(a)\cap V(b)=\varnothing$)，则称 (X,τ) 为 Hausdorff 空间.

任意度量空间都是 Hausdorff 空间. 关于 Hausdorff 空间，有如下定理成立.

定理 (1) Hausdorff 拓扑在同胚映射下保持不变；

(2) 设 (X,τ) 为 Hausdorff 空间，则它的子拓扑空间也是 Hausdorff 的；

(3) 设 (X_1,τ_1) 和 (X_2,τ_2) 为 Hausdorff 空间，则它们的积空间也是 Hausdorff 空间.

4. 紧致性和连通性

定义 拓扑空间 (X,τ) 称为紧致的，如果它的每一个开覆盖 η 都有有限的子覆盖 η'.

拓扑空间 (X,τ) 的子集 M 是紧致的，如果作为子拓扑空间 (M,τ_M) 是紧致的.

例如，R 中的开区间不紧致 $\left(\text{如}(0,1)，\text{设}\ \eta=\left\{\left(\frac{1}{n},1\right)\middle|\,n=2,\cdots\right\}\right)$；但实数闭区间 $[a,b]$ 是紧致的(Heine-Borel 定理).

紧致子集和闭集的一般关系如下面两条定理所述.

定理 紧致拓扑空间 (X,τ) 的任一闭子集 Y 是紧致的.

证明 设 $\eta_y=\{G_\alpha\cap Y\in\tau_y\mid G_\alpha\in\tau\}$ 是 Y 的任一覆盖. 因 Y 是 X 的闭集，$X-Y$ 是开集，故 $\eta=\{G_\alpha,X-Y\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由于 X 紧致，必有一个有限的子覆盖 $\eta'=\{G_1,\cdots,G_k\}$. 于是 $\eta'_y=\{G_i\cap Y\mid G_i\in\eta'\}$ 是 η_Y 的有限子覆盖.

定理 Hausdorff 空间 (X,τ) 的紧致子集 A 是闭的.

证明 只需证明 $X-A$ 是开的. 对任何 $p\in X-A$，因 X 是

Hausdorff 空间，故$\forall\ x\in A$，存在 p 的邻域 $U(p,x)$和 x 的邻域 $V(x)$，使得 $U(p,x)\cap V(x)=\varnothing$. 显然，$\{V(x)\mid x\in A\}$是 A 的在 X 中的一个开覆盖，因 A 紧致，故有一个有限子覆盖$\{V(x_k)\mid k=1,\cdots,n\}$.

令 $U(p)=\bigcap\limits_{k=1}^{n}U(p,x_k)$，知 $U(p)$ 是 p 的邻域，且 $U(p)\cap V(x_k)=\varnothing$，故 $U(p)\cap A\subset U(p)\cap\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}V(x_k)\right)=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(U(p)\cap V(x_k))=\varnothing$，于是 $p\in U(p)\subset X-A$，即 $X-A$ 是开集，A 是闭集.

容易证明，连续映射保持紧致性不变.

定理 设(X,τ_1)为紧致拓扑空间，(Y,τ_2)为拓扑空间，f：$X\to Y$ 连续，则 $f(X)$是 Y 的紧致子集.

证明 设 $\eta=\{V_\alpha\}$是 $f(X)$的任一开覆盖，因 f：$X\to f(X)$连续，故 $f^{-1}(V_\alpha)$是 X 的开集. 显然$\{f^{-1}(V_\alpha)\}$是 X 的一个开覆盖. 因 X 紧致，$\{f^{-1}(V_\alpha)\}$有一个有限子覆盖$\{f^{-1}(V_{\alpha k})\mid k=1,\cdots,n\}$. 因 $ff^{-1}(V_\alpha)=V_\alpha$，故$\{V_{\alpha k}\mid k=1,\cdots,n\}$是 $f(X)$的一个有限开覆盖，它是 η 的有限子覆盖，故 $f(X)$紧致.

可以证明，紧致拓扑空间的积空间也是紧致的，即有

定理(Tychonoff) 令(X_1,τ_1)和(X_2,τ_2)是紧致拓扑空间，那么积空间 $X_1\times X_2$ 在积拓扑中是紧致的.

上述各定理应用于 R，R^n，有：

(1) 一个实数子集 A 是紧致的，当且仅当它是闭的且是有界的；

(2) 从一个紧致拓扑空间(X,τ)到 R 的一个连续函数 f：$X\to R$ 是有界的且达到它的最大值和最小值；

(3) R^n 的一子集 A 是紧致的，当且仅当它是闭的和有界的.

例如，n 维球面 S^n(定义为在 R^{n+1}中满足 $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1$ 的点的集合)在导出拓扑下是紧致的，因它是 R^{n+1}的闭的且有界的子集.

定义 一个空间 X 说是局部紧的，如果对任何 $x\in X$，存在 x 的邻域 $U(x)$，使 $\overline{U(x)}$ 是紧致的.

例如：R^n 不紧致但是局部紧的.

定义 拓扑空间 (X, τ) 是连通的，如果它不能表示为两个非空开集的分离并. 一个子集 $M\subset X$ 说是连通集，如果作为子空间 (M, τ_M)，它是连通的.

以下命题等价：(1) (X, τ) 是连通的；(2) X 不能表示为两个非空闭集的分离开；(3) X 中仅有的既开又闭的集是 $\varnothing$ 和 X.

定理 连通集的连续像是连通的.

定理 设 $\{A_\alpha\}$ 是 X 中一个连通子集簇，且 $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$，则 $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ 必连通.

§1.2 微分流形

1. 微分流形的定义

所谓流形，就是这样的拓扑空间，就其局部来说为 n 维欧氏空间，即它的任意点都有邻域同胚于欧氏空间中的开集. 因此，在流形上每一点附近可引进局部坐标系.

定义 设 M 是 Hausdorff 空间. $U\subset M$ 是开集，$\varphi_U: U\to\varphi_U(U)\subset R^m$ 是同胚，则称 (U, φ_U) 是 M 的一个坐标卡. 对任一点 $p\in U$，命 $x^i=(\varphi_U(p))^i (i=1, \cdots, m)$，称 $x^i (1\leqslant i\leqslant m)$ 为点 p 的局部坐标.

设 (U, φ_U) 和 (V, φ_V) 是 M 上的两个坐标卡，若 $U\cap V\neq\varnothing$，则 $\varphi_U(U\cap V)$ 和 $\varphi_V(U\cap V)$ 是 R^m 中两非空开集，且映射 $\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}: \varphi_U(U\cap V)\to\varphi_V(U\cap V)$ 是这两开集间的同胚映射，其逆映射是 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 和用坐标表示时，$\varphi_V\circ\varphi_U^{-1}$ 和 $\varphi_U\circ\varphi_V^{-1}$ 分别表示为欧氏空间开集上的 m 个实函数

$$y^i=f^i(x^1, \cdots, x^m)=(\varphi_U\circ\varphi_U^{-1}(x^1, \cdots, x^m))^i,$$
$$(x^1, \cdots, x^m)\in\varphi_U(U\cap V);$$

$$x^i = g^i(y^1, \cdots, y^m) = (\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}(y^1, \cdots, y^m))^i,$$
$$(y^1, \cdots, y^m) \in \varphi_V(U \cap V).$$

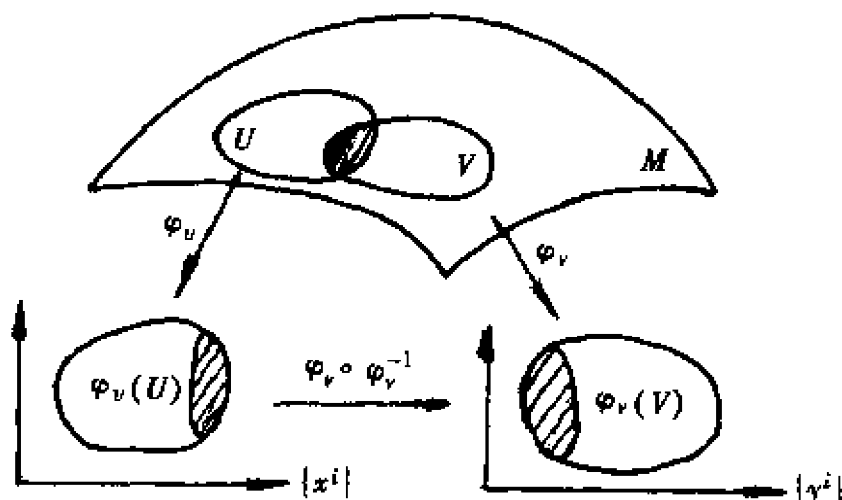


图 1-1

两个坐标卡(U, φ_U)和(V, φ_V)说是C^r-相容的，如果$U \cap V = \varnothing$，或者在$U \cap V \neq \varnothing$时坐标变换函数$f^i(x^1, \cdots, x^m)$和$g^i(y^1, \cdots, y^m)$都是$C^r$的.

定义 设M是Hausdoff空间. 若存在一个坐标卡集$\mathscr{A} = \{(U, \varphi_U), (V, \varphi_V), (W, \varphi_W), \cdots\}$，满足

(1) $\{U, V, W, \cdots\}$是M的一个开覆盖；

(2) $\mathscr{A}$中任两坐标卡是C^r-相容的；

(3) $\mathscr{A}$是最大的，即：对于M的任意一个坐标卡$(\tilde{U}, \varphi_{\tilde{U}})$，如果它与属于$\mathscr{A}$的每一个坐标卡都是$C^r$-相容的，则它自身必属于$\mathscr{A}$，则称$M$是一个$C^r$-微分流形，而$\mathscr{A}$称为$M$的一个$C^r$微分结构. 属于给定的微分结构的坐标卡称为微分流形M的容许的坐标卡.

注 最大性可不必考虑，因为任何一个满足覆盖性与相容性的坐标卡集都可扩充为最大相容坐标卡集.

若在M上确定了一个C^∞-微分结构，则简称M为光滑流形.

设f是定义在m维光滑流形M上的实函数，$p \in M$，(U, φ_U)是包含p点的容许坐标卡. 若函数$f \circ \varphi_U^{-1}$在点$\varphi_U(p) \in R^m$

是 C^∞ 的，则称函数 f 在点 $p\in M$ 是 C^∞ 的．若实函数 f 在 M 上处处是 C^∞ 的，则称 f 是 M 上的 C^∞-函数(或光滑函数)．M 上全体光滑函数的集合记为 $C^\infty(M)$．易证，函数 f 在点 p 的可微性与包含 p 的坐标卡的选取无关．

定义 设 $f: M\to N$ 是从光滑流形 M 到 N 的一个连续映射，$\dim M=m$、$\dim N=n$．若在一点 $p\in M$，存在点 p 的坐标卡 (U, φ_U) 和点 $f(p)$ 的坐标卡 (V, ψ_V)，使得映射 $\psi_V\circ f\circ\varphi_U^{-1}: \varphi_U(U)\to\psi_V(V)$ 在点 $\varphi_U(p)$ 是 C^∞ 的，则称映射 f 在点 p 是 C^∞ 的．若映射 f 在 M 的每一点都是 C^∞ 的，则称 f 是从 M 到 N 的光滑映射．

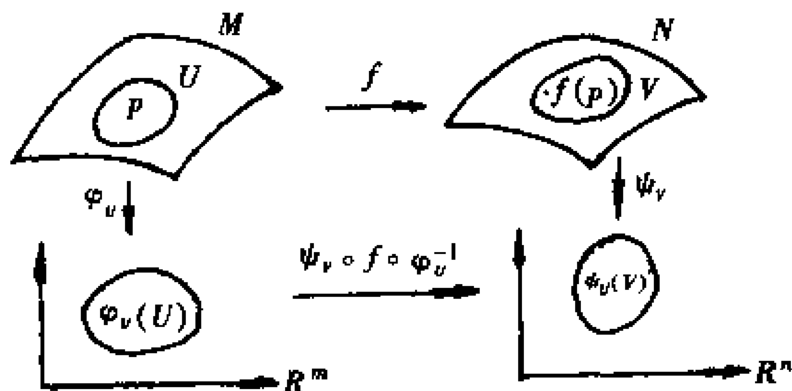


图 1-2

若 $\dim M=\dim N$，且 $f: M\to N$ 是同胚，当 f 和 f^{-1} 都是光滑映射时，称 f 是可微同胚，称 M 和 N 的光滑流形结构是同构的．

实际上，光滑函数是光滑映射的一个特例．光滑映射的另一特例是流形上的参数曲线．

设 M 是 m 维 C^∞ 流形，$W=(a, b)$ 是 R 中一个开区间，则称光滑映射 $f: (a, b)\to M$ 为流形 M 上的一条参数曲线．

设 M, N 分别为 m 维和 n 维光滑流形，其微分结构分别是 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$．则积拓扑空间 $M\times N$ 上由 C^∞-相容的坐标覆盖

$$\{(U_\alpha\times V_\beta, \varphi_\alpha\times\psi_\beta)\}_{\alpha\in A, \beta\in B}$$

决定的光滑流形结构使 $M\times N$ 成为 $m+n$ 维光滑流形，称为 M 和 N 的积流形．其中映射 $\varphi_\alpha\times\psi_\beta: U_\alpha\times V_\beta\to R^{m+n}$ 定义为

$$\varphi_\alpha\times\psi_\beta(p,q)=(\varphi_\alpha(p),\psi_\beta(q)),\ (p,q)\in U_\alpha\times V_\beta.$$

定义 设 M 与 N 分别是 m 维和 n 维光滑流形($m\leqslant n$). 若有光滑映射 $f: M\to N$，使得 f 是单射，且 $\forall\ p\in M$，有 $(\mathrm{rank}\ f)_p=m$，则称(f, M)是 N 的一个光滑子流形或嵌入子流形.

设(f, M)是光滑流形 N 的子流形. 如果 $f: M\to f(M)\subset N$ 是同胚映射，则称(f, M)是 N 的正则子流形.

2. 切空间

欧氏空间中切矢量定义很直观，但对一般的流形而言，我们需要一个仅涉及流形的内在构造的切矢量定义. 在 R^n 中，存在着矢量和方向导数间的一一对应，一个矢量 $X=(\xi^1, \cdots, \xi^n)$确定沿此矢量方向的方向导数算符，$\sum_i \xi^i(\partial/\partial x^i)$，反之亦然. 方向导数的特征是作用在函数上时的直线性和满足莱布尼兹规则. 我们将以此作为流形上切矢量的定义.

设 M 是 m 维光滑流形，固定一点 $p\in M$. 设 f 是定义在点 p 的一个邻域上的 C^∞-函数. 所有这样的函数的集合记作 C_p^∞.

定义 在流形 M 上任一点 p 处，若映射 $X: C_p^\infty\to R$ 满足条件

(1) $X(af+bg)=aX(f)+bX(g)$ $(f, g\in C_p^\infty; a, b\in R)$;

(2) $X(f\cdot g)=f(p)\cdot X(g)+g(p)X(f)$.

则称 X 为 p 点处的一个切矢量.

容易验证，当定义了加法和标乘运算

$$(X_1+X_2)f=X_1f+X_2f,$$

$$(aX)f=a\cdot Xf$$

后，在 p 点处的切矢量组 $T_p=\{X|X$ 为 p 处切矢量$\}$形成一个矢量空间，称为流形 M 在 p 点处的切空间.

定理 设 M 是一个 m 维流形. $p\in M$，T_p 为 p 点处的切空间，则 $\dim T_p=m$.

证明 首先找出 m 个线性无关的特殊矢量. 设 p 点处局部坐标系为(U, φ)或$\{x^i|i=1, \cdots, m\}$. 定义坐标矢(坐标基)$\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots,$

$\frac{\partial}{\partial x^m}$为映射

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: C_p^\infty \to R,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f = \left.\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)}.$$

显然满足：

(1) $\frac{\partial}{\partial x^i}(af+bg) = \left.\frac{\partial(af+bg)\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = \left.\frac{\partial(af\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} + \left.\frac{\partial(bg\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = a\cdot\left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} + b\cdot\left.\frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = a\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}f + b\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}g,$

(2) $\frac{\partial}{\partial x^i}(fg) = \left.\frac{\partial(fg)\circ\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = g\circ\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)}\cdot\left.\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} + f\circ\varphi^{-1}\big|_{\varphi(p)}\cdot\left.\frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} = g(p)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}f + f(p)\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}g,$

故 $\qquad \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_p.$

此外，若 $\sum_{i=1}^m \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i} = 0$，则取 $f = x^j$ 有

$$0 = 0x^j = \left(\sum_{i=1}^m \lambda^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)x^j = \sum_{i=1}^m \lambda^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}x^j\right) = \sum_{i=1}^m \lambda^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^m \lambda^i \delta_i^j = \lambda^j \quad (j = 1, \cdots, m),$$

故 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$线性无关.

最后证明$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^m}\right\}$是 T_p 的基. 为此，利用微积分中结论：如果 $F: R^m \to R$ 是 C^∞ 的，那么对于每一个 $a = (a^1, \cdots, a^m) \in R^m$，存在 C^∞ 函数 H_i，以致对于所有 $x \in R^m$，有 $F(x) = F(a) + \sum_{i=1}^m (x^i - a^i)H_i(x)$，而 $H_i(a) = \left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{x=a}$.

现在令 $F = f\circ\varphi^{-1}$，且 $a=\varphi(p)$，于是，对于所有 $q\in U$，有

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^{m}[x^i\circ\varphi(q) - x^i\circ\varphi(p)]H_i(\varphi(q)).$$

令 $X\in T_p$，我们希望给出 X 是$\frac{\partial}{\partial x^i}$的线性组合. 为此，将 X 作用于 f，利用上式，X 的性质及对于常数（例如 $f(p)$）X 作用为零，我们得到

$$Xf = Xf(p) + \sum_{i=1}^{m}\{[x^i\circ\varphi(q) - x^i\circ\varphi(p)]|_{q=p}\cdot X(H_i\circ\varphi)$$

$$+ (H_i\circ\varphi)|_p\cdot X[x^i\circ\varphi - x^i\circ\varphi(p)]\} = \sum_{i=1}^{m}(H_i\circ\varphi(p))X(x^i\circ\varphi),$$

但由 $H_i(a) = \left.\frac{\partial F}{\partial x^i}\right|_{x=a}$，知 $H_i\circ\varphi(p)$ 就是$\frac{\partial}{\partial x^i}f$. 于是，对所有 $f\in C_p^\infty$，有

$$Xf = \sum_{i=1}^{m}X(x^i\circ\varphi)\frac{\partial}{\partial x^i}f = \sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}f$$

（其中系数 $\xi^i = X(x^i\circ\varphi)$），

故
$$X = \sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

综上，$\frac{\partial}{\partial x^i}(i=1,\cdots,m)$ 是 T_p 的一组坐标基.

一旦选择不同的坐标系，就有不同的坐标基. 设 p 处有两个局部坐标系 $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$；$(U_\beta,\varphi_\beta)$，$\{y^i\}$. 于是在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 中，坐标基之间有关系：

$$\frac{\partial}{\partial y^i}f = \frac{\partial(f\circ\varphi_\beta^{-1})}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial(f\circ\varphi_\alpha^{-1})}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial y^i} =$$

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)f,$$

故
$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial x^j}，其中\quad \frac{\partial x^j}{\partial y^i} = \frac{\partial(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})^j}{\partial y^i}.$$

设切矢量 X 在两不同局部坐标系下分别表示为 $\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 和

$\sum_{j=1}^{m} \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j}$，则

$$\sum_{j=1}^{m} \eta^j \frac{\partial}{\partial y^j} = X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} =$$
$$\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \xi^i \right) \frac{\partial}{\partial y^j},$$

所以切矢量 X 关于局部坐标系$\{x^i\}$和$\{y^j\}$的分量的变换式为

$$\eta^j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \xi^i.$$

在经典的张量分析中，逆变矢量是用此式定义的.

下面讨论切空间的对偶空间. 设 m 维流形 M 上 p 点处的切空间为 T_p，令

$$T_p^* = \{\alpha \mid \alpha: T_p \to R \text{ 是线性映射}\}.$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha \in T_p^*$，$\lambda \in R$，定义

$$(\alpha_1 + \alpha_2)X = \alpha_1 X + \alpha_2 X,$$
$$(\lambda\alpha)X = \lambda \cdot \alpha X, \qquad X \in T_p,$$

则显然 T_p^* 在上述加法和数乘下构成一个矢量空间，称为 T_p 的对偶空间或流形 M 上 p 点处的余切空间；T_p^* 中的元素叫对偶矢量或协变矢量.

设$\{x^i\}$是 p 点的局部坐标系，令 $\mathrm{d}x^i \in T_p^*$，且

$$\mathrm{d}x^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

则可证$\{\mathrm{d}x^i \mid i = 1, \cdots, m\}$是 T_p^* 的一个基，因而 T_p^* 是 m 维矢量空间.

设 p 点处的两个局部坐标系为$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$，$\{x^i\}$；$(U_\beta, \varphi_\beta)$，$\{y^j\}$. 在这两个坐标系中，协变矢量 $\alpha \in T_p^*$ 分别写为 $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathrm{d}x^i$ 和 $\sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \mathrm{d}y^j$. 不难证明下述变换关系成立：

$$\mathrm{d}y^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j,$$

$$\overline{\alpha}_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\alpha_i.$$

在经典的张量分析中，协变矢量是用上式定义的.

切空间 T_p 和它的对偶空间 T_p^* 的对偶关系是相互的. 定义

$$\langle X, \alpha\rangle = \alpha X, \quad X\in T_p, \ \alpha\in T_p^*,$$

则 $\langle , \rangle$ 是定义在 $T_p\times T_p^*$ 上的实函数，并且对每一个变量都是线性的，即

$$\begin{cases}\langle aX_1+bX_2, \alpha\rangle = a\langle X_1, \alpha\rangle + b\langle X_2, \alpha\rangle, \\ \langle X, a\alpha_1+b\alpha_2\rangle = a\langle X, \alpha_1\rangle + b\langle X, \alpha_2\rangle.\end{cases}$$

固定矢量 $X\in T_p$，则 $\langle X, \rangle$ 是 T_p^* 上的线性实函数；反之，T_p^* 上的线性函数都可这样表示. 因此，T_p 可看做 T_p^* 上的线性函数所成的矢量空间，即，T_p 是 T_p^* 的对偶空间.

3. 切映射

设 $f: M\to N$ 是光滑映射，$p\in M$，$q=f(p)$. 映射 f 诱导的切空间之间的一个线性映射定义为：

$$f_*: T_p\to T_q,$$

使得对 q 点附近的任何 C^∞ 实函数 h，有

$$f_*X(h) = X(h\circ f), \qquad X\in T_p,$$

f_* 称为切映射.

设 (U, φ)，$\{x^i\}$ 是 p 点的局部坐标系，(V, ψ)，$\{y^j\}$ 是 $q=f(p)$ 的局部坐标系. 则

$$y^j = f^j(x^1, \cdots, x^m), \qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

设 h 为 V 上的光滑函数. 切映射在切空间 T_p 的坐标基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ 上的作用是

$$f_*\frac{\partial}{\partial x^i}(h) = \frac{\partial}{\partial x^i}(h\circ f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(h\circ f\circ\varphi^{-1}) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(h\circ\psi^{-1})}{\partial y^j}\cdot\frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right)h,$$

故 $$f_*\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

可见，切映射在 T_p 的坐标基和 T_q 的坐标基下的矩阵恰是映射 $y^j=f^j(x^1,\cdots,x^m)$ 的 Jacobi 矩阵 $\left(\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)$.

设 $\sigma(t)$ 是 M 上一条 C^∞ 曲线（t 称为曲线 σ 的参数），(U,φ)，$\{x^i\}$ 是含 $\sigma(t)$ 的局部坐标系，则对于每个 t，确定了一个沿 σ 的切矢量

$$X_\sigma(t)=\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mathrm{d}(x^i\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)}.$$

设 $\sigma(t)$ 是 M 上一条 C^∞ 曲线，$f:M\to N$ 是光滑映射，则 $f\circ\sigma$ 是 N 上一条曲线，且

$$X_{f\circ\sigma}=(f\circ\sigma)_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=f_*\circ\sigma_*\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)=f_*(X_\sigma(t)),$$

故切映射 f_* 把 M 上曲线 $\sigma(t)$ 的切矢量映射为 N 上曲线 $f\circ\sigma(t)$ 的切矢量（“搬走”切矢量）.

设 $f:M\to N$ 是光滑映射. $P\in M$，$q=f(p)$. 切映射的共轭映射 $f^*:T_q^*\to T_p^*$ 定义为

$$\langle X,f^*\alpha\rangle=\langle f_*X,\alpha\rangle,\qquad X\in T_p,\ \alpha\in T_q^*.$$

f^* 把 N 上 q 处的协变矢量映射为（“拉回”到）M 上 p 点的协变矢量，它是线性映射.

容易证明，f^* 在坐标基 $\{\mathrm{d}y^i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 上的作用是

$$f^*\mathrm{d}y^j=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f^j}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k,$$

即 f^* 在坐标基 $\{\mathrm{d}y^j\}$ 和 $\{\mathrm{d}x^i\}$ 下的矩阵仍是映射 f 的 Jacobi 矩阵.

4. C^∞ 矢量场和积分流形

流形 M 上的一个切矢量场 X 是一个映射，它对每一点 $p\in M$，对应着唯一的一个 $X_p\in T_p$，即 M 上的一个切矢量场就是 M 上各点切矢量的一个分配.

设 X 是光滑流形 M 上一个切矢量场，若对任意的 $f\in C^\infty(M)$，仍有 $Xf\in C^\infty(M)$，则称 X 是流形 M 上的光滑切矢量场.

这个定义可改写成如下形式：

设 X 是光滑流形 M 上的一个切矢量场. 若对任意一点 $p\in M$，存在点 p 的局部坐标系(U, φ)，$\{x^i\}$，使得 X 限制在 U 上可以表示成

$$X=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

其中 $\xi^i(1\leqslant i\leqslant m)$是 U 上的光滑函数，则称 X 是光滑流形 M 上的光滑切矢量场.

容易证明上述两个定义是等价的.

设 X 是流形 M 上的 C^∞ 切矢量场. 若 C^∞ 曲线 $\sigma:(a, b)\to M$ 满足

$$\sigma_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=X|_{\sigma(t)},$$

则称 σ 为切矢量场 X 的积分曲线或流线. 关于积分曲线的存在性问题，有如下定理.

定理 设 X 是光滑流形 M 的某开集上的光滑矢量场，p 是 X 的定义域中任一点，则对任何实数 b，存在 $r>0$ 和唯一的 C^∞ 曲线 $\sigma:(b-r, b+r)\to M$，使得 $\sigma(b)=p$，且 σ 是 X 的积分曲线.

证明 设(U, φ)，$\{x^i\}$是 p 的局部坐标系，U 包含在 X 的定义域中. 令

$$X=\sum_{i=1}^{m}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

ξ^i 在 U 上是 C^∞ 函数.

σ 是 X 的积分曲线等价于$\dfrac{\mathrm{d}(x^i\circ\sigma)}{\mathrm{d}t}=\xi^i\circ\sigma(i=1, \cdots, m)$. 记 $x^i(t)=x^i\circ\sigma(t)$，则上式可写作

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}=\xi^i(x^1, \cdots, x^m)\ (i=1, \cdots, m).$$

应用微分方程的存在和唯一性定理得到 $r>0$ 和 $x^i(t)$，使所确定的 C^∞ 曲线 σ 在指定的范围内满足所要求的性质.

设流形 M 上给定了两个光滑切矢量场 X 和 Y，则它们的

Poisson 括号积(或交换子积)定义为

$$[X, Y]=XY-YX,$$

即 $$[X, Y]f=X(Yf)-Y(Xf), \forall f\in C^\infty(M).$$

容易验证，$[X, Y]$是流形 M 上的光滑切矢量场.

容易证明，Poisson 括号积的运算满足以下规律.

定理 设 X, Y, Z 是流形 M 上的光滑向量场，f, $g\in C^\infty(M)$，则

(1) $[X, Y]=-[Y, X]$;

(2) $[X+Y, Z]=[X, Z]+[Y, Z]$;

(3) $[fX, gY]=f\cdot(Xg)Y-g\cdot(Yf)X+f\cdot g[X, Y]$;

(4) $[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]]=0$;

(5) 设(U, x^i)是 M 上的一个局部坐标系，$X|_U=\sum_{i=1}^m\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y|_U=\sum_{i=1}^m\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，则有

$$[X, Y]|_U=\sum_{j=1}^m\sum_{i=1}^m\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

定义 设 M 是 m 维光滑流形.若对任意一点 $p\in M$，均对应该点切空间 T_p 的一个 h 维子矢量空间 $L^h(p)$，则构成这种对应关系的映射 L^h 称为 M 上的 h 维切子空间场或 h 维分布.

若对任何 $p\in M$，存在 p 的某个领域 U 上的 h 个处处线性无关的 C^∞ 切矢量场 X_1, …, X_h，使得对每点 $q\in U$，$\{X_1(q), \cdots, X_h(q)\}$构成 $L^h(q)$的基，则称 L^h 是光滑的.

设(f, S)是 M 的 h 维 C^∞子流形，且切于这个子流形的切空间在每一点 $y\in S$ 与 $L^h(f(y))$一致，则称 S 是 L^h 的积分流形.若对于任意一点 $p\in M$，过 p 点均存在一个 h 维的积分流形，则称 L^h 是完全可积的.

对于流形 M 上给定的 h 维光滑切子空间场 L^h，我们希望知道是否 L^h 是完全可积的.如果 $h=1$，则这个问题简化为找一个光滑矢量场的积分曲线的问题，在前面的定理中已指出这样的积分

曲线总能被找到. 然而，如果 $h>1$，L^h 不一定完全可积.

如果 L^h 完全可积，则对任意 $p\in M$，存在局部坐标系 $\{U, x^i\}$ 及坐标矢量场 $\frac{\partial}{\partial x^1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x^h}$，使得在 U 上

$$X_\alpha = \sum_{\mu=1}^{h} a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\alpha = 1, \cdots, h).$$

由于 $\left[\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right] = 0$，则

$$[X_\alpha, X_\beta] = \left[\sum_{\mu=1}^{h} a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \sum_{\nu=1}^{h} b^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right] =$$

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{h} \left\{ a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(b^\nu) - b^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(a^\nu) \right\} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \in L^h|_U.$$

如果在任意一个坐标域 U 上，均有 $[X_\alpha, X_\beta]\in L^h$，则称 L^h 是对合的. 上面的叙述实际上已经证明 L^h 完全可积的必要条件是：L^h 是对合的. 反过来可证明这个条件也是充分的，这里只作为结论给出.

定理（Frobenius 定理；矢量形式） 设 L^h 是 m 维 C^∞ 流形 M 上的 C^∞-h 维分布，则 L^h 在每点 $p\in M$ 具有积分流形（即 L^h 完全可积）的充分且必要条件是 L^h 是对合的，即对任意 $X, Y\in L^h$，有 $[X, Y]\in L^h$.

§1.3 张　　量

1. 张量、张量积

定义 设 V 是一有限维矢量空间，V^* 是它的对偶空间，则一多重线性映射

$$t: \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s\text{个}}\to R$$

$$t(\alpha_1, \cdots, \alpha_r;\quad X_1, \cdots, \lambda X_i+\mu Y_i, \cdots, X_s) =$$
$$\lambda t(\alpha_1, \cdots, \alpha_r;\quad X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_s) +$$
$$\mu t(\alpha_1, \cdots, \alpha_r;\quad X_1, \cdots, Y_i, \cdots, X_s)$$

$(\lambda, \mu \in R; \alpha_1, \cdots, \quad \alpha_r \in V^*; \quad X_i, \quad Y_i \in V; i=1, \cdots, s)$

称为 V 上的 (r, s) 型张量，r 为其逆变阶数，s 是协变阶数. 在流形 M 上一点 p 的切空间 T_p 上，$(1, 0)$ 型张量就是切矢量，$(0, 1)$ 型张量就是其对偶空间 T_p^* 上的余切矢量.

记 V 上所有 (r, s) 型张量的全体为 $T_s^r(V)$. 设 $t_1, t_2 \in T_s^r(V)$，$\lambda \in R$. 定义 (r, s) 型张量的加法和数乘运算如下：

$$(t_1+t_2)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; X_1, \cdots, X_s)=$$

$$t_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; X_1, \cdots, X_s)+t_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; X_1, \cdots, X_s),$$

$$(\lambda t)(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; X_1, \cdots, X_s)=\lambda t(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; X_1, \cdots, X_s),$$

则 $T_s^r(V)$ 在上述加法和数乘下形成一个矢量空间，称为关于 V 的 (r, s) 型张量空间.

设 $t \in T_{s_1}^{r_1}(V)$，$g \in T_{s_2}^{r_2}(V)$，定义张量积运算为：

$$\otimes: T_{s_1}^{r_1}(V) \times T_{s_2}^{r_2}(V) \to T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$$

$$(t, g) \to t \otimes g,$$

$$t \otimes g(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1+r_2}; X_1, \cdots, X_{s_1+s_2})=$$

$$t(\alpha_1, \cdots, \alpha_{r_1}; X_1, \cdots, X_{s_1}) \cdot$$

$$g(\alpha_{r_1+1}, \cdots, \alpha_{r_1+r_2}; X_{s_1+1}, \cdots, X_{s_1+s_2}),$$

其中 $\alpha_i \in V^*$，$X_i \in V$.

根据此定义，知张量积运算满足以下规律：

$$(t_1+t_2) \otimes g=t_1 \otimes g+t_2 \otimes g,$$

$$t \otimes (g_1+g_2)=t \otimes g_1+t \otimes g_2,$$

$$(\lambda t) \otimes g=t \otimes (\lambda g),$$

$$(t \otimes g) \otimes h=t \otimes (g \otimes h)=t \otimes g \otimes h.$$

但张量积一般不满足交换律，即 $t \otimes g \neq g \otimes t$.

设流形 M 上 p 点处的局部坐标系是 (U, φ)，$\{x^i\}$. 记 p 点处切空间 T_p 上 (r, s) 型张量的全体为 $T_s^r(p)$. T_p 的坐标基 $\frac{\partial}{\partial x^i} \in T_0^1(p)$，对偶基 $\mathrm{d}x^i \in T_1^0(p)$. 根据张量积的定义，$\frac{\partial}{\partial x^1} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^r} \in T_0^r(p)$，而 $\mathrm{d}x^1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^s \in T_s^0(p)$.

定理 设$\{x^i\}$是 m 维流形 M 上 p 点处的局部坐标系，则$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\mid 1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant m\}$是$T_s^0(p)$的一组基，故$T_s^0(p)$是$m^s$维空间.

证明 若 $\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}=0$，则

$$\begin{aligned}0&=0(\partial/\partial x^{j_1},\cdots,\partial/\partial x^{j_s})=\\&\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\Big)\\&(\partial/\partial x^{j_1},\cdots,\partial/\partial x^{j_s})=\\&\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\lambda_{i_1\cdots i_s}\langle\partial/\partial x^{j_1},dx^{i_1}\rangle\cdot\langle\partial/\partial x^{j_2},dx^{i_2}\rangle\cdots\\&\langle\partial/\partial x^{j_s},dx^{i_s}\rangle=\\&\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\lambda_{i_1\cdots i_s}\delta_{j_1}^{i_1}\cdots\delta_{j_s}^{i_s}=\lambda_{j_1\cdots j_s}\\&(j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,m),\end{aligned}$$

故$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\mid 1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant m\}$线性无关.

又，设$t\in T_s^0(p)$，则

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}t(\partial/\partial x^{i_1},\cdots,\partial/\partial x^{i_s})dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\Big]\\&(\partial/\partial x^{j_1},\cdots,\partial/\partial x^{j_s})=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}t(\partial/\partial x^{i_1},\cdots,\partial/\partial x^{i_s})\cdot\\&\delta_{j_1}^{i_1}\cdots\delta_{j_s}^{i_s}=t(\partial/\partial x^{j_1},\cdots,\partial/\partial x^{j_s}),\end{aligned}$$

故 $$t=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}t_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s},$$

即$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}\mid 1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant m\}$是$T_s^0(p)$的一组基. 其中

$$t_{i_1\cdots i_s}=t(\partial/\partial x^{i_1},\cdots,\partial/\partial x^{i_s})$$

称为张量 t 关于局部坐标系$\{x^i\}$的分量.

类似地，可证$\left\{\partial/\partial x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial/\partial x^{i_r}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\,\middle|\,1\leqslant\begin{matrix}i_1,\cdots,i_r\\j_1,\cdots,j_s\end{matrix}\leqslant m\right\}$是$T_s^r(p)$的一个基，因此$T_s^r(p)$是$m^{r+s}$维矢量空间. 关于这

个基，$t\in T^r_s(p)$可表示为（利用爱因斯坦和式约定）

$$t=t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\partial/\partial x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\partial/\partial x^{i_r}\otimes \mathrm{d}x^{j_1}\otimes\cdots\otimes \mathrm{d}x^{j_s}$$
$$(1\leqslant i_1,\ \cdots,\ i_r,\ j_1,\ \cdots,\ j_s\leqslant m),$$

其中 $$t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=t(\mathrm{d}x^{i_1},\ \cdots,\ \mathrm{d}x^{i_r};\partial/\partial x^{j_1},\ \cdots,\ \partial/\partial x^{j_s})$$
称为张量 t 关于坐标系$\{x^i\}$的分量.

设流形 M 上 p 点处两局部坐标系分别为$(U,\ \varphi)$，$\{x^i\}$和$(V,\ \psi)$，$\{y^i\}$$(U\cap V\neq\varnothing)$；张量 $t\in T^r_s(p)$在两坐标系下的分量分别表示为 $t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$和$\bar{t}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$. 则有

$$\bar{t}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=t(\mathrm{d}y^{i_1},\ \cdots,\ \mathrm{d}y^{i_r};\partial/\partial y^{j_1},\ \cdots,\ \partial/\partial y^{j_s})=$$
$$t\left(\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\mathrm{d}x^{k_1},\ \cdots,\ \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\mathrm{d}x^{k_r};\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\ \cdots,\ \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}\frac{\partial}{\partial x^{l_s}}\right)=$$
$$\frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{k_r}}\cdot\frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}}t^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s},$$

这是经典张量分析中$(r,\ s)$型张量的定义.

2. 对称和反对称协变张量

记自然数$\{1,\ 2,\ \cdots,\ s\}$的置换群为$\mathscr{S}(s)$. 设置换$\sigma\in\mathscr{S}(s)$，s 阶协变张量 $t\in T^0_s(V)$. 定义

$$\sigma t(X_1,\ \cdots,\ X_s)=t(X_{\sigma(1)},\ \cdots,\ X_{\sigma(s)}),\ X_i\in V.$$

定义 设 $t\in T^0_s(V)$. 若对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(s)$，都有

$$\sigma t=t,$$

则称 t 是对称的 s 阶协变张量. 若对任意的 $\sigma\in\mathscr{S}(s)$，都有

$$\sigma t=\mathrm{sgn}\sigma\cdot t,\quad \text{其中 } \mathrm{sgn}\sigma=\begin{cases}1,\ \sigma\text{ 是偶置换；}\\-1,\ \sigma\text{ 是奇置换.}\end{cases}$$

则称 t 是反对称 s 阶协变张量.

定理 设 $t\in T^0_s(V)$，则 t 是对称协变张量的充要条件是：它的分量关于各指标是对称的；t 是反对称协变张量的充要条件是它的分量关于各指标是反对称的.

证明 设 V 的坐标基为$\{e^i\}$，则当 t 为对称张量时，对任意 $\sigma\in\mathscr{S}(s)$有

$$t_{i_1\cdots i_s}=t(e^{i_1},\cdots,e^{i_s})=\sigma t(e^{i_1},\cdots,e^{i_s})=$$
$$t(e^{i_{\sigma(1)}},\cdots,e^{i_{\sigma(s)}})=t_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(s)}};$$

反之亦然.若 t 是反对称的，则对任意 $\sigma\in\mathscr{S}(s)$有

$$t_{i_1\cdots i_s}=t(e^{i_1},\cdots,e^{i_s})=\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma t(e^{i_1},\cdots,e^{i_s})=$$
$$\mathrm{sgn}\sigma\cdot t_{i_{\sigma(1)},\cdots,i_{\sigma(s)}};$$

反之亦然.

对任意的 $t\in T_s^0(V)$，命

$$S_s(t)=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\sigma t,$$
$$A_s(t)=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma t,$$

则 $S_s(t)$，$A_s(t)\in T_s^0(V)$.线性映射 S_s，A_s 分别称为 s 阶协变张量的对称化算子和反对称化算子.可以证明，张量对称化的结果是对称张量，反对称化的结果是反对称张量:设 $t\in T_s^0(V)$，则对任意 $\tau\in\mathscr{S}(s)$有

$$\tau(S_s(t))=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\tau(\sigma(t))=S_s(t),$$
$$\tau(A_s(t))=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\tau(\sigma(t))=$$
$$\mathrm{sgn}\tau\cdot\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\mathrm{sgn}(\tau\circ\sigma)\cdot\tau\circ\sigma(t)=\mathrm{sgn}\tau\cdot A_s(t).$$

$S_s(t)$和 $A_s(t)$在坐标系中的分量$(S_s(t))_{i_1\cdots i_s}$和$(A_s(t))_{i_1\cdots i_s}$常写成 $t_{(i_1\cdots i_s)}$和 $t_{[i_1\cdots i_s]}$.根据以上所述，有

$$t_{(i_1\cdots i_s)}=(S_s(t))_{i_1\cdots i_s}=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}t_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(s)}},$$
$$t_{[i_1\cdots i_s]}=(A_s(t))_{i_1\cdots i_s}=\frac{1}{s!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\mathrm{sgn}\sigma\cdot t_{i_{\sigma(1)}\cdots i_{\sigma(s)}}.$$

上面关于对称协变张量和反对称协变张量的讨论同样可用于逆变张量.

3. 张量场

若流形 M 上各点均给定了一个(r,s)型张量，则说给定了一个张量场.

(r,s)型张量场 t 称为 C^∞ 的，如果对于所有 C^∞ 协变矢量场 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 及 C^∞ 逆变矢量场 $X_1, \cdots, X_s$，$t(\alpha_1, \cdots, \alpha_r; X_1, \cdots, X_s)$是 C^∞ 函数（这等价于 t 的各分量 $t^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$是 C^∞ 函数）.

流形 M 上一切(r,s)型张量的全体记为 $T^r_s = \bigcup\limits_{p\in M} T^r_s(p)$. 在 T^r_s 中引进拓扑，使它成为有可数基的 Hausdorff 空间；进而可在 T^r_s 上定义 C^∞ 微分结构，使它成为一个光滑流形. 光滑流形 T^r_s 称为流形 M 上的(r,s)型张量丛，而 M 上的一个(r,s)型 C^∞ 张量场称为张量丛 T^r_s 的一个光滑截面. 当 $r=1$，$s=0$ 时，张量丛称为流形 M 上的切丛，记为 $T(M)$，切丛的截面就是 M 的切矢量场；当 $r=0$，$s=1$ 时，得到流形 M 上的余切丛，记为 $T^*(M)$，余切丛的截面称为 M 上的一次微分式.

§1.4 外 微 分

1. 外积

设 V 为 m 维矢量空间. 记 V 上 s 阶反对称协变张量的全体为 Λ^s，显然它是 T^0_s 的一个子矢量空间. 两个反对称张量 $\omega\in\Lambda^r$，$\eta\in\Lambda^s$的张量积 $\omega\otimes\eta$ 通常不是$(r+s)$阶的反对称协变张量，即 $\omega\otimes\eta\overline{\in}\Lambda^{r+s}$. 我们定义一个新的乘积，叫外积（或尖积）.

定义 设 $\omega\in\Lambda^r$，$\eta\in\Lambda^s$，定义映射

$$\Lambda: \Lambda^r\times\Lambda^s\to\Lambda^{r+s}$$

$$(\omega,\eta)\to\omega\wedge\eta=\frac{(r+s)!}{r!\ s!}A(\omega\otimes\eta),$$

显然 $\omega\wedge\eta$ 是$(s+r)$阶反对称协变张量，称为 ω 和 η 的外积.

根据外积定义易证外积适合下列运算规律：

(1) 分配律

$$(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta=\omega_1\wedge\eta+\omega_2\wedge\eta;$$

$$\omega\wedge(\eta_1+\eta_2)=\omega\wedge\eta_1+\omega\wedge\eta_2.$$

(2) 反交换律

$$\omega\wedge\eta=(-1)^{rs}\eta\wedge\omega，其中\ \omega\in\Lambda^r，\eta\in\Lambda^s.$$

特别当 ω, η 都是一阶反对称协变张量时(即 $r=s=1$), 有 $\omega\wedge\eta=-\eta\wedge\omega$, $\omega\wedge\omega=0$.

(3) 结合律

$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\omega\wedge(\eta\wedge\theta)$, $\omega\in\wedge^r$, $\eta\in\wedge^s$, $\theta\in\wedge^t$, 故 $\omega\wedge\eta\wedge\theta$与作外积的次序无关.

设 M 为 m 维流形,点 $p\in M$ 处的余切空间为 T_p^* ,p 处局部坐标系为$\{x^i\}$,$\{dx^1,\cdots,dx^m\}$是 T_p^* 的一个基底,根据外积定义,

$$dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}=s!\ A_s(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}),$$
$$1\leqslant i_1,\cdots,i_s\leqslant m.$$

根据外积反交换律, 只有当 $i_1,\cdots,i_s$ 各不相同时, $dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}$ 才不为零, 尤其当 $s>m$ 时, 它必为零.

定理 设 T_p^* 为 m 维流形上 p 点处的余切空间, $\{dx^i|i=1,\cdots,m\}$为 T_p^* 的一个基, 则

$$\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}|1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m\}$$

为 $\wedge^s(p)$的一个基, 因而 $\wedge^s(p)$为 $C_m^s=\frac{m!}{s!\ (m-s)!}$维矢量空间.

证明 设 $\omega\in\wedge^s(p)\subset T_s^0(p)$, 则 $\omega=\sum\limits_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s}$,

$$\omega=A(\omega)=\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\omega_{i_1\cdots i_s}A(dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_s})=$$
$$\frac{1}{s!}\sum_{i_1,\cdots,i_s=1}^{m}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}=$$
$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

于是$\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}|1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m\}$张成线性空间 $\wedge^s(p)$. 另一方面, 若

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}=0,$$

则当 $j_1<\cdots<j_s$ 时有

$$0=\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\lambda_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\Big)(\partial/\partial x^{j_1},\cdots,\partial/\partial x^{j_s})=$$

$$s!\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\lambda_{i_1\cdots i_s}A(\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_s})$$

$$(\partial/\partial x^{j_1},\cdots,\partial/\partial x^{j_s})=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\lambda_{i_1\cdots i_s}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}(s)}\mathrm{sgn}\sigma(\mathrm{d}x^{i_1}\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{i_s})$$

$$(\partial/\partial x^{j_{\sigma(1)}},\cdots,\partial/\partial x^{j_{\sigma(s)}})=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\lambda_{i_1\cdots i_s}\det(\langle\partial/\partial x^{j_\alpha},\mathrm{d}x^{i_\beta}\rangle)=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\lambda_{i_1\cdots i_s}\delta^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}=\lambda_{j_1\cdots j_s},$$

$$\delta^{i_1\cdots i_s}_{j_1\cdots j_s}=\begin{cases}1,\text{当 } i_1,\cdots,i_s \text{ 互不相同，且}\{i_1,\cdots,i_s\}\text{是}\{j_1,\cdots,j_s\}\text{的偶排列时；}\\-1,\text{当 } i_1,\cdots,i_s \text{ 互不相同，且}\{i_1,\cdots,i_s\}\text{是}\{j_1,\cdots,j_s\}\text{的奇排列时；}\\0,\text{其他情形.}\end{cases}$$

故$\{\mathrm{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{i_s}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m\}$是线性无关的.综上，它是$\wedge^s(p)$的一个基.

2. 外微分

定义 设M是m维C^∞流形，U是M中的开集，ω是U上的s阶C^∞反对称协变张量场，则称ω为U上的s次的C^∞外微分式.当$s=0$时，ω是U上的C^∞函数；当$s=1$时，ω也称为C^∞的 pfaff 形式；当$s>m$时，$\omega=0$.

记U上全体s次外微分式为$\wedge^s(U)$，其直和$\wedge(U)=\wedge^0(U)\dotplus\cdots\dotplus\wedge^m(U)$.$U$上的每一个外微分式可表示为

$$\omega=\omega^0+\omega^1+\cdots+\omega^m,$$

其中ω^i是i次外微分形式.

定义 设M是m维光滑流形.若映射$\mathrm{d}:\wedge^s(M)\to\wedge^{s+1}(M)$满足下列条件

(1) 对任意$\omega_1,\omega_2\in\wedge^s(M)$，有$\mathrm{d}(\omega_1+\omega_2)=\mathrm{d}\omega_1+\mathrm{d}\omega_2$；

(2) 设ω是r次外微分式，则

$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^r\omega\wedge d\eta;$$

(3) 若 f 是 M 上的光滑函数，即 $f\in\Lambda^0(M)$，则 df 恰好是 f 的微分；

(4) 若 $f\in\Lambda^0(M)$，则 $d(df)=0$，

则称映射 d 为外微分. 可以证明，光滑流形上存在唯一的一个这样的外微分.

设 $f\in\Lambda^0(M)$，$\omega\in\Lambda^s(M)$，$s\geqslant1$，则根据定义，在局部坐标系(U,φ)，$\{x^i\}$中有

$$df=\sum_{i=1}^m\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i,$$

$$d\omega=d\Big(\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\omega_{i_1\cdots i_s}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}\Big)=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}d\omega_{i_1\cdots i_s}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}=$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant m}\sum_{i=1}^m\frac{\partial(\omega_{i_1\cdots i_s}\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}.$$

定理 (Poincaré 引理) 对于任意的外微分式 ω，有$d^2\omega=d(d\omega)=0$.

证明 因为 d 是线性算子，所以只要取 ω 是单项式就够了. 设

$$\omega=f dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

故
$$d\omega=df\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s},$$

$$d(d\omega)=d(df)\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}-df\wedge d(dx^{i_1})\wedge\cdots\wedge dx^{i_s}+\cdots=0.$$

在§1.2 节末所讨论的 Frobenius 定理可以用外微分式重新描述. 设 L^h 是 m 维光滑流形 M 上的 h 维光滑分布. 在任一点 $p\in M$，$L^h(p)$是切空间 T_p 的 h 维线性子空间. 设 $\omega\in T_p^*$，且对任何 $X\in L^h(p)$有

$$\langle X,\omega\rangle=0,$$

则满足此条件的$\{\omega\}$是 T_p^* 的$(m-h)$维子空间. 反之，T_p^* 的一个$(m-h)$维子空间按$\langle X,\omega\rangle=0$ 确定一个 T_p 的 h 维子空间. 在任

意一点的一个邻域内，存在$(m-h)$个处处线性无关的一次微分式ω_{h+1}，…，ω_m，它们在该邻域的每一点p，张成满足条件$\langle X, \omega\rangle=0$的$T_p^*$的$(m-h)$维子空间. Frobenius 定理说，光滑分布$L^h$完全可积的充要条件是

$$[X_\alpha, X_\beta]\in L^h, \qquad 1\leqslant\alpha, \beta\leqslant h.$$

因对任意的$X\in L^h$，有$\langle X, \omega\rangle=0$，故$L^h$完全可积的充要条件又可写成

$$\langle [X_\alpha, X_\beta], \omega_s\rangle=0. \qquad 1\leqslant\alpha, \beta\leqslant h, h+1\leqslant s\leqslant m$$

可以证明，此式等价于：

$$\mathrm{d}\omega_s = \sum_{t=h+1}^{m}\psi_{st}\wedge\omega_t,$$

其中ψ_{st}是一次微分式.

3. 外微分式的积分

把流形的局部性质和整体性质联系起来的最简单的方式是外微分式在流形上的积分. 为此，先讨论流形的定向问题及单位分解定理.

定义 m维光滑流形M称为可定向的，如果在M上存在一个连续的、处处不为零的m次外微分式. 若在M上给定了这样一个外微分式ω，则称M是定向的. 如果给出M的定向的两个外微分式彼此差一个处处为正的函数因子，则称它们规定了M的同一个定向；故可定向流形有两个不同的定向.

设流形M是由外微分式ω定向的. 设$(U;x^i)$是M的任一个局部坐标系，则$\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m$与$\omega|_U$差一个处处不为零的因子. 如果它们是差一个正因子，则称$(U;x^i)$是与M的定向相符的坐标系. 显然在定向流形上可取定向相符的坐标覆盖，对于任意两个相交的坐标域，坐标变换的 Jacobi 行列式处处取正值. 反之，可以证明：如果流形M上存在一个容许的坐标覆盖，对其中任意两个相交的坐标域，坐标变换的 Jacobi 行列式处处取正值，则M是可定向的.

定义 设$f: M\to R$是M上的实函数，函数f的支集是指使

f 取非零值的点集的闭包，记作

$$\operatorname{supp} f=\overline{\{p \mid \in M,\ f(p)\neq 0\}}.$$

若 ω 是 m 次外微分式，则 ω 的支集是

$$\operatorname{supp}\omega=\overline{\{p \mid \in M,\ \omega(p)\neq 0\}}.$$

很明显，支集 $\operatorname{supp}\omega$ 的补集恰是 M 中使 $\omega=0$ 的最大开子集.

我们不加证明写出单位分解定理.

定理 （单位分解定理） 设 Σ 是光滑流形 M 的一个开覆盖，则在 M 上存在一族光滑函数 $\{g_\alpha\}$，满足下列条件：

(1) 对每一个 α，$0\leqslant g_\alpha\leqslant 1$，支集 $\operatorname{supp} g_\alpha$ 是紧致的，并且有开集 $W_i\in\Sigma$，使 $\operatorname{supp} g_\alpha\subset W_i$；

(2) 每一点 $p\in M$ 有一邻域 U，它只与有限多个支集 $\operatorname{supp} g_\alpha$ 相交；

(3) $\sum\limits_\alpha g_\alpha=1$.

由于条件(2)，在任意一点 $p\in M$，条件(3)左边只有有限多项不为零，故和式是有意义的. 函数族 $\{g_\alpha\}$ 称为从属于开覆盖 Σ 的单位分解.

设 M 是 m 维定向的光滑流形，ω 是 M 上的 m 次外微分式，且有紧致的支集 $\operatorname{supp}\omega$. 下面定义 ω 在 M 上的积分.

任取 M 的一个定向相符的坐标覆盖 $\Sigma=\{W_i\}$，设 $\{g_\alpha\}$ 是从属于 Σ 的单位分解，则

$$\omega=\Big(\sum_\alpha g_\alpha\Big)\omega=\sum_\alpha(g_\alpha\cdot\omega).$$

显然，支集 $\operatorname{supp}(g_\alpha\cdot\omega)\subset\operatorname{supp} g_\alpha\subset$某个坐标域 W_i 内，所以可以定义

$$\int_M g_\alpha\cdot\omega=\int_{W_i} g_\alpha\cdot\omega,$$

式子的右端理解为普通的黎曼积分，即：如果 $g_\alpha\cdot\omega$ 关于 W_i 中的坐标系 $x^1,\cdots,x^m$ 表示为

$$g_\alpha\cdot\omega=f(x^1,\cdots,x^m)\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^m,$$

则 $$\int_{W_i} g_\alpha\cdot\omega=\int_{\varphi_i(W_i)} f(x^1,\cdots,x^m)\mathrm{d}x^1\cdots\mathrm{d}x^m.$$

容易证明，这个积分与 W_i 的选择无关，所以定义 $\int_M g_\alpha \cdot \omega = \int_{W_i} g_\alpha \cdot \omega$ 是有意义的. 另外，因 $\mathrm{supp}\omega$ 紧致，故此积分值有限. 命

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot \omega,$$

上述的和式中实际上只有有限项可能不为零，这是因为 $\mathrm{supp}\omega$ 紧致，根据单位分解定理的条件(2)，$\mathrm{supp}\omega$ 只与有限多个支集 $\mathrm{supp}g_\alpha$ 相交，对于每一个从属于 Σ 的单位分解 $\{g_\alpha\}$，上式右边是完全确定的. 容易证明，积分与单位分解 $\{g_\alpha\}$ 的选取无关.

定义 设 M 是 m 维定向的光滑流形，ω 是 M 上有紧致支集的 m 次外微分式. 由

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M g_\alpha \cdot \omega$$

所定义的数值 $\int_M \omega$ 称为外微分式 ω 在 M 上的积分.

若 ω, ω_1, ω_2 都是 M 上有紧致支集的 m 次外微分式，则根据定义有

$$\int_M (\omega_1 + \omega_2) = \int_M \omega_1 + \int_M \omega_2,$$

$$\int_M c \cdot \omega = c\int_M \omega \quad (c \in \mathbf{R}).$$

定义了外微分式在流形上的积分后，现在来讨论一个重要的定理——Stokes 定理，它研究一个区域上的积分和它边界上的积分之间的关系. 在 R^2 和 R^3 中，这种关系是我们熟悉的，在 R^2 中，有 Green 公式

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在 R^3 中，有 Gauss 公式

$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

及 Stokes 公式

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

式中 ∂D 是有界区域 D 的边界，$\partial\Sigma$ 是有向曲面 Σ 的边界；边界（∂D，$\partial\Sigma$）的定向是由区域（D、Σ）的定向诱导的. 如果在三个公式中分别命

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y;$$

$$\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y;$$

$$\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

则三公式用外微分记号具有统一的形式

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D \mathrm{d}\omega.$$

下面所要叙述的 Stokes 定理正是上述公式在流形上的推广.

设 M 是 m 维定向流形，D 是 M 中的带边区域. 可以证明，D 的边界 B 是$(m-1)$维正则嵌入的闭子流形，且 B 也可定向.

我们可用 M 的定向来诱导 B 的定向. 对于任意一点 $p\in B\subset M$，选取与 M 的定向相符的适用坐标系$(U;x^i)$，即使 $U\cap B=\{q|\in U;x^m(q)=0\}$，则$(x^1,\cdots,x^{m-1})$是 B 在点 p 的局部坐标系. 以

$$(-1)^m\mathrm{d}x^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x^{m-1}$$

给出边界 B 在点 p 的坐标域 $U\cap B$ 上的定向，称为定向流形 M 的带边区域 D 在其边界 B 上的诱导定向. 将有诱导定向的边界 B 记作 ∂D. 我们不加证明给出

定理（Stokes 公式） 设 D 是 m 维定向流形 M 中的带边区域，ω 是 M 上有紧致支集的 $m-1$ 次外微分式，则

$$\int_D \mathrm{d}\omega = \int_{\partial D}\omega;$$

若 $\partial D=\varnothing$，则规定右边的积分是零.

§1.5 黎曼流形

1. 仿射联络

仿射联络是加在微分流形上，为使我们能对张量场进行“微分”的结构.

设 M 为 m 维光滑流形，M 上的切丛为 $T(M)$，$\Gamma(T(M))$是切丛 $T(M)$的光滑截面(即 M 上的光滑切矢量场)的集合.

定义 流形 M 上的仿射联络是一个从切矢量场到(1，1)型张量场的映射

∇(或 D)$:\Gamma(T(M))\to\Gamma(T^*(M)\otimes T(M))$，

它满足下列条件：

(1) 对任意 $X, Y\in\Gamma(T(M))$，有

$\nabla(X+Y)=\nabla X+\nabla Y$；

(2) 对 $Y\in\Gamma(T(M))$及任意的 $f\in C^\infty(M)$，有

$\nabla(fY)=df\otimes Y+f\nabla Y$.

命 $\nabla_X Y=\langle X, \nabla Y\rangle$，

其中记号$\langle，\rangle$是指 $T(M)$和 $T^*(M)$之间的配合，则$\nabla_X Y\in\Gamma(T(M))$，称为切矢量场 Y 沿切矢量场 X 的绝对微商(或协变导数).

设 $X, Y, Z\in\Gamma(T(M))$，$f\in C^\infty(M)$，根据定义，有

(1) $\nabla_{X+Y}Z=\nabla_X Z+\nabla_Y Z$；

(2) $\nabla_{fX}Z=f\nabla_X Z$；

(3) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_X Y+\nabla_X Z$；

(4) $\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_X Y$.

可以证明，流形 M 上的仿射联络总是存在的.

在局部上，联络是由一组一次微分式给出的. 设 U 是 M 的一个坐标域，局部坐标是 x^i，$1\leqslant i\leqslant m$. 切丛 $T(M)$在 U 上的 m 个处处线性无关的光滑截面$\{\partial/\partial x^j, 1\leqslant j\leqslant m\}$，称为 $T(M)$在 U 上的一个局部标架场. 显然在每一点 $p\in U$，$\{dx^i\otimes\partial/\partial x^j, 1\leqslant i, j\leqslant m\}$

构成张量空间 $T_p^*\otimes T_p$ 的基底.

根据仿射联络的定义，命(本节采用和式约定，所有指标取 1 到 m 的整数值)

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i}=\Gamma_{ij}^k \mathrm{d}x^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{1.5.1}$$

其中 Γ_{ij}^k是 U 上的光滑函数，称为联络 ∇ 关于局部坐标 x^i 的系数. 记

$$\omega_i^j=\Gamma_{ik}^j \mathrm{d}x^k. \tag{1.5.2}$$

则(1.5.1)成为

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i}=\omega_i^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{1.5.3}$$

由元素 ω_i^j 组成的方阵 ω，称为联络方阵，它依赖于标架场的选取. 设(W, y^i)是 M 的另一局部坐标系，可以证明，在 $U\cap W\neq\varnothing$ 时，有

$$\omega'^j_i=\mathrm{d}\left(\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\right)\frac{\partial y^j}{\partial x^p}+\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\omega_p^q,$$

$$\Gamma'^j_{ik}=\Gamma_{pr}^q\frac{\partial y^j}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial y^i}\frac{\partial x^r}{\partial y^k}+\frac{\partial^2 x^p}{\partial y^i\partial y^k}\frac{\partial y^j}{\partial x^p}, \tag{1.5.4}$$

其中 $\omega'^j_i=\Gamma'^j_{ik}\mathrm{d}y^k$. 式(1.5.4)说明 Γ_{ik}^j不是 M 上的张量场，所以联络系数在一点为零并不具有不变性. 即，有可能存在使联络系数在一点为零的坐标系.

定义 $\Omega=\mathrm{d}\omega-\omega\wedge\omega$ 叫做联络 ∇ 在 U 上的曲率方阵.

因 $\mathrm{d}\omega_i^j-\omega_i^h\wedge\omega_h^j=$

$$\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial x^l}\mathrm{d}x^l\wedge\mathrm{d}x^k-\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j\mathrm{d}x^l\wedge\mathrm{d}x^k=$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial x^l}+\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j-\Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j\right)\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^l, \tag{1.5.5}$$

故
$$\Omega_i^j=\frac{1}{2}R_{ikl}^j\mathrm{d}x^k\wedge\mathrm{d}x^l, \tag{1.5.6}$$

其中
$$R_{ikl}^j=\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial x^l}+\Gamma_{il}^h\Gamma_{hk}^j-\Gamma_{ik}^h\Gamma_{hl}^j. \tag{1.5.7}$$

易证 R_{ikl}^j在坐标变换时遵从(1，3)型张量的分量变换规律. 因此

$$R = R^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l \tag{1.5.8}$$

不依赖于局部坐标的选取，称为仿射联络∇的曲率张量.

联络系数Γ^i_{jk}不适合张量的变换规律，但若记

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}, \tag{1.5.9}$$

则由(1.5.4)式得

$$T'^i_{jk} = T^q_{pr}\frac{\partial y^i}{\partial x^q}\frac{\partial x^p}{\partial y^j}\frac{\partial x^r}{\partial y^k}, \tag{1.5.10}$$

所以
$$T = T^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^k \tag{1.5.11}$$

是(1，2)型张量场，称为仿射联络∇的挠率张量. 由(1.5.9)式可知，挠率张量T的分量关于下指标是反对称的，即$T^i_{jk} = -T^i_{kj}$.

定义 若仿射联络∇的挠率张量是零，则称该联络是无挠的.

无挠仿射联络总是存在的.

我们定义矢量场的绝对微分. 设X是M上的光滑矢量场，它用局部坐标表示是

$$X = u^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

根据定义，有

$$\nabla X = (du^i + u^j\omega^i_j)\otimes\frac{\partial}{\partial x^i} =$$

$$u^i_{,j}dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{1.5.12}$$

其中
$$u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^k\Gamma^i_{kj}. \tag{1.5.13}$$

我们称∇X为X的绝对微分.(1.5.13)式正是经典意义下逆变矢量关于x^j求协变导数的公式. 关于协变矢量及(r, s)型张量的绝对微分公式见第二章.

定义 设$C: x^i = x^i(t)$是流形M上一条参数曲线，$X(t)$是定义在C上的切矢量场，表成

$$X(t) = X^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}. \tag{1.5.14}$$

称 $X(t)$ 沿曲线 C 是平行的，如果它沿曲线 C 的绝对微分为零，即

$$\frac{\nabla X}{\mathrm{d}t}=0. \tag{1.5.15}$$

若曲线 C 的切矢量沿 C 自身是平行的，则称 C 是自平行曲线或测地线(短程线).

方程(1.5.16)等价于一阶线性常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}+X^j\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0, \tag{1.5.16}$$

因此在曲线 C 上任意一点给定一个切矢量 X，则它在 C 上产生一个平行的切矢量场，这个切矢量场称为 X 沿曲线 C 的平行移动.

如果 C 是测地线，则 C 的切矢量

$$X(t)=\frac{\mathrm{d}x^i(t)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$$

沿曲线 C 是平行的，所以测地线 C 应满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}=0. \tag{1.5.17}$$

这是二阶常微分方程组，所以过流形 M 上任意一点恰有一条测地线在该点与任意给定的已知切矢量相切.

2. 黎曼流形

定义 若在 m 维光滑流形 M 上给定一个正定的、对称的光滑二阶协变张量场 G，即对任何 $X, Y, Z\in T_p(M)$，C^∞ 二阶协变张量场 G 满足：

(1) $G(X, X)\geqslant 0$，且 $G(X, X)=0\Leftrightarrow X=0$； (正定性)

(2) $G(X, Y)=G(Y, X)$. (对称性)

则称 M 是黎曼(Riemann)流形，G 称为黎曼流形 M 的基本张量或度量张量.

在局部坐标系 (U, x^i) 下，G 可表示为

$$G=g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j, \tag{1.5.18}$$

其中 $g_{ij}=g_{ji}$ 是 U 上的 C^∞ 函数. 设 $X, Y\in T_p(M)$，$X=X^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，

$Y=Y^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$，则 X 与 Y 的内积定义为：

$$X\cdot Y=G(X,Y)=g_{ij}X^iY^j. \tag{1.5.19}$$

切矢量的长度、同一点的两个切矢量的夹角此时都有意义：

$$|X|=\sqrt{g_{ij}X^iY^j}, \tag{1.5.20}$$

$$\cos\angle(X,Y)=\frac{X\cdot Y}{|X|\cdot|Y|}, \tag{1.5.21}$$

故黎曼流形实际上就是在每一点的切空间上指定了正定内积的微分流形，并且要求从一点到另一点变化时内积是光滑的，即：若 $X,Y\in\Gamma(T(M))$，则 $X\cdot Y\in C^\infty(M)$. 因此黎曼流形是欧氏空间的推广.

二次微分式

$$ds^2=g_{ij}dx^idx^j \tag{1.5.22}$$

称为度量形式或黎曼度量，它与局部坐标系 x^i 的选取无关. ds 恰是无穷小切矢量的长度，称为弧长元素. 设 $C: x^i=x^i(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 是 M 上一条连续的分段光滑曲线，则 C 的弧长定义为

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt}}dt. \tag{1.5.23}$$

可以证明，在 m 维光滑流形 M 上必有黎曼度量.

定义 设 (M,G) 是 m 维黎曼流形，∇ 是 M 上的仿射联络. 如果*

$$\nabla G=0, \tag{1.5.24}$$

则称 ∇ 是黎曼流形 (M,G) 的容许联络.

---

* 切丛上的仿射联络在对偶丛上诱导出一个联络(仍记作 ∇)，其定义为

$$d\langle X,\alpha\rangle=\langle\nabla X,\alpha\rangle+\langle X,\nabla\alpha\rangle,$$

其中 $X\in\Gamma(T(M))$，$\alpha\in\Gamma(T^*(M))$.

设 $\{\partial/\partial x^i\}$ 是切丛的局部标架场，对偶局部标架场是 $\{dx^i\}$，则由上述定义可推得

$$\nabla(dx^j)=-\omega_i^j\otimes dx^i.$$

设 α_1、$\alpha_2\in\Gamma(T^*(M))$，命

$$\nabla(\alpha_1\otimes\alpha_2)=\nabla\alpha_1\otimes\alpha_2+\alpha_1\otimes\nabla\alpha_2,$$

则在二阶协变张量丛上确定了一个联络，称为在其上的诱导联络.

设联络∇在局部坐标系 x^i 下的联络矩阵是 $\omega=(\omega_i^j)$，则

$$\nabla G=(\mathrm{d}g_{ij}-\omega_i^k g_{kj}-\omega_j^k g_{ik})\otimes\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j, \tag{1.5.25}$$

所以(1.5.20)式等价于

$$\mathrm{d}g_{ij}=\omega_i^k g_{kj}+\omega_j^k g_{ik}, \tag{1.5.26}$$

或用矩阵记成

$$\mathrm{d}G=\omega\cdot G+G\cdot {}^t\omega, \tag{1.5.27}$$

其中

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}, \tag{1.5.28}$$

$$\omega=\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \cdots & \omega_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_m^1 & \cdots & \omega_m^m \end{pmatrix}. \tag{1.5.29}$$

容许联络表示度规张量关于该联络是平行的，它的几何意义是平行移动时保持内积不变.

定理(黎曼几何的基本定理)　设 M 是 m 维黎曼流形，则在 M 上存在唯一的无挠容许联络. 该联络称为黎曼流形 M 的 Levi-Civita 联络，或黎曼联络.

证明(唯一性)　设∇是 M 上的 Levi-Civita 联络，在局部坐标 x^i 下联络矩阵为 $\omega=(\omega_i^j)$，则有

$$\mathrm{d}g_{ij}=\omega_i^k g_{kj}+\omega_j^k g_{ki}, \tag{1.5.30}$$

$$\Gamma_{ik}^j=\Gamma_{ki}^j. \tag{1.5.31}$$

令 $$\Gamma_{ijk}=g_{lj}\Gamma_{ik}^l,\ \omega_{ik}=g_{lk}\omega_i^l, \tag{1.5.32}$$

则由(1.5.30)和(1.5.31)得到

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik}, \tag{1.5.33}$$

$$\Gamma_{ijk}=\Gamma_{kji}. \tag{1.5.34}$$

轮换(1.5.33)的指标，得

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=\Gamma_{ikj}+\Gamma_{kij}, \tag{1.5.35}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}=\Gamma_{jki}+\Gamma_{kji}. \tag{1.5.36}$$

由(1.5.35)+(1.5.36)−(1.5.33)，并利用(1.5.34)，得

$$\Gamma_{ikj}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{1.5.37}$$

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{jl}}{\partial_{x^i}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{1.5.38}$$

可见，Levi-Civita 联络由度量张量唯一确定.

(存在性)反之，由(1.5.38)定义的 Γ_{ij}^k 在局部坐标变换时满足联络系数变换公式，故它们在 M 上定义了一个仿射联络 ∇，且由计算可知如此定义的 Γ_{ij}^k 满足(1.5.33)和(1.5.34)，故 ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络.

§1.6 李 导 数

现在我们换一个角度来考虑光滑流形 M 上的矢量场.

定义 设 M 是 m 维光滑流形. 若有光滑映射 $\varphi: R\times M\to M$，对任意的 $(t,p)\in R\times M$，记

$$\varphi_t(p)=\varphi(t,\ p),$$

它们满足下列条件：

(1) $\varphi_0(p)=p$；

(2) 对任意的实数 s,t， $\varphi_s\circ\varphi_t=\varphi_{s+t}$，

则称 φ_t 是作用在 M 上的单参数可微变换群.

显然，φ_t 是 M 到自身的可微同胚，设 $p\in M$，令

$$\gamma_p(t)=\varphi_t(p),$$

则 γ_p 是 M 上通过点 p 的一条参数曲线，叫单参数变换群 φ_t 过点 p 的轨线.

若用 X_p 表示轨线 γ_p 在点 p(即 $t=0$)的切矢量

$$X_p=\sum_{i=1}^m\frac{\mathrm{d}x^i(\varphi_t(p))}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

因为 φ 是光滑的，所以映射 $p\to X_p$ 定义了 M 上的一个光滑切矢

量场 X，它称为单参数可微变换群 φ_t 在 M 上诱导的切矢量场. 轨线 γ_p 是切矢量场的积分曲线.

反之，若在 M 上给定一个光滑的切矢量场 X，是否存在 M 的单参数可微变换群 φ_t，使 X 是 φ_t 所诱导的切矢量场？下述定理回答这个问题.

定理 设 X 是定义在 M 上的光滑切矢量场，则在任意一点 $p\in M$ 存在一个邻域 U 和作用在 U 上的局部单参数变换群 φ_t，$|t|<\varepsilon$，使得 $X|_U$ 恰是 φ_t 在 U 上所诱导的切矢量场.

用切矢量场的这个变换的观点，下面的定理给出 $[X, Y]$ 的几何解释.

定理 设 X，Y 是流形 M 上任意两个光滑切矢量场. 若 X 生成的局部单参数变换群是 φ_t，则

$$[X, Y]=\lim_{t\to 0}\frac{Y-(\varphi_t)_*Y}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^{-1})_*Y-Y}{t}.$$

设 γ_p 是单参数可微变换群 φ_t 的过 p 点的轨线. 因为 φ_t^{-1} 把 γ_p 上的点 $q=\gamma_p(t)=\varphi_t(p)$ 映到点 p，因此 $(\varphi_t^{-1})_*$ 建立了切空间 $T_q(M)$ 到 $T_p(M)$ 的同构. 若 Y 是流形 M 的定义在轨线 γ_p 上的切矢量场，则 $(\varphi_t^{-1})_*Y_{\varphi_t(p)}$ 是切空间 $T_p(M)$ 中的一条曲线. 上述定理说明，$[X, Y]_p$ 正是这条曲线在 $t=0$ 处的切矢量，所以它是切矢量场 Y 沿 X 的轨线的变化率. 通常把算子 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(\varphi_t^{-1})_*Y-Y}{t}$ 称为矢量场 Y 关于 X 的李导数，记作 L_XY. 于是定理可写成

$$L_XY=[X, Y].$$

李导数的概念可以推广到 M 上任意的张量场. 实际上，映射 $(\varphi_t)^*$ 建立了余切空间 $T_q^*(M)$ 到 $T_p^*(M)$ 的同构，它和 $(\varphi_t^{-1})_*$ 一起在张量空间之间可定义如下的同构 $\Phi_t:T_s^r(\varphi_t(p))\longrightarrow T_s^r(p)$，使得对任意的 X_1，…，$X_r\in T_{\varphi_t(p)}(M)$，及 α_1，…，$\alpha^s\in T_{\varphi_t(p)}^*(M)$，有

$$\Phi_t(X_1\otimes\cdots\otimes X_r\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_s)=$$
$$(\varphi_t^{-1})_*X_1\otimes\cdots\otimes(\varphi_t^{-1})_*X_r\otimes\varphi_t^*\alpha_1\otimes\cdots\otimes\varphi_t^*\alpha^s.$$

这样，(r, s) 型张量场 η 关于 X 的李导数 $L_X\eta$ 定义为

$$L_X\eta=\lim_{t\to 0}\frac{\Phi_t(\eta)-\eta}{t}.$$

显然，$L_X\eta$ 仍是(r, s)型张量场.

数量场 f 关于切矢量场 X 的李导数 L_xf 规定为 f 关于 X 的方向导数，即

$$L_Xf=Xf.$$

在局部坐标系下，L_xY 可写作

$$L_XY=[X, Y]=\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}=$$

$$(X^jY^i_{,j}-Y^jX^i_{,j})\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

由上式及数量场李导数的定义和莱布尼兹规则可确定对偶矢量场 $\omega=\omega_i\mathrm{d}x^i$ 的李导数：

$$L_X(\omega_iY^i)=X(\omega_iY^i)=X^j(\omega_iY^i)_{,j}=$$

$$X^jY^i\omega_{i,j}+x^j\omega_iY^i_{,j};$$

另一方面，

$$L_X(\omega_iY^i)=Y^iL_X\omega_i+\omega_i[X, Y]^i,$$

比较以上二式，得

$$L_X\omega_i=X^j\omega_{i,j}+\omega_jX^j_{,i}.$$

类似地，可得到度量张量 g_{ij}关于 X 的李导数，

$$L_Xg_{ij}=X_{i,j}+X_{j,i},$$

其中 $X_i=g_{ki}X^k$.

当矢量场 ξ 的生成局部变换群是等距变换群时，则 ξ 称为 Killing 矢量场. 由上述可知，ξ 是 Killing 场的充要条件是它满足 Killing 方程

$$\xi_{i,j}+\xi_{j,i}=0.$$

2 张量分析

§2.1 坐标变换

在 Minkowski 空-时中，一组坐标确定一个四维矢量．两个坐标系之间的变换为 Lorentz 变换．在一般的 Riemann 空-时中，任何四个独立的变量 $x^\mu(\mu=0, 1, 2, 3)$都可取作这一四维空-时中的坐标．与 Minkowski 空-时不同，黎曼空-时中的一组坐标不能确定一个四维矢量，只能确定 Riemann 空-时中的一个点．

设坐标系 x^μ 和坐标系 x'^μ 之间存在着下面的变换式

$$x'^\mu=x'^\mu(x^\nu), \tag{2.1.1}$$

只要 Jacobian

$$J(x'^\mu/x^\nu)\neq 0, \tag{2.1.2}$$

四个函数 $x'^\mu=x'^\mu(x^\nu)$就是独立的，且存在逆变换

$$x^\mu=x^\mu(x'^\nu). \tag{2.1.3}$$

在 Riemann 空-时中任一点，引入坐标系(x^μ)和(x'^μ)，在坐标系(x^μ)中可以确定一个矢量 dx^μ．设同一矢量在另一坐标系(x'^μ)中表示为 dx'^μ，而两坐标系之间的变换为(2.1.1)～(2.1.3)．此时有

$$dx'^\mu=\alpha_\nu^{\mu'}dx^\nu,\ \alpha_\nu^{\mu'}\equiv\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}, \tag{2.1.4a}$$

$$dx^\mu=\alpha_{\nu'}^{\mu},\ dx'^\nu,\ \alpha_{\nu'}^{\mu}\equiv\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \tag{2.1.4b}$$

按爱因斯坦惯例，$A_\mu B^\mu\equiv\sum\limits_\mu A_\mu B^\mu$，省略取和号 Σ．如无特

殊声明，希腊字母取值 0，1，2，3；拉丁字母取值 1，2，3.

由(2.1.4)可得

$$dx^{\alpha}=\alpha^{\alpha}_{\mu'},\ \alpha^{\mu'}_{\beta}dx^{\beta},$$

故
$$\alpha^{\alpha}_{\mu'}\alpha^{\mu'}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta};\tag{2.1.5a}$$

同样可得 $\alpha^{\mu'}_{\alpha}\alpha^{\alpha}_{\nu'}=\delta^{\mu'}_{\nu'}$. (2.1.5b)

式中 δ^{α}_{β} 是 Kronecker 符号. 如果把 $\alpha^{\mu'}_{\nu}$ 看做矩阵，则 $\alpha^{\nu}_{\mu'}$ 就是它的逆矩阵. 因此，变换的 Jacobian 满足

$$|\alpha|\cdot|\alpha'|=1.\tag{2.1.6}$$

1. 逆变矢量

如有四个函数 A^{μ} 的集合，在坐标变换下 A^{μ} 和 dx^{μ} 一样变换

$$A'^{\mu}=\alpha^{\mu'}_{\nu}A^{\nu},\tag{2.1.7}$$

则集合 A^{μ} 称为**逆变矢量**，A^{μ} 和 A'^{μ} 分别称为逆变矢量在两个坐标系中的分量.

2. 标量

如果量 $\phi(x^{\mu})$在坐标变换下按下式变换：

$$\phi(x^{\mu})=\phi'(x'^{\nu}),\tag{2.1.8}$$

则量 $\phi(x^{\mu})$称为**标量**，或**不变量**. 由上式可得

$$\frac{\partial\phi'}{\partial x'^{\mu}}=\alpha^{\nu}_{\mu'}\frac{\partial\phi}{\partial x^{\nu}}.\tag{2.1.9}$$

3. 协变矢量

由(2.1.9)可知，算符$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$的变换规律为

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}=\alpha^{\nu}_{\mu'}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}},\tag{2.1.10}$$

如果有四个函数 A_{μ} 的集合，在坐标变换下 A_{μ} 按(2.1.10)式变换：

$$A'_{\mu}=\alpha^{\nu}_{\mu'}A_{\nu},\tag{2.1.11}$$

则集合 A_{μ} 称为**协变矢量**. A_{μ} 和 A'_{ν} 分别称为在两个坐标系中协变矢量的分量. 显然，标量函数的梯度 $\partial\phi/\partial x^{\mu}$ 是协变矢量.

§2.2 张　　量

如果有16个函数的集合$T_{\mu\nu}$和$T^{\mu\nu}$在坐标变换下按下式变换：

$$T'_{\alpha\beta}=\alpha_\alpha^\mu\alpha_\beta^\nu T_{\mu\nu},\quad T'^{\alpha\beta}=\alpha_\mu^{\alpha\prime}\alpha_\nu^{\beta\prime}T^{\mu\nu},\tag{2.2.1}$$

则称集合$T_{\mu\nu}$为**二阶协变张量**，$T^{\mu\nu}$为**二阶逆变张量**.

类似地，如果有16个函数T_μ^ν组成的集合，T_μ^ν在坐标变换下按下式变换：

$$T'^\alpha_\beta=\alpha_\nu^{\alpha\prime}\alpha_\beta^\mu T_\mu^\nu,\tag{2.2.2}$$

则称集合T_μ^ν为**二阶混合张量**. 混合张量T_μ^ν是一阶协变一阶逆变的. 高阶张量的定义可由上面的定义推广得到. 如果有一组函数$T_{\mu\nu\cdots}^{\tau\lambda\cdots}$组成的集合，$T_{\mu\nu\cdots}^{\tau\lambda\cdots}$按下式变换：

$$T'^{\gamma\delta\cdots}_{\alpha\beta\cdots}=\alpha^{\gamma\prime}{}_\tau\alpha^{\delta\prime}{}_\lambda\cdots\alpha_\alpha^\mu\alpha_\beta^\nu\cdots T_{\mu\nu\cdots}^{\tau\lambda\cdots},\tag{2.2.3}$$

则称集合$T_{\mu\nu\cdots}^{\tau\lambda\cdots}$为$(m+n)$阶张量，其中$m$阶逆变和$n$阶协变. 这一张量具有$4^{m+n}$个分量.

1. 张量代数

对张量所施加的运算分为代数运算和微分运算，相应的两部分数学内容分别称为张量代数和张量分析. 这里先讨论张量代数.

(1) 同类张量的线性组合，在同一点确定一个新的同类张量. 例如，如果$A_{\alpha\beta}$和$B_{\alpha\beta}$是两个二阶协变张量，则它们的线性组合确定一个新的二阶协变张量：

$$T_{\alpha\beta}=aA_{\alpha\beta}+bB_{\alpha\beta}.\tag{2.2.4}$$

式中a和b是两个标量. 很容易证明$T_{\alpha\beta}$为二阶协变张量：

$$T'_{\alpha\beta}=aA'_{\alpha\beta}+bB'_{\alpha\beta}=$$

$$a\alpha_\alpha^\mu\alpha_\beta^\nu A_{\mu\nu}+b\alpha_\alpha^\mu\alpha_\beta^\nu B_{\mu\nu}=\alpha_\alpha^\mu\alpha_\beta^\nu T_{\mu\nu}.$$

对于任意阶张量均可类似地证明.

(2) 一个m阶张量和一个n阶张量的并积，在同一点产生一个新的$(m+n)$阶张量. 例如，一个二阶协变张量和一个逆变矢量的并积产生一个新的张量：

$$T^{\gamma}_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}B^{\gamma} \tag{2.2.5}$$

在坐标变换下有

$$T'^{\gamma}_{\alpha\beta}=A'_{\alpha\beta}B'^{\gamma}=a^{\mu}_{\alpha'}a^{\nu}_{\beta'}A_{\mu\nu}a^{\gamma'}{}_{\rho}B^{\rho}=a^{\mu}_{\alpha'}a^{\nu}_{\beta'}a^{\gamma'}{}_{\rho}T^{\rho}_{\mu\nu},$$

因此，$T^{\gamma}_{\alpha\beta}$为三阶混合张量.

(3) 一个 n 阶混合张量进行缩并(contraction)，可以产生一个新的$(n-2)$阶张量. 所谓缩并，即一个协变指标和一个逆变指标按四个值取和. 例如，一个四阶混合张量缩并后产生一个新的张量：

$$T_{\alpha\beta}=T^{\mu}_{\alpha\mu\beta}, \tag{2.2.6}$$

由于在坐标变换下有

$$T'_{\alpha\beta}=T'^{\mu}_{\alpha\mu\beta}=a^{\mu'}_{\rho}a^{\gamma}_{\alpha'}a^{\sigma}_{\mu'}a^{\delta}_{\beta'}T^{\rho}_{\gamma\sigma\delta}=\delta^{\sigma}_{\rho}a^{\gamma}_{\alpha'}a^{\delta}_{\beta'}T^{\rho}_{\gamma\sigma\delta}=a^{\gamma}_{\alpha'}a^{\delta}_{\beta'}T_{\gamma\delta},$$

因此，$T_{\alpha\beta}$是二阶协变张量.

二阶混合张量 T^{α}_{β} 缩并后得到的标量 T^{α}_{α} 称为张量 T^{α}_{β} 的迹(trace)，一个逆变矢量 A^{α} 和一个协变矢量 B_{β} 的并积，缩并后得到的标量 $A^{\alpha}B_{\alpha}$ 称为二矢量的标量积. $A^{\alpha}B_{\alpha}$ 是标量，这一点可直接证明：

$$A'^{\alpha}B'_{\alpha}=a^{\alpha'}_{\mu}a^{\nu}_{\alpha'}A^{\mu}B_{\nu}=\delta^{\nu}_{\mu}A^{\mu}B_{\nu}=A^{\mu}B_{\mu}, \tag{2.2.7}$$

反之，如果知道量 $A^{\mu}B_{\mu}$ 是标量，且知道其中一个(如 A^{μ})是矢量，则可断定另一个(B_{μ})为矢量.

Kronecker 符号 δ^{α}_{β} 在弯曲空-时中和在平直空-时中一样定义：

$$\delta^{\alpha}_{\beta}=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta;\\ 1, & \alpha=\beta.\end{cases} \tag{2.2.8}$$

Kronecker 符号可以作为一个混合张量的分量. 而且在坐标变换下保持不变：

$$\delta'^{\alpha}_{\beta}=a^{\alpha'}_{\mu}a^{\nu}_{\beta'}\delta^{\mu}_{\nu}=\delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{2.2.9}$$

2. 张量的对称性

张量的对称性和反对称性是张量的重要性质. 如果交换张量的两个协变指标(或两个逆变指标)时张量的数值不变，则称这个张量对这两个指标是对称的. 如果交换上述两个指标时张量的值

改变正负号，则称这个张量对这两个指标是**反对称的**.

张量的对称性在坐标变换下是不变的. 设在坐标系 x^μ 中有

$$T^{\cdots}_{\alpha\cdot\beta\cdots}=T^{\cdots}_{\beta\cdot\alpha\cdots}, \tag{2.2.10}$$

$$A^{\cdots}_{\alpha\cdot\beta\cdots}=-A^{\cdots}_{\beta\cdot\alpha\cdots}, \tag{2.2.11}$$

则在坐标系 x'^μ 中有

$$T'^{\cdots}_{\mu\cdot\nu\cdots}=T'^{\cdots}_{\nu\cdot\mu\cdots}, \tag{2.2.12}$$

$$A'^{\cdots}_{\mu\cdot\nu\cdots}=-A'^{\cdots}_{\nu\cdot\mu\cdots}.$$

对于两个逆变指标的对称性，与此类似.

任何一个二阶协变张量均可写成一个对称部分和一个反对称部分之和：

$$T_{\alpha\beta}=T_{(\alpha\beta)}+T_{[\alpha\beta]}.$$

式中
$$T_{(\alpha\beta)}\equiv\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}+T_{\beta\alpha}), \tag{2.2.13}$$

$$T_{[\alpha\beta]}\equiv\frac{1}{2}(T_{\alpha\beta}-T_{\beta\alpha}). \tag{2.2.14}$$

二阶逆变张量的情况与此类似. 对二阶张量的对称性和反对称性的讨论可以推广到高阶张量. 例如，由三阶张量 $T_{\alpha\beta\gamma}$可以构成一个全对称张量：

$$T_{(\alpha\beta\gamma)}\equiv\frac{1}{3!}(T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\beta\gamma\alpha}+T_{\gamma\alpha\beta}+T_{\beta\alpha\gamma}+T_{\alpha\gamma\beta}+T_{\gamma\beta\alpha}). \tag{2.2.15}$$

这一张量 $T_{(\alpha\beta\gamma)}$对于任意两个指标都是对称的. 同时，还可构成一个全反对称张量：

$$T_{[\alpha\beta\gamma]}\equiv\frac{1}{3!}(T_{\alpha\beta\gamma}+T_{\beta\gamma\alpha}+T_{\gamma\alpha\beta}-T_{\beta\alpha\gamma}-T_{\alpha\gamma\beta}-T_{\gamma\beta\alpha}). \tag{2.2.16}$$

张量 $T_{[\alpha\beta\gamma]}$对于任何两个指标都是反对称的. 逆变张量的情况与此类似.

如果张量 $S_{\alpha\beta\gamma}$是全对称的，则有

$$S_{(\alpha\beta\gamma)}=S_{\alpha\beta\gamma}, \tag{2.2.17}$$

如果张量 $A_{\alpha\beta\gamma}$是全反对称的，则有

$$A_{[\alpha\beta\gamma]}=A_{\alpha\beta\gamma}. \tag{2.2.18}$$

上面由已知三阶张量构成全对称张量和全反对称张量的方法可以推广到高阶张量．对于高于4阶的张量，按上述方法构成的全反对称张量恒等于零．因此，全反对称张量的最高阶数是四．以 $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$表示4阶全反对称张量，它的不等于零的分量都是由 A_{0123}将其脚标重新排列构成的，这就是说，$A_{\alpha\beta\gamma\delta}$的所有不等于零的分量只能等于 A_{0123}或者 $-A_{0123}$．4阶全反对称张量只有一个独立分量，好像一个标量．这样的张量常称为**赝标量**．

三阶全反对称张量 $A_{\alpha\beta\gamma}$只有4个独立分量：A_{023}、A_{031}、A_{012}、A_{123}，好像一个矢量，这样的张量常称为**赝矢量**．

3．度规张量

微分几何中一个基本概念是流形，一群元素组成的集合，如果集合中每一元素可以和 n 个连续可微函数一一对应，则此集合构成一个 n 维微分流形．如果在流形中定义一个不变量（长度或度规）：

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \tag{2.2.19}$$

则流形便成为度量空间．此空间称为 Riemann 空间．$g_{\mu\nu}$称为**度规张量**．我们可以把 $g_{\mu\nu}$写成对称部分和反对称部分之和：

$$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}^{(s)}+g_{\mu\nu}^{(A)},$$

其中 $\quad g_{\mu\nu}^{(s)}=g_{\nu\mu}^{(s)},\ g_{\mu\nu}^{(A)}=-g_{\nu\mu}^{(A)}.$

于是有 $\quad ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=g_{\mu\nu}^{(s)}dx^\mu dx^\nu.$

其中 $g_{\mu\nu}^{(A)}$对 ds^2 无贡献．因此，对于 Riemann 几何总可认为 $g_{\mu\nu}$是对称的．

不难证明 $g_{\mu\nu}$是一个二阶协变张量，由(2.2.19)有

$$g'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

而 $\quad dx^\mu=\alpha^\mu_\rho dx'^\rho,\ dx^\nu=\alpha^\nu_\sigma dx'^\sigma,$

于是得到 $g'_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu=g_{\mu\nu}\alpha^\mu_\rho\alpha^\nu_\sigma dx'^\rho dx'^\sigma=g_{\rho\sigma}\alpha^\rho_\mu\alpha^\sigma_\nu dx'^\mu dx'^\nu.$

所以 $\quad g'_{\mu\nu}=\alpha^\rho_\mu\alpha^\sigma_\nu g_{\rho\sigma},$

即 $g_{\mu\nu}$为二阶协变张量．

由于 $g\neq0$，所以矩阵 $g_{\mu\nu}$的逆一定存在，我们定义 $g_{\mu\nu}$为 $g_{\mu\nu}$的

逆：

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\tau}\equiv\delta^{\mu}_{\tau}\equiv g^{\mu}_{\tau},\tag{2.2.20}$$

或者 $$g^{\mu\nu}\equiv\frac{\Delta^{\mu\nu}}{g}\equiv g^{\nu\mu}.$$

式中 $\Delta^{\mu\nu}$是元素 $g_{\mu\nu}$的余子式. 容易证明，$g^{\mu\nu}$为二阶逆变张量. 令 $A_{\mu}=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\nu}$，则有

$$A_{\mu}g^{\mu\lambda}=g_{\mu\nu}g^{\mu\lambda}\mathrm{d}x^{\nu}=\delta^{\lambda}_{\nu}\mathrm{d}x^{\nu}=\mathrm{d}x^{\lambda},$$

类似地有 $A'_{\tau}g'^{\tau\lambda}=\mathrm{d}x'^{\lambda}$.

又因为 $A'_{\tau}=\alpha^{\mu}_{\tau'}A_{\mu}$，$\mathrm{d}x'^{\lambda}=\alpha^{\lambda'}_{\nu}\mathrm{d}x^{\nu}=\alpha^{\lambda'}_{\nu}g^{\mu\nu}A_{\mu}$，

于是有 $\alpha^{\mu'}_{\tau}g'^{\tau\lambda}A_{\mu}=\alpha^{\lambda'}_{\nu}g^{\mu\nu}A_{\mu}$，

由 A_{μ} 的任意性得

$$\alpha^{\mu}_{\tau'}g'^{\tau\lambda}=\alpha^{\lambda'}_{\nu}g^{\mu\nu},$$

即 $$g'^{\tau\lambda}=\alpha^{\tau'}_{\mu}\alpha^{\lambda'}_{\nu}g^{\mu\nu},$$

所以 $g^{\mu\nu}$是二阶逆变张量.

根据(2.2.20)，可以用度规张量来升(降)任一张量的指标：

$$T^{\nu}_{\rho}g^{\rho\mu}=T^{\nu\mu},\ T^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}=T^{\alpha}_{\mu},$$

因此，两个矢量的标量积可表示为

$$A_{\alpha}B^{\alpha}=g_{\alpha\beta}A^{\alpha}B^{\beta}.$$

4. 纯空间度规

在 Minkowski 空间中，两事件间的空间距离(长度)通常表示为

$$\mathrm{d}l^{2}=\mathrm{d}X^{1^{2}}+\mathrm{d}X^{2^{2}}+\mathrm{d}X^{3^{2}}\equiv\mathrm{d}X^{i}\mathrm{d}X^{i}.\tag{2.2.21}$$

X^{i} 为一直角坐标的空间分量. 在弯曲空间中，取坐标系 x^{μ}，度规为 $g_{\mu\nu}$，二事件的纯空间距离(长度)也只能用同样方法定义，这样才具有测量的意义. 即在给定点建立一个局部洛伦兹系 X^{μ}，使 X^{0} 平行于 x^{0}，于是有

$$\frac{\partial X^{i}}{\partial x^{0}}=0,\quad \frac{\partial X^{0}}{\partial x^{0}}\neq0,$$

对于两个事件，按(2.2.21)定义纯空间距离：

$$\mathrm{d}l^{2}=\mathrm{d}X^{i}\mathrm{d}X^{i}=\frac{\partial X^{i}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial X^{i}}{\partial x^{\nu}}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}.\tag{2.2.22}$$

由度规张量的变换式 $g_{\mu\nu}=\frac{\partial X^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial X^{\beta}}{\partial x^{\nu}}\eta_{\alpha\beta}$（$\eta_{\alpha\beta}$ 为 Minkowski 度规张量）得到

$$g_{jk}=\frac{\partial X^0}{\partial x^j}\frac{\partial X^0}{\partial x^k}-\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\frac{\partial X^i}{\partial x^k},$$

$$g_{00}=\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\frac{\partial X^0}{\partial x^0},\ g_{0j}=\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\frac{\partial X^0}{\partial x^j}.$$

将上式代入(2.2.22)，得到

$$dl^2=\gamma_{jk}dx^j dx^k. \tag{2.2.23}$$

式中
$$\gamma_{jk}\equiv\frac{g_{0j}g_{0k}}{g_{00}}-g_{ik}, \tag{2.2.24}$$

称为**纯空间度规**.

5. 空-时坐标分离定理

自惯性系 $X^{\mu}=(cT, X^i)$ 变换至任意坐标系 $x^{\mu}=x^{\mu}(X^{\nu})$，设 Jacobian 不为零. 欲使坐标 x^{μ} 中的 x^0 表示时间坐标，x^i 表示空间坐标，其充分且必要条件是

$$g_{00}>0,\ \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix}<0,$$

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}>0,\ g<0. \tag{2.2.25}$$

证明 由(2.2.23)，根据高等数学中二次型 $dl^2=\gamma_{ij}dx^i dx^j$ 正定的充要条件，直接得到

$$\gamma_{11}>0,\ \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix}>0. \tag{2.2.26}$$

将此式代入(2.2.24)，便得到(2.2.25)中的后三个不等式. 为了证明 $g_{00}>0$，我们考虑 $x^{\mu}=x^{\mu}(X^{\nu})$ 系中一个空间固定点 $P(x^i=\text{const})$，对惯性系 X^{μ} 的速度 v^i，注意到 $dx^i=0$，有

$$v^i=\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}T}=c\,\frac{\partial X^i}{\partial x^0}\Big/\frac{\partial X^0}{\partial x^0},$$

而
$$1>\frac{v^iv^i}{c^2}=\frac{\partial X^i}{\partial x^0}\,\frac{\partial X^i}{\partial x^0}\Big/\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\,\frac{\partial X^0}{\partial x^0};$$

代入度规张量的变换式，注意到 $\mathrm{d}x^i=0$，得到

$$g_{00}=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^0}\,\frac{\partial X^\beta}{\partial x^0}\eta_{\alpha\beta}=\frac{\partial X^0}{\partial x^0}\,\frac{\partial X^0}{\partial x^0}-\frac{\partial X^i}{\partial x^0}\,\frac{\partial X^i}{\partial x^0}>0.$$

式中 $\eta_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$，是闵可夫斯基(Minkowski)空间的度规张量.

当 $g_{i0}=0$(时间轴与空间轴正交)时，由(2.2.26)可得

$$g_{ii}<0,\quad \begin{vmatrix} g_{ii} & g_{ik}\\ g_{ki} & g_{kk}\end{vmatrix}>0,$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{vmatrix}<0.$$

至此，定理已证完.

在闵可夫斯基空间中，间隔可写为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x^{0^2}-\mathrm{d}x^{1^2}-\mathrm{d}x^{2^2}-\mathrm{d}x^{3^2},$$

度规张量

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1\end{pmatrix}.$$

此时我们说度规的符号为(+,−,−,−)，或者说号差为(−2). 黎曼空间度规是闵可夫斯基空间度规的推广，仍可类似地选取度规张量的符号，即(+，−，−，−)，或者号差为(−2). 按照 $\mathrm{d}s^2$ 的符号，可把间隔分为三类：

$\mathrm{d}s^2>0$　类时间隔，

$\mathrm{d}s^2=0$　零间隔，

$ds^2<0$ 类空间隔.

§2.3 张量密度

如果一个集合 $\mathscr{A}^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ 在坐标变换(2.1.1)下按下式变换

$$\mathscr{A}'^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}=\tilde{\alpha}^{w}\alpha^{\mu'}_{\beta}\cdots\alpha^{\alpha}_{\nu'}\cdots\mathscr{A}^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots},\tag{2.3.1}$$

则集合 $\mathscr{A}^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$ 叫作张量密度，式中 $\tilde{\alpha}$ 为坐标变换的雅可比行列式：

$$\tilde{\alpha}=J\left(\frac{x^{\mu}}{x'^{\nu}}\right)=\det\alpha^{\mu}_{\nu'},$$

w 是一个正的或负的整数，叫作张量密度的权，可见张量密度的变换规律和张量的只差一个因子 $\tilde{\alpha}^{w}$，前面讲的张量是张量密度的特殊情况(权为零).

一阶张量密度叫作**矢量密度**，零阶张量密度叫作**标量密度**.

标量密度的一个例子是二阶张量 $T_{\alpha\beta}$的行列式，由 $T_{\mu\nu}$的变换式

$$T'_{\mu\nu}=\alpha^{\alpha}_{\mu'}\alpha^{\beta}_{\nu'}T_{\alpha\beta}\tag{2.3.2}$$

可以得到

$$\det T'_{\mu\nu}=\tilde{\alpha}^{2}\det T_{\alpha\beta},\tag{2.3.3}$$

因此，二阶协变张量的行列式是权为 2 的标量密度.

将(2.3.3)用于度规张量 $g_{\mu\nu}$，在坐标变换下有

$$g'=\tilde{\alpha}^{2}g.\tag{2.3.4}$$

另一方面，对于 4 维体元 d^4x，在坐标变换下按雅可比的定义有

$$d^4x'=\alpha d^4x,\tag{2.3.5}$$

由(2.3.5)和(2.3.4)可知有

$$\sqrt{-g'}d^4x'=\sqrt{-g}d^4x.\tag{2.3.6}$$

所以，$d\Sigma=\sqrt{-g}d^4x$ 是 **4 维标量体元**.

由(2.3.4)可得

$$\tilde{a}=\left(\frac{-g'}{-g}\right)^{1/2},$$

于是(2.3.1)可写为

$$(-g')^{-\frac{w}{2}}\mathscr{A}'^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}=(-g)^{-\frac{w}{2}}\alpha^{\mu'}_{\alpha}\alpha^{\beta}_{\nu'}\mathscr{A}^{\alpha\cdots}_{\beta\cdots}, \tag{2.3.7}$$

由此可见，张量密度乘以$(-g)^{-w/2}$即量$(-g)^{-w/2}\mathscr{A}^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$，具有和普通张量$A^{\mu\cdots}_{\nu\cdots}$相同的变换规律．这就是说，权为$w$的张量密度乘以因子$(-g)^{-w/2}$就变为权是零的张量密度，换言之，一个张量，乘以$(-g)^{w/2}$就成为权为$w$的张量密度．特殊地，张量乘以$\sqrt{-g}$，就是权为1的张量密度．

可以证明，用度规张量升降张量密度的指标时不改变它的权．

Levi-Civita 张量密度$\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$在计算中是经常用到的，它的定义是：$\varepsilon_{0123}=-1$，若四个指标中有两个相同则等于0，交换任意两个指标时则改变符号．下面我们证明$\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$是张量密度，任一张量$T_{\mu\nu}$的行列式$T$按定义可写为

$$T\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}=\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}T_{\alpha\mu}T_{\beta\nu}T_{\delta\tau}T_{\sigma\lambda}, \tag{2.3.8}$$

由(2.3.8)，(2.3.2)和(2.3.3)得到

$$\varepsilon'_{\mu\nu\tau\lambda}=(\tilde{\alpha})^{-1}\alpha^{\alpha}_{\mu'}\alpha^{\beta}_{\nu'}\alpha^{\delta}_{\tau'}\alpha^{\sigma}_{\lambda'}\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}, \tag{2.3.9}$$

即$\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$是权为$-1$的张量密度．

$\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$定义为

$$\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}=(-g)g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\tau\delta}g^{\lambda\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\delta\sigma}, \tag{2.3.10}$$

同样可以证明$\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$是权为$+1$的张量密度，它的分量$\varepsilon^{0123}=+1$．

张量密度$\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$和$\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$有一个很有用的性质，它们的分量在坐标变换下保持不变：$\varepsilon'^{0123}=\varepsilon^{0123}$，…，$\varepsilon'_{0123}=\varepsilon_{0123}$，…，根据(2.3.8)很容易证明这一点．

我们还可以用 Levi-Civita 张量密度定义两个张量：

$$\epsilon^{\mu\nu\tau\lambda}\equiv(-g)^{-1/2}\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda},$$

$$\epsilon_{\mu\nu\tau\lambda}\equiv(-g)^{\frac{1}{2}}\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}. \tag{2.3.11}$$

根据g的变换式可直接证明它们是张量，通常用这两个张量定义对偶张量．设$F_{\mu\nu}$和$F^{\mu\nu}$是反对称张量，则张量

$$\tilde{F}^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \tag{2.3.12}$$

叫作$F_{\alpha\beta}$的**对偶张量**．同样有

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{2.3.13}$$

§2.4 联络和克里斯托菲符号

由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 和 $g^{\mu\nu}$ 可以构成两个函数

$$\Gamma_{\mu\nu\tau} \equiv \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\tau} + g_{\mu\tau,\nu} - g_{\nu\tau,\mu}), \tag{2.4.1}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} = g^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\tau} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}(g_{\lambda\nu,\tau} + g_{\lambda\tau,\nu} - g_{\nu\tau,\lambda}). \tag{2.4.2}$$

式中符号“,”表示普通微商：$A_{,\alpha} \equiv \partial A/\partial x^{\alpha}$. 函数 $\Gamma_{\mu\nu\tau}$ 叫做第一类克里斯托菲符号，$\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 叫做第二类克里斯托菲符号，由定义可知，它们对于指标 $\nu\tau$ 是对称的. 由上二式还可得到

$$g_{\alpha\beta,\rho} = \Gamma_{\alpha\beta\rho} + \Gamma_{\beta\alpha\rho} = g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\rho} + g_{\beta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\rho}. \tag{2.4.3}$$

在黎曼几何中，克里斯托菲符号 $\Gamma^{M}_{\nu\tau}$ 就是仿射联络*，通常把克里斯托菲符号记作 $\{\mu,\nu\tau\}$ 和 $\{{}^{\mu}_{\nu\tau}\}$. 在非黎曼几何中，$\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 表示仿射联络，它对于指标 $\nu\tau$ 是非对称的，因此在非黎曼几何中，$\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 不等于克里斯托菲符号 $\{{}^{\mu}_{\nu\tau}\}$. 本书除个别章节外均属于广义相对论，空-时几何为黎曼几何，所以 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} = \{{}^{\mu}_{\nu\tau}\}$. 在非黎曼几何中，在那里 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} \neq \Gamma^{\mu}_{\tau\nu}$，量 $\Gamma^{\mu}_{[\alpha,\beta]} \neq 0$，称为**空-时挠率**. 在黎曼几何中，空-时是无挠的. 下面我们限于黎曼几何的情况，因此认为仿射联络 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 就是克里斯托菲符号 $\{{}^{\mu}_{\nu\tau}\}$.

在 n 维空间中，$\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$ 有 $n^2(n+1)/2$ 个独立分量，在我们所研究的 4 维空-时中有 40 个独立分量.

由定义(2.4.1)和(2.4.2)，可以得到克里斯托菲符号的变换式：

$$\Gamma'_{\mu\nu\tau} = \alpha^{\alpha}_{\mu'}\alpha^{\beta}_{\nu'}\alpha^{\delta}_{\tau'}\Gamma_{\alpha\beta\delta} + \alpha^{\alpha}_{\mu'}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}g_{\alpha\beta}, \tag{2.4.4}$$

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\tau} = \alpha^{\mu'}{}_{\alpha}\alpha^{\beta}_{\nu'}\alpha^{\delta}_{\tau'}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} + \alpha^{\mu'}_{\beta}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}. \tag{2.4.5}$$

---

* 即§1.5中的联络系数.

证明 按定义有

$$\Gamma'_{\mu\nu\tau}=\frac{1}{2}(g'_{\mu\nu,\tau}+g'_{\mu\tau,\nu}-g'_{\nu\tau,\mu})=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\tau}}(\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\nu'}^{\sigma}g_{\beta\sigma})+\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}(\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}g_{\beta\sigma})-\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}(\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}g_{\beta\sigma})\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left(\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\nu'}^{\sigma}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x'^{\tau}}+\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x'^{\nu}}-\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x'^{\mu}}\right)+$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x'^{\tau}}(\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\nu'}^{\sigma})+\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}(\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}-\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}(\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma})\right]g_{\beta\sigma}.$$

(2.4.6)

上式右端第一项给出

$$\frac{1}{2}(\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\nu'}^{\sigma}\alpha_{\tau'}^{\rho}+\alpha_{\mu'}^{\beta}\alpha_{\nu'}^{\rho}\alpha_{\tau'}^{\sigma}-\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}\alpha_{\mu'}^{\rho})\frac{\partial g_{\beta\sigma}}{\partial x^{\rho}},$$

最后这个表达式经过交换指标，可写为

$$\frac{1}{2}\alpha_{\mu'}^{\rho}\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}\left(\frac{\partial g_{\rho\beta}}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\rho}}\right)=\alpha_{\mu'}^{\rho}\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\sigma}\Gamma_{\rho\beta\sigma}.\qquad(2.4.7)$$

式(4.6)右端第二项为

$$\frac{1}{2}\left(\alpha_{\nu'}^{\sigma}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\mu}}+\alpha_{\mu'}^{\beta}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\nu}}+\alpha_{\tau'}^{\sigma}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\mu}}+\right.$$

$$\left.\alpha_{\mu'}^{\beta}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}-\alpha_{\tau'}^{\sigma}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\nu}}-\alpha_{\nu'}^{\beta}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}\partial x'^{\tau}}\right)g_{\beta\sigma}=$$

$$\frac{1}{2}\alpha_{\mu'}^{\beta}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\tau}\partial x'^{\nu}}g_{\beta\sigma},\qquad(2.4.8)$$

将(2.4.7)和(2.4.8)代入(2.4.6)，便得到(2.4.4).

对于第二类克里斯托菲符号，按定义有

$$\Gamma'^{\mu}_{\nu\tau}=g'^{\mu\sigma}\Gamma'_{\sigma\nu\tau}=$$

$$\alpha_{\alpha}^{\mu'}\alpha_{\beta}^{\sigma'}g^{\alpha\beta}\left(\alpha_{\sigma'}^{\delta}\alpha_{\nu'}^{\lambda}\alpha_{\tau'}^{\rho}\Gamma_{\delta\lambda\rho}+\alpha_{\sigma'}^{\delta}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}g_{\delta\lambda}\right)=$$

$$\alpha_{\alpha}^{\mu'}\delta_{\delta}^{\beta'}g^{\alpha\beta}\alpha_{\nu'}^{\lambda}\alpha_{\tau'}^{\sigma}\Gamma_{\beta\lambda\sigma}+\alpha_{\beta}^{\mu'}\delta_{\lambda}^{\alpha'}g^{\beta\lambda}\frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}g^{\alpha\sigma}=$$

$$\alpha_{\alpha}^{\mu'}\alpha_{\nu'}^{\beta}\alpha_{\tau'}^{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}+\alpha_{\beta}^{\mu'}\frac{\partial^2 x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}\partial x'^{\tau}}.$$

由(2.4.4)和(2.4.5)可见，克里斯托菲符号不是张量.

§2.5 协变微分

本节中我们研究如何将微分运算推广到黎曼空间.

1. 矢量的协变微分

设坐标系 x^μ 中有一个逆变矢量 A^μ，它在 x'^μ 系中为 A'^μ，我们有变换式

$$A^\mu=\alpha^\mu_\nu A'^\nu,\ \alpha^\mu_\nu\equiv\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}. \tag{2.5.1}$$

将上式对 x^β 微分，得到

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta}=\alpha^\mu_\nu\alpha^\rho_\beta\frac{\partial A'^\nu}{\partial x'^\rho}+\alpha^{\rho'}_\beta\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu\partial x'^\rho}A'^\nu. \tag{2.5.2}$$

由(2.1.9)式可知，标量的导数是一个黎曼空间中的协变矢量. 由上式可以发现，一个矢量的普通导数在黎曼空间中不是一个二阶张量. 我们设法构成一种微分运算，使得一个矢量的导数为一个二阶张量，从而将普通微分运算推广到黎曼空间. 自然，这种新的微分运算中的导数，当空间趋于平直时，应该等于普通导数.

由克里斯托菲符号的变换法则可以得到

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu\partial x'^\rho}=\Gamma'^\beta_{\rho\nu}\alpha^\mu_\beta-\alpha^\sigma_\rho\alpha^\beta_\nu\Gamma^\mu_{\sigma\beta}, \tag{2.5.3}$$

代入(2.5.2)得

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta}=\alpha^\mu_\sigma\alpha^{\rho'}_\beta\left(\frac{\partial A'^\sigma}{\partial x'^\rho}+\Gamma'^\sigma_{\rho\nu}A'^\nu\right)-\alpha^\sigma_\nu\Gamma^\mu_{\beta\sigma}A'^\nu. \tag{2.5.4}$$

此式最后一项可用(2.5.1)简化为

$$\alpha^\sigma_\nu\Gamma^\mu_{\beta\sigma}A'^\nu=\Gamma^\mu_{\beta\sigma}A^\sigma. \tag{2.5.5}$$

由(2.5.2)～(2.5.5)得到

$$\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\beta}+\Gamma^\mu_{\beta\sigma}A^\sigma\right)=\alpha^\mu_\sigma\alpha^{\rho'}_\beta\left(\frac{\partial A'^\sigma}{\partial x'^\rho}+\Gamma'^\sigma_{\rho\nu}A'^\nu\right). \tag{2.5.6}$$

我们构成了一个二阶张量($A^\mu_{,\beta}+\Gamma^\mu_{\beta\lambda}A^\lambda$)，称为**矢量 A^ν 的协变导数**，记作

$$A^{\mu}_{;\beta} \equiv \nabla_{\beta} A^{\mu} \equiv A^{\mu}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} A^{\lambda}. \tag{2.5.7}$$

这样，(2.5.6)表示为

$$A^{\mu}_{;\beta} = \alpha^{\mu}_{\sigma'} \alpha^{\rho'}_{\beta} A'^{\sigma}_{;\rho}. \tag{2.5.8}$$

当空间趋于平直时，$\Gamma^{\mu}_{\beta\lambda}=0$，$A^{\mu}_{;\beta}=A^{\mu}_{,\beta}$. 协变导数由两项组成，第一项为普通导数；第二项纯粹是由于空间的弯曲引起的，对应于矢量 A^{μ} 由 x^{α} 点平移至 $x^{\alpha}+\mathrm{d}x^{\alpha}$ 点所产生的变化(在平直空间中这一变化等于零).

用 $\alpha^{\beta}_{\tau'}\alpha^{\nu'}{}_{\mu}$ 乘(2.5.8)式，我们得到

$$A'^{\nu}_{;\tau} = \alpha^{\beta}_{\tau'} \alpha^{\nu'}_{\mu} A^{\mu}_{;\beta}. \tag{2.5.9}$$

由(2.5.8)和(2.5.9)可知，逆变矢量的协变导数为二阶混合张量. 类似地可以定义协变矢量 A_{μ} 的协变导数：

$$A_{\mu;\beta} \equiv \nabla_{\beta} A_{\mu} \equiv A_{\mu,\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} A_{\sigma}. \tag{2.5.10}$$

同样可以导出 $A_{\mu;\beta}$的变换式：

$$A'_{\mu;\beta} = \alpha^{\sigma}_{\mu'} \alpha^{\lambda}_{\beta'} A_{\sigma;\lambda}, \tag{2.5.11}$$

$$A_{\mu;\beta} = \alpha^{\sigma'}_{\mu} \alpha^{\lambda'}_{\beta} A'_{\sigma;\lambda}, \tag{2.5.12}$$

即协变矢量的协变导数为二阶协变张量.

2. 张量的协变微分

上述协变微分的概念可以推广到任意阶张量：

$$T^{\mu\nu\cdots}_{;\beta} = T^{\mu\nu\cdots}_{,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} T^{\lambda\nu\cdots} + \Gamma^{\nu}_{\beta\lambda} T^{\mu\lambda\cdots} + \cdots,$$

$$T_{\mu\nu\cdots;\beta} = T_{\mu\nu\cdots,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu} T_{\lambda\nu\cdots} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} T_{\lambda\mu\cdots} - \cdots,$$

$$T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots;\beta} = T^{\mu\cdots}_{\nu\cdots,\beta} + \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} T^{\lambda\cdots}_{\nu\cdots} + \cdots - \Gamma^{\lambda}_{\beta\nu} T^{\mu\cdots}_{\lambda\cdots} - \cdots. \tag{2.5.13}$$

协变微分法则与普通微分法则相同. 例如

$$(A_{\mu\nu} B^{\tau})_{;\sigma} = A_{\mu\nu;\sigma} B^{\tau} + A_{\mu\nu} B^{\tau}_{;\sigma}, \tag{2.5.14}$$

$$(A_{\mu} B^{\mu})_{;\sigma} = A_{\mu;\sigma} B^{\mu} + A_{\mu} B^{\mu}_{;\sigma} = (A_{\mu} B^{\mu})_{,\sigma}, \tag{2.5.15}$$

3. 张量密度的协变微分

设 $\mathscr{A}^{\mu}$ 是权为 w 的逆变矢量密度：

$$\mathscr{A}^{\mu} = (-g)^{w/2} A^{\mu}. \tag{2.5.16}$$

则$(-g)^{-w/2}\mathscr{A}^{\mu}=A^{\mu}$ 是逆变矢量，于是有变换关系

$$(-g)^{-w/2} \mathscr{A}^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu'} (-g')^{-w/2} \mathscr{A}'^{\nu}, \tag{2.5.17}$$

取上式的偏导数，与前面导出 A^{μ} 的协变导数的过程类似，我们

得到矢量密度 $\mathscr{A}^{\mu}$ 的协变导数的表达式：

$$\mathscr{A}^{\mu}_{;\alpha}=\mathscr{A}^{\mu}_{,\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\mathscr{A}^{\lambda}-w\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda}\mathscr{A}^{\mu}. \tag{2.5.18}$$

用同样的方法可以得到张量密度的协变导数. 例如权为 w 的二阶逆变张量密度 $\mathscr{T}^{\mu\nu}$的协变导数为

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{;\alpha}=\mathscr{T}^{\mu\nu}_{,\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}\mathscr{T}^{\lambda\nu}+\Gamma^{\nu}_{\alpha\lambda}\mathscr{T}^{\mu\lambda}-w\Gamma^{\lambda}_{\lambda\alpha}\mathscr{T}^{\mu\nu}. \tag{2.5.19}$$

由此可得权为 +1 的二阶逆变张量密度的协变散度

$$\mathscr{T}^{\mu\nu}_{;\nu}=\mathscr{T}^{\mu\nu}_{,\nu}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}\mathscr{T}^{\lambda\sigma}. \tag{2.5.20}$$

4. 一些有用的公式和推导方法

(1) 度规张量的协变导数等于零

$$g^{\mu\nu}_{;\tau}=0,\ g_{\mu\nu;\tau}=0,\ g_{;\tau}=0. \tag{2.5.21}$$

由协变导数和克里斯托菲符号的定义式可直接证明上式.

(2) Kronecker 符号(δ-符号)的协变导数等于零

$$\delta^{\mu}_{\nu;\tau}=\delta^{\mu}_{\nu,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\tau\alpha}\delta^{\alpha}_{\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\delta^{\mu}_{\alpha}=\Gamma^{\mu}_{\tau\nu}-\Gamma^{\mu}_{\tau\nu}=0. \tag{2.5.22}$$

(3) 标量函数的协变导数等于普通偏导数

$$\phi_{;\mu}=\phi_{,\mu}. \tag{2.5.23}$$

(4) 协变导数指标和其他张量指标同样用 $g^{\mu\nu}$或 $g_{\mu\nu}$升降

$$\begin{gathered}g^{\mu\alpha}A_{\mu;\nu}=A^{\alpha}_{;\nu},\ g^{\mu\alpha}A_{\nu;\alpha}=A_{\nu}^{;\mu},\\ g^{\lambda\alpha}T^{\mu}_{\nu;\alpha}=T^{\mu;\lambda}_{\nu},\ g_{\alpha\tau}T^{\mu;\alpha}_{\nu}=T^{\mu}_{\nu;\tau}.\end{gathered} \tag{2.5.24}$$

(5) $$\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}=g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu\alpha\mu}=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha}+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\nu\alpha,\mu}-g_{\mu\alpha,\nu})=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha}. \tag{2.5.25}$$

下面我们将 $\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}$用另一个形式给出. 由行列式的展开规则可得

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=\Delta^{\mu\nu}. \tag{2.5.26}$$

式中 $\Delta^{\mu\nu}$是行列式 g 中元素 $g_{\mu\nu}$的余子式. 根据求行列式的逆的规则和逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$的定义, (2.5.26)可写为

$$\frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}}=gg^{\mu\nu}, \tag{2.5.27}$$

从而有 $\quad dg=gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}=-gg_{\mu\nu}dg^{\mu\nu}$.

后一等式由 $d(g_{\mu\nu}g^{\mu\nu})=0$ 得到. 由上式可得

$$g_{,\alpha}=gg^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\alpha}=-gg_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\alpha}.\tag{2.5.28}$$

将(2.5.28)代入(2.5.25)得

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}=-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_{,\alpha}=\frac{1}{2g}g_{,\alpha}=(\ln\sqrt{-g})_{,\alpha}.\tag{2.5.29}$$

(6) 由(2.5.29)可将矢量的协变散度 $A^{\mu}_{;\mu}$写为

$$A^{\mu}_{;\mu}=A^{\mu}_{,\mu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\mu}A^{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(A^{\mu}\sqrt{-g})_{,\mu},\tag{2.5.30}$$

(7) 由(2.5.29)可将二阶张量的协变散度写为

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(T^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta},\tag{2.5.31}$$

$$T^{\nu}_{\mu;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(T^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})_{,\nu}-\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}T^{\alpha}_{\nu}.\tag{2.5.32}$$

如果张量 $F^{\mu\nu}$是反对称的，由(2.5.31)得到

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(F^{\mu\nu}\sqrt{-g})_{,\nu}.\tag{2.5.33}$$

如果 $S^{\mu\nu}$是对称的，则由(2.5.32)得到

$$S^{\nu}_{\mu;\nu}=\frac{1}{\sqrt{-g}}(S^{\nu}_{\mu}\sqrt{-g})_{,\nu}-\frac{1}{2}S^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta,\mu}.\tag{2.5.34}$$

(8) 矢量 A_{μ} 的旋度. 由协变导数的定义可得：

$$A_{\mu;\nu}-A_{\nu;\mu}=A_{\mu,\nu}-A_{\nu,\mu}.\tag{2.5.35}$$

此式表明，$A_{\mu;\nu}=A_{\nu;\mu}$的充分且必要条件是 $A_{\mu}=\phi_{,\mu}$，式中 ϕ 为 x^{ν} 的一个标量函数.

(9) 如果 $F_{\mu\nu}$是反对称的，则有

$$F_{\mu\nu;\tau}+F_{\nu\tau;\mu}+F_{\tau\mu;\nu}=F_{\mu\nu,\tau}+F_{\nu\tau,\mu}+F_{\tau\mu,\nu}.\tag{2.5.36}$$

如果 $F_{\mu\nu}$是某一矢量 A_{μ} 的旋度：

$$F_{\mu\nu}=A_{\mu;\nu}-A_{\nu;\mu},\tag{2.5.37}$$

则有
$$F_{\mu\nu;\tau}+F_{\nu\tau;\mu}+F_{\tau\mu;\nu}=0.\tag{2.5.38}$$

以上诸式均可由协变导数的定义和克里斯托菲符号的对称性予以证明.

(10) 式(2.5.38)可以用 $F_{\mu\nu}$的对偶张量(2.3.12)表示

$$\widetilde{F}^{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta},\quad \widetilde{F}^{\mu\nu}_{;\nu}=0.\tag{2.5.39}$$

(11) 由定义可直接证明

$$\varepsilon_{\alpha\beta\partial\sigma;\mu}=0,\ \varepsilon^{\alpha\beta\partial\sigma}_{;\mu}=0. \tag{2.5.40}$$

§2.6 短程线坐标系

根据克里斯托菲符号的变换性质(2.4.5)，可以证明一个定理:在空间中一点 p 总可以选择一个坐标系，使得克里斯托菲符号的所有分量在 p 点都等于零. 这一坐标系叫做**短程线坐标系**.

下面我们证明这一定理. 假设在某一坐标系 x^μ 中，在给定点 p 克里斯托菲符号不等于零，引入坐标变换

$$x'^\mu=x^\mu-x^\mu_p+\frac{1}{2}\Gamma^\mu_{\alpha,\beta}(p)(x^\alpha-x^\alpha_p)(x^\beta-x^\beta_p), \tag{2.6.1}$$

式中标记 p 表示在给定点 p 的值，此式给出 $x'^\mu_p=0$. 对于一般的变换系数有

$$\alpha^{\mu'}_\sigma\alpha^\sigma_{\nu'}=\delta^{\mu'}_{\nu'},(\alpha^{\mu'}_\sigma\alpha^\sigma_{\nu'})_{,\tau'}=0,$$

即 $$\alpha^{\mu'}_{\sigma,\tau'}\alpha^\sigma_{\nu'}=-\alpha^\sigma_{\nu',\tau'}\alpha^{\mu'}_\sigma,$$

由此得 $$\alpha^{\mu'}_{\sigma,\lambda}\alpha^\sigma_{\nu'}\alpha^\lambda_{\tau'}=\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\alpha^{\mu'}_\sigma\ \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau}\alpha^\sigma_{\nu'}=\alpha^{\mu'}_{\sigma,\tau'}\alpha^\sigma_{\nu'}=-\alpha^\sigma_{\nu'\tau'}\alpha^{\mu'}_\sigma. \tag{2.6.2}$$

克里斯托菲符号的变换式为(2.4.5)

$$\Gamma'^\mu_{\nu\tau}=\alpha^{\mu'}_\lambda\alpha^\sigma_{\nu'}\alpha^\rho_{\tau'}\Gamma^\lambda_{\sigma\rho}-\alpha^{\mu'}_{\sigma,\lambda}\alpha^\sigma_{\nu'}\alpha^\lambda_{\tau'}. \tag{2.6.3}$$

把(2.6.2)代入(2.6.3)，得到

$$\Gamma'^\mu_{\nu\tau}=\alpha^{\mu'}_\lambda(\alpha^\lambda_{\nu',\tau'}+\alpha^\sigma_{\nu'}\alpha^\rho_{\tau'}\Gamma^\lambda_{\sigma\rho}). \tag{2.6.4}$$

(2.6.1)对 x'^ν 求偏微商，得到

$$\alpha^\mu_{\nu'}+\Gamma^\mu_{\sigma\rho}(p)\alpha^\sigma_{\nu'}(x^\rho-x^\rho_p)=\delta^\mu_\nu, \tag{2.6.5}$$

此式再对 x'^τ 求偏微商，然后代入 p 点的值，得到

$$\alpha^\mu_{\nu',\tau'}+\Gamma^\mu_{\sigma\rho}(p)\alpha^\sigma_{\nu'}\alpha^\rho_{\tau'}=0, \tag{2.6.6}$$

将(2.6.6)代入(2.6.4)，得到 $\Gamma'^\mu_{\nu\tau}(p)=0$. 定理证毕.

根据广义相对论中的等效原理，引力场的局部动力学效应与惯性力场等效，而引力场就是度规张量场. 因此，在引力场中一点 p 可以和惯性力场中一样引入一坐标变换，变至“自由落下”参考系 x'^μ. 在 x'^μ 系中，引力场不存在，空-时是平直的. 这一参考

系叫做局部惯性系. 这就是上述短程线坐标系的物理意义.

§2.7 曲率张量

1. 黎曼曲率张量的定义

在平直空间中有 $A^{\mu}_{,\nu\tau}=A^{\mu}_{,\tau\nu}$，在黎曼空间的一般情况下 $A^{\mu}_{;\nu\tau}\neq A^{\mu}_{;\tau\nu}$，式中 $A^{\mu}_{;\nu\tau}\equiv A^{\mu}_{;\nu;\tau}$. 我们计算上述两个张量的差，这个差应反映空间弯曲的性质.

由(5.7)可得

$$
\begin{aligned}
A^{\mu}_{;\nu\tau}=&(A^{\mu}_{;\nu})_{,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau}A^{\alpha}_{;\nu}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}A^{\mu}_{;\alpha}=\\
&A^{\mu}_{,\nu\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\tau}A^{\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}A^{\alpha}_{,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau}(A^{\alpha}_{,\nu}+\\
&\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}A^{\lambda})-\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}A^{\mu}_{;\alpha},
\end{aligned}
\tag{2.7.1}
$$

$$
\begin{aligned}
A^{\mu}_{;\tau\nu}=&A^{\mu}_{,\tau\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau,\nu}A^{\alpha}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau}A^{\alpha}_{,\nu}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}(A^{\alpha}_{,\tau}+\\
&\Gamma^{\alpha}_{\lambda\tau}A^{\lambda})-\Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}A^{\mu}_{;\alpha}.
\end{aligned}
\tag{2.7.2}
$$

由此得到 $A^{\mu}_{;\nu\tau}-A^{\mu}_{;\tau\nu}=-R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}A^{\alpha}$. (2.7.3)

式中 $R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}\equiv\Gamma^{\mu}_{\alpha\tau,\nu}-\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu,\tau}+\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\tau}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\tau}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}$, (2.7.4)

称为**黎曼曲率张量**，可以直接证明它符合张量的变换法则. 同样，对于协变矢量有

$$A_{\mu;\nu\tau}-A_{\mu;\tau\nu}=R^{\sigma}_{\mu\nu\tau}A_{\sigma}. \tag{2.7.5}$$

可以证明，$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda}$是仅依赖于联络及其一阶导数且对一阶导数为线性的唯一一个四阶张量.

对于一平直空间区域，因为度规张量 $g_{\mu\nu}$为常数，所以曲率张量等于零. 如果在这一区域进行坐标变换，由于 $R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}$的张量性质，变换后，它的所有分量仍等于零. 由此得出结论：空间为平直的必要条件是曲率张量的所有分量 $R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}$等于零. 反之，如果 $R^{\mu}_{\alpha\nu\tau}$处处为零，则由(2.7.3)可知 $A^{\mu}_{;\nu\tau}=A^{\mu}_{;\tau\nu}$，所有的克里斯托菲符号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$处处为零，度规张量 $g_{\mu\nu}$的所有一阶导数也处处为零. 因此，空间为平直的充分且必要条件是曲率张量的所有分量 $R^{\mu}_{\alpha\tau\nu}$处处等于零.

将(2.4.1)～(2.4.2)代入(2.7.4)～(2.7.5)，得到 $R_{\mu\sigma\tau\lambda}$的另一表达式：

$$R_{\mu\nu\tau\lambda}=g_{\sigma\mu}R^{\sigma}_{\nu\tau\lambda}=\frac{1}{2}(g_{\mu\lambda,\nu\tau}+g_{\nu\tau,\mu\lambda}-g_{\mu\tau,\nu\lambda}-$$
$$g_{\nu\lambda,\mu\tau})+g_{\alpha\beta}(\Gamma^{\alpha}_{\nu\tau}\Gamma^{\beta}_{\mu\lambda}-\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda}\Gamma^{\beta}_{\mu\tau}). \tag{2.7.6}$$

2. 曲率张量的性质

(1) 对称性质. 由定义式(2.7.4)和(2.7.5)可以直接得到曲率张量的下列对称性质;对于前后两对指标对称，即

$$R_{\mu\nu\tau\lambda}=R_{\tau\lambda\mu\nu},\ R^{\mu}_{\cdot\nu\tau\lambda}=R_{\tau\lambda}{}^{\mu}{}_{\nu}. \tag{2.7.7}$$

对于前两个指标反对称，即

$$R_{\mu\nu\tau\lambda}=-R_{\nu\mu\tau\lambda},\ R^{\mu}_{\cdot\nu\tau\lambda}=-R_{\nu}{}^{\mu}{}_{\cdot\tau\lambda}. \tag{2.7.8}$$

对于后两个指标反对称，即

$$R_{\mu\nu\tau\lambda}=-R_{\mu\nu\lambda\tau},\ R^{\mu}_{\nu\tau\lambda}=-R^{\mu}_{\nu\lambda\tau}. \tag{2.7.9}$$

(2) 里奇(Ricci)恒等式. 由(2.7.6)～(2.7.9)可以证明，对于曲率张量的后三个指标轮换取和，结果等于零，即

$$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda}+R^{\mu}_{\lambda\nu\tau}+R^{\mu}_{\tau\lambda\nu}=0. \tag{2.7.10}$$

(3) 毕安基(Bianchi)恒等式. 由§2.6可以证明一个重要的微分恒等式:

$$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda;\sigma}+R^{\mu}_{\nu\sigma\tau;\lambda}+R^{\mu}_{\nu\lambda\sigma;\tau}=0. \tag{2.7.11}$$

这一等式的证明很简单，在空间中某一点 p 引入短程线坐标系，则在 p 点克里斯托菲符号等于零，于是由(2.7.4)得到

$$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda;\sigma}=\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda;\tau\sigma}-\Gamma^{\mu}_{\nu\tau;\lambda\sigma}. \tag{2.7.12}$$

由此便得到(2.7.11). 此式左端为张量，只要它在某一坐标系中所有分量都为零，那么在任意坐标系中它的所有分量自然也为零;即(2.7.11)对任意坐标系均成立. 此式称为**毕安基恒等式**.

3. 里奇张量

对曲率张量降阶而构成的二阶张量

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu}=\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu}+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \tag{2.7.13}$$

称为**里奇(Ricci)张量**. 由定义式可知，里奇张量是对称的:

$$R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}. \tag{2.7.14}$$

对里奇张量降阶构成的标量

$$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$$

称为**曲率标量**

将(2.7.11)缩并，得到

$$R^{\lambda}_{\cdot\,\tau\lambda;\alpha}+R^{\lambda}_{\nu\alpha\tau;\lambda}+R^{\lambda}_{\nu\lambda\alpha;\tau}=0, \tag{2.7.15}$$

即
$$R_{\nu\alpha;\tau}-R_{\nu\tau;\alpha}+R^{\lambda}_{\nu\alpha\tau;\lambda}=0,$$

乘以 $g^{\nu\alpha}$并注意 $g^{\nu\alpha}_{;\tau}=0$，得到

$$R_{;\tau}-R^{\alpha}_{\tau;\alpha}-R^{\lambda}_{\tau;\lambda}=0,$$

即
$$\left(R^{\nu}_{\tau}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\tau}R\right)_{;\nu}=0,$$

或者写为 $G^{\mu\nu}_{;\nu}=\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)_{;\nu}=0.$ (2.7.16)

式中
$$G^{\mu\nu}\equiv R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{2.7.17}$$

称为**爱因斯坦张量**.

张量

$$S_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{4}Rg_{\mu\nu} \tag{2.7.18}$$

称为**零迹里奇张量**. 容易证明它的迹等于零：

$$S=g^{\mu\nu}S_{\mu\nu}=0. \tag{2.7.19}$$

式(2.7.16)是由毕安基恒等式导出的唯一的协变微分守恒定律. 由于 $G^{\mu\nu}=G^{\nu\mu}$，加上(2.7.16)的限制，实际上 $G^{\mu\nu}$只有 6 个独立分量.

§2.8 短 程 线

在黎曼空间中，连接空间两个给定点的曲线长度表示为

$$I=\int\mathrm{d}s=\int(g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^{1/2}=\int(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})^{1/2}\mathrm{d}\lambda. \tag{2.8.1}$$

满足条件

$$\delta I=\delta\int(g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu})^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\lambda=0 \tag{2.8.2}$$

的曲线称为**短程线**，即黎曼空间中连接两个给定点的最短的线. 式中 $\dot{x}^{\mu}\equiv\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\lambda}$，$\lambda$ 为沿着短程线的某一参量. (2.8.2)对应的拉格

朗日函数为

$$L=(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)^{1/2}, \tag{2.8.3}$$

取 $\lambda=s(\mathrm{d}s\neq0)$，则沿短程线有 $L=1$. 此时拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0 \tag{2.8.4}$$

给出 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\mu\tau}\dot{x}^\tau)=\frac{1}{2}g_{\nu\tau,\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau. \tag{2.8.5}$$

此即**短程线方程**.

短程线方程还可以写成较为对称的形式，把(2.8.5)改写为

$$g_{\mu\tau}\ddot{x}^\tau+g_{\mu\tau,\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau=\frac{1}{2}g_{\nu\tau,\mu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau.$$

式中 $\ddot{x}^\tau\equiv\mathrm{d}^2x^\tau/\mathrm{d}s^2$. 上式即

$$g_{\mu\tau}\ddot{x}^\tau+\frac{1}{2}(2g_{\mu\tau,\nu}-g_{\nu\tau,\mu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau=0. \tag{2.8.6}$$

注意到

$$2g_{\mu\tau,\nu}\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau=(g_{\mu\nu,\tau}+g_{\mu\tau,\nu})\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau,$$

(2.8.6)可改写为

$$g_{\mu\tau}\ddot{x}^\tau+\Gamma_{\mu\nu\tau}\dot{x}^\nu\dot{x}^\tau=0, \tag{2.8.7}$$

或乘以 $g^{\mu\alpha}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\alpha}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^\alpha_{\nu\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}s}=0. \tag{2.8.8}$$

这就是常见的较为对称的短程线方程.

引入切矢量 u^μ，还可将短程线方程写为另外的形式. 切矢量 u^μ 定义为

$$u^\mu\equiv\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s. \tag{2.8.9}$$

由定义有 $$u^\mu u_\mu=g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s^2}=1. \tag{2.8.10}$$

短程线方程(8.8)可改写为

$$u^\rho u_{;\rho}=\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s}+\Gamma^\alpha_{\nu\tau}u^\nu u^\tau=0. \tag{2.8.11}$$

在惯性系 X^μ 中，自由粒子的运动方程为欧几里得直线，即闵可夫斯基空间中的短程线

$$\delta\int \mathrm{d}s = \delta\int (\eta_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu)^{1/2}\mathrm{d}\lambda = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\eta_{\mu\tau}\dot{X}^\tau) = \frac{1}{2}\eta_{\nu\tau,\mu}\dot{X}^\nu \dot{X}^\tau.$$

按广义相对性原理，变换到加速系 x^μ 中，自由粒子运动方程应该是广义协变的，即为(2.8.5)式. 根据等效原理，加速场即引力场，因此引力场中自由粒子的运动方程也应具有形式(2.8.5). 这就是说，引力场中的**自由粒子沿短程线运动**.

在黎曼空间中，满足条件

$$\delta\int \mathrm{d}s = 0,\ \mathrm{d}s^2 = 0 \tag{2.8.12}$$

的曲线称为**零短程线**. 由于 $\mathrm{d}s=0$，所以在(2.8.1)～(2.8.2)中不能取 $\lambda=s$，λ 应为另一参量，$\mathrm{d}\lambda\neq 0$，此时方程(2.8.12)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\nu\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu \mathrm{d}x^\tau}{\mathrm{d}\lambda \mathrm{d}\lambda}=0,$$

$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu=0. \tag{2.8.13}$$

此即零短程线方程.

在引力场中，**静止质量为零的粒子(如光子)沿零短程线运动**.

§2.9 共形曲率张量

1. 共形变换

设在同一个流形上由度规

$$\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$$

和

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\tilde{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu \tag{2.9.1}$$

确定两个黎曼空间 V_n 和 $\tilde{V}_n$，$\mathrm{d}s^2$ 和 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 之间存在变换关系

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\mathrm{e}^{2\sigma(x)}\mathrm{d}s^2 \text{ 或 } \tilde{g}_{\mu\nu}=\mathrm{e}^{2\sigma(x)}g_{\mu\nu}. \tag{2.9.2}$$

变换(2.9.2)称为**共形变换**，空间 V_n 和 $\tilde{V}_n$ 称为**共形空间**.

在流形中任意一点 p，两个方向 $\mathrm{d}x^\mu$ 和 δx^μ 之间的夹角在空间 V_n 中表示为

$$\cos\alpha = g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\delta x^\nu}{\delta s} = $$
$$g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\delta x^\nu(g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta)^{-\frac{1}{2}}(g_{\nu\tau}\delta x^\nu\delta x^\tau)^{-\frac{1}{2}};$$

在空间 $\tilde{V}_n$ 中表示为

$$\cos\tilde{\alpha} = \tilde{g}_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tilde{s}}\frac{\delta x^\nu}{\delta\tilde{s}} = $$
$$\tilde{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\delta x^\nu(\tilde{g}_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta)^{-\frac{1}{2}}(\tilde{g}_{\nu\tau}\delta x^\nu\delta x^\tau)^{-\frac{1}{2}}.$$

将(2.9.2)代入，得到

$$\cos\alpha = \cos\tilde{\alpha}.$$

所以共形变换又称**保角变换**.

2. Weyl 张量

由曲率张量和度规张量构成一个具有重要性质的张量 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$，称为共形张量，或外尔(Weyl)张量；它的定义为

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho}) - \frac{1}{6}(g_{\mu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma})R. \tag{2.9.3}$$

下面我们讨论外尔张量的一系列重要性质.

外尔张量具有和曲率张量相同的对称性：

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\mu\rho\sigma} = -C_{\mu\nu\sigma\rho}, \tag{2.9.4}$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\mu\nu}, \tag{2.9.5}$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} + C_{\mu\sigma\nu\rho} + C_{\mu\rho\sigma\nu} = 0. \tag{2.9.6}$$

外尔张量对任意二指标缩并都等于零，所以是无迹的：

$$C^\rho_{\alpha\rho\beta} = g^{\rho\sigma}C_{\sigma\rho\beta} = 0. \tag{2.9.7}$$

在一维、二维和三维空间，外尔张量恒等于零；在四维空间，它有 10 个独立分量.

下面我们证明，在共形变换下外尔张量保持不变：

$$\tilde{C}^\mu_{\nu\tau\lambda} = C^\mu_{\nu\tau\lambda}. \tag{2.9.8}$$

由(2.9.2)可得

$$\tilde{g}^{\mu\nu}=e^{-2\sigma(x)}g^{\mu\nu}, \tag{2.9.9}$$

于是得到克里斯托菲符号的变换关系

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\tau}=e^{2\sigma}(\Gamma_{\mu\nu\tau}+g_{\mu\nu}\sigma_{,\tau}+g_{\mu\tau}\sigma_{,\nu}-g_{\nu\tau}\sigma_{,\mu}), \tag{2.9.10}$$

$$\tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\tau}=\tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{\Gamma}_{\alpha\nu\tau}=\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}+\delta^{\mu}_{\nu}\sigma_{;\tau}+\delta^{\mu}_{\tau}\sigma_{,\nu}-g_{\nu\tau}g^{\mu\alpha}\sigma_{,\alpha}. \tag{2.9.11}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu\nu\tau\lambda}=&\frac{1}{2}(\tilde{g}_{\mu\lambda,\nu\tau}+\tilde{g}_{\nu\tau,\mu\lambda}-\tilde{g}_{\mu\tau,\nu\lambda}-\tilde{g}_{\nu\lambda,\mu\tau})+\\&\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\tau}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\lambda}-\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\nu\lambda}\tilde{\Gamma}^{\beta}_{\mu\tau})=\\&e^{2\sigma}[R_{\mu\nu\tau\lambda}+(g_{\mu\lambda}\sigma_{\nu\tau}+g_{\nu\tau}\sigma_{\mu\lambda}-g_{\mu\tau}\sigma_{\nu\lambda}-\\&g_{\nu\lambda}\sigma_{\mu\tau})+(g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau}-g_{\mu\tau}g_{\mu\lambda})(\sigma_{;\alpha}\sigma^{;\alpha})],\end{aligned} \tag{2.9.12}$$

式中

$$\sigma_{\mu\nu}=\sigma_{\nu\mu}\equiv\sigma_{;\mu\nu}-\sigma_{;\mu}\sigma_{;\nu}, \tag{2.9.13}$$

$$\sigma_{;\mu}\sigma^{;\mu}=g^{\mu\nu}\sigma_{;\mu}\sigma_{;\nu}=g^{\mu\nu}\sigma_{,\mu}\sigma_{,\nu}. \tag{2.9.14}$$

里奇张量的变换式可由上式得到：

$$\tilde{R}_{\mu\nu}=\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{R}_{\alpha\mu\beta\nu}=R_{\mu\nu}-2\sigma_{\mu\nu}-(\Box\sigma+2\sigma_{;\rho}\sigma^{;\rho})g_{\mu\nu}, \tag{2.9.15}$$

$$\Box\sigma=\sigma^{;\mu}_{;\mu}=g^{\mu\nu}\sigma_{;\mu\nu}. \tag{2.9.16}$$

从而得到曲率标量的变换式：

$$\tilde{R}=\tilde{g}^{\mu\nu}\tilde{R}_{\mu\nu}=e^{-2\sigma}(R-6\Box\sigma-6\sigma^{;\mu}_{;\mu}). \tag{2.9.17}$$

由(2.9.15)和(2.9.17)得到

$$\sigma_{\mu\nu}=-\frac{1}{2}(\tilde{R}_{\mu\nu}-R_{\mu\nu})+\frac{1}{12}(\tilde{R}g_{\mu\nu}-Rg_{\mu\nu})=\frac{1}{2}(\sigma_{;\mu}\sigma^{;\mu})g_{\mu\nu}. \tag{2.9.18}$$

把(2.9.12)中指标 μ 升高，然后将(2.9.18)代入，便得到

$$\tilde{C}^{\mu}_{\nu\tau\lambda}=C^{\mu}_{\nu\tau\lambda}. \tag{2.9.19}$$

即在共形变换下外尔张量保持不变. 还可以证明，常曲率空间的外尔张量恒等于零，这表明常曲率空间和欧几里得空间是共形的.

参考文献

[1] Carmeli M. Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory. New York: Wiley Pub Comp, 1982, §2

[2] Eisenhart L P. Riemannian Geometry. London: Acad Press, 1949, §2

[3] Hicks N J. Notes on Differential Geometry. Orlando: Acad Press, 1971, §2

[4] Petrov A Z. Einstein Spaces. Toronto: Univ Press, 1969, §2

[5] 王永久，唐智明. 引力理论和引力效应. 长沙：湖南科学技术出版社，1990. 附录

[6] 陆启铿. 微分几何学及其在物理学中的应用. 北京：科学出版社，1982

[7] Klingenberg W. Riemannian Geometry. New York: Walter de Gruyter, 1982.

[8] Wald R. General Relativity. Chicago: The Univ of Chicago Press, 1984

[9] Guggenheimer H. Differential Geometry. Mcgraw-Hill Book Company: Inc, 1963

第2篇　广义相对论的物理基础

1　广义相对论的基本原理

§1.1　等效原理

考虑一局部空间中的一个假想实验．如图所示，一封闭实验室中的观察者发现，其中一物体对弹簧秤的拉力为mg，方向向下．他无法区分所在的参考系属于下列两种情况中的哪一种：(1)系统正在太空中，远离任何一个引力体；实验室以加速度g向上运动．此时这一局部空间中存在一惯性力场，物体m受一虚构的力(惯性力)mg的作用．(2)系统停留在一永久引力体的表面，其局部永久引力场的场强为g．此时物体受到真实力(引力)mg的作用．



图 2-1

这一假想实验的结果表明，在局部空间区域，不可能将虚构的惯性力场和真实的引力场区分开来；二者的动力学效应之间存

在着局部等效性.

对于大的空间区域，一般不存在上述等效性. 例如地球的引力场，在充分大的空间区域中其力线是辐射状的，所以不存在一个非惯性系，其中的惯性力场能够等效于这一辐射状的引力场.

爱因斯坦把上述等效性作为新理论的第一条基本原理——**等效原理**，表述为：**惯性力场和引力场的动力学效应是局部不可分辨的.**

在爱因斯坦提出等效原理之前，人们无法处理真实力和虚构力之间的关系，无法承认物体的引力质量恒等于惯性质量这一事实是自然的. 牛顿认为真实力和虚构力是不同的. 前者依赖于产生它的系统的物理性质，后者则是由于过渡到加速系所产生的. 惯性力(惯性离心力、克里奥利力等)具有特殊的性质：它可以使物体产生加速度，且此加速度与被加速的物体的性质无关(由于这类力可以借助于适当的坐标变换消除，所以称之为虚构的力). 在这种意义上，绝对空间可以由选定的一特定参考系表征，在这一参考系中不存在虚构的力，只有真实的力；物理定律具有自然的表述形式. 牛顿曾以著名的水桶实验来证明绝对空间的存在.

图 2-2 中的两幅图分别表示桶开始转动、水未被带动和稳定转动后桶突然静止的情形. 自上向下看，第一种情况是水相对于桶逆时针转动，此时水面是平面；第二种情况是水相对于桶顺时针转动，此时水面是凹面. 显然，水的转动对液面形状的影响不能以桶做为参照物，因为两种情况下水相对于桶都做转动. 两种情况的差异(液面平与凹)必决定于第三物体(或物体组). 牛顿认为这第三物体就是绝对空间. 当水相对于绝对静止的绝对空间做绝对运动(转动)时，水面是凹面；当水相对于

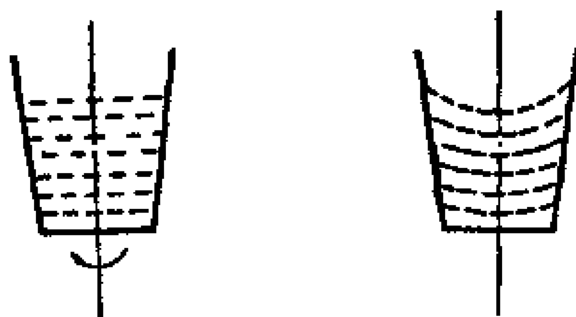


图 2-2
自上向下看：水对桶逆时针转动时水面为平面；水对桶顺时针转动时水面为凹面

绝对空间绝对静止时，水面是平面．马赫反对这种绝对空间的概念．他指出，设想桶变得很大，大得与恒星系有相同的线度和质量，相对转动对于水面形状不起作用，则遥远的恒星不再能作为“第三物体”，绝对空间在哪儿呢？

在牛顿力学中，动力学定律是相对于绝对参照系而建立的（允许相差一个均匀平移，即关于伽利略群的不变性），遥远恒星的唯一影响是改变转动桶附近的引力势．因此马赫认为这种效应（在经典力学范围内）是无法理解的．

赫兹和马赫都不同意牛顿的绝对空间的概念，他们试图从另外的想法出发引入惯性力．

赫兹希望把一定距离上的电磁作用归结为接触作用．对于引力，他也想这样做．惯性原理确定一自由质量作匀速直线运动．有惯性力时运动的区别是由于其他质量的存在所引起的．物体的轨迹可由高斯的最小偏离原理确定：真实的运动以最小的可能程度偏离匀速直线运动．因此，惯性原理是最小偏离原理的特殊情况，它对应于不存在力而存在隐藏质量的情况．

马赫认为，局部空间的惯性效应（惯性力场）是由于远距质量的存在所引起的．如果没有远距恒星（例如，在空间中只有地球），则所有的参考系都是等效的，并且都是惯性系．

爱因斯坦吸取了马赫的上述思想，提出了等效原理，并建立了新的引力场方程．

等效原理逻辑简洁地、统一地处理了惯性力场和局部引力场的联系，自然地得出了物体的惯性质量恒等于引力质量的结论，即自然地解释了落体实验和厄缶（Eötvös）实验的结果．

根据理论研究的需要，有时将等效原理区分为弱等效原理和强等效原理两种．上面所表述的（惯性力场和引力场的动力学效应局部不可分辨）是弱等效原理．它还可以这样表述：物体的引力加速度与被加速物体的成分和物质结构无关．显然，弱等效原理是直接为 Eötvös 实验所支持的．

将弱等效原理中的“动力学效应”推广为“任何物理效应”，便

得到了强等效原理．这一原理表述为：在引力场中一自由落下的(非转动的)实验室里，局部物理定律具有同一数学形式，与实验室的空间位置无关．或者表述为：在引力场中任一时空点引入一局部惯性系，则物理规律的数学形式是洛仑兹协变的．强等效原理是弱等效原理的推广，它没有直接的实验支持．这一原理是广义相对论的基础，它的正确性只能由它的各个推论是否与实验符合来检验．

等效原理指出，当空间某一范围存在引力场时(这是普遍情况)，就不能引入和采用惯性系．因为在惯性系中，惯性力等于零，而引力却不为零，这与等效原理矛盾．因此，在引力场中只能引入局部惯性系．

在广义相对论中，由于不存在相互做匀速直线运动的惯性系，从而使加速度的概念不再像牛顿力学和狭义相对论中那样是绝对的，而是相对的了．

下面讨论作为爱因斯坦引力理论(广义相对论)基础的第二个原理——广义协变原理，或称广义相对性原理．

§1.2　广义协变原理

几乎在所有的物理现象中，都有引力的参与．这就是说，在研究物理现象时必须考虑引力场的存在．在前节的讨论中已经说明，当引力场存在时，不能引入统一的惯性系．因此，人们必须在非惯性系中描述物理现象．狭义相对论只在一时空点的邻域内成立．这样，就应该将狭义相对性原理延拓到引力场存在的情况．换言之，真实的物理规律不仅在惯性系间的洛伦兹变换下是协变的(狭义相对性原理)，而且在任意坐标变换下都应该是协变的．这就是**广义协变原理**，或称**广义相对性原理**．

广义协变原理可以用下列形式之一表述：

1．对于描述物理规律，所有的坐标系都具有同等资格，不存在任何一个优越的坐标系．

2. 描述物理规律的方程中各项应是四维黎曼时空中的同阶张量.

3. 描述物理定律的方程在所有坐标系中应具有相同的形式.

可以发现，以上三种表述形式不是完全等价的. 但是从这些表述中不难看出，根据广义协变原理，在爱因斯坦引力理论(广义相对论)中，坐标只是用来标记时空事件的簿记系统而已，不含有比这更多的内容. 物理学结论和结果应不依赖于获得结果所采用的特殊坐标系. 通常，只有坐标变换下的不变量才具有物理意义.

广义协变原理对于推导物理定律和建立场方程具有指导意义. 例如通常在建立场方程时，首先选择一个由同阶张量构成的标量泛函作为作用量，再应用变分原理获得场方程. 这一方法就是以广义协变原理为指导的. 又如，当我们试图把物理定律从狭义相对论形式推广到广义相对论形式(把引力场包括进去)时，这原理是最有用的. 它指导我们将狭义相对论中的麦克斯威方程推广到广义相对论中. 在这一过程中常常以协变导数代替普通导数. 当引力被去掉时它们应回到平直时空中的原有形式.

等效原理和广义协变原理是整个广义相对论的基础. 和任何其他的物理学原理一样，它们不可能由已知的理论、原理证明和推导出来；在新理论建立时，它们只能作为假定提出来. 原理的正确性只能由它的和整个新理论的各个推论是否与实验相符合来检验.

爱因斯坦引力理论逻辑十分简洁，只需要这两个原理就够了. 由这两个原理出发，导致了引力场的几何化，即用黎曼几何描述引力场. 这一描述是如此成功、如此漂亮，致使人们称这两个原理是理论物理中最大的个人成就.

2 广义相对论中的空间和时间

§2.1 非欧几里得几何的引入

早在 1913 年，爱因斯坦就意识到引力场和惯性力场的等效性应导致空间几何性质的改变．他假设我们生活的空间是非欧几里得的．但当时还不知道引力定律以什么形式和黎曼空间的结构条件相联系．

新的引力理论是建立在黎曼空间概念基础上的．在叙述新的引力定律之前，我们希望能够阐明非欧几里得几何的空间概念是怎样引入的，即引力场和惯性力场的等效性以及任意加速参考系的等效性是怎样导致空间的非欧几里得性质的．

爱因斯坦的广义协变原理要求引力定律的数学形式在任何参考系中都是相同的．这样，新的引力场方程必须是由非欧几里得空间量构成的方程．下面我们将看到，上述空间量就是时空的曲率张量；同时，引力场由各质点的世界线(即时-空中的短程线)给出．在这里，动力学问题归结为运动学问题，而运动学问题是和时空几何概念相联系的；这几何概念又等效于引力场的概念．

在爱因斯坦引力理论中，引力场是几何化的．即假定存在非欧几里得空间，受引力场作用的质点即为此空间中的自由质点．根据惯性定律，这些质点的轨迹应该是欧几里得直线的推广．在这空间中，两点间的最短距离是其间的短程线．因此，赫兹理论中的隐藏质量和马赫原理中的遥远恒星所产生的效应都表现为使时空弯曲，从而使质点在这弯曲时空中沿短程线运动．引力场和

惯性力场的等效性奠定了世界结构几何化的基础，物质分布的影响不表现为力的作用，而表现为时空的弯曲．至于欧几里得空间，则是没有物质的世界．

这样，引入非欧几里得空间，便可将相对性原理推广到加速系和由任意弯曲标架所确定的参考系．换言之，物理定律的形式不仅对于洛伦兹变换是协变的，对于任意坐标变换都是协变的．

在欧几里得空间中，可以确定任意的坐标系，也可以引入任意的坐标变换．但是应该指出，对于整个空间，两种表述是等效的．与此相反，加速系和惯性系的等效性只具有局部性质．在非欧几里得空间中，这一局部等效性导致这样的结论：**仿射流形的小区域可以用切于流形某给定点的欧几里得空间来代替**．

非欧几里得空间的引入，准确地给出了等效原理的含义和它的适用范围．

§2.2 爱因斯坦转盘

考虑两个同一平面内的同心转盘 S 和 S_0．S_0 为伽利略系（如实验室坐标系），S 绕中心轴相对于 S_0 以恒定角速度 ω 转动．在 S_0 系中，空间是欧几里得的．S 系不再是惯性系，导致洛伦兹变换的狭义相对论基本假设不再适用．标准尺和标准钟都要受到惯性力场的影响．

设 S' 系是在所研究的时刻固连于杆 $\mathrm{d}l$ 的惯性系．我们假定，S 系和 S_0 系中对应的杆长 $\mathrm{d}l$ 和 $\mathrm{d}l_0$ 的比值等于 S' 系和 S_0 系中对应的比值．这样，沿同一圆周放置的标准尺都有洛伦兹收缩．

采用柱坐标 $(r,\ \theta)$．在 S 系中两无限近的点 $(r,\ \theta)$ 和 $(r+\mathrm{d}r,\ \theta+\mathrm{d}\theta)$ 之间的距离，在 S_0 系测量，其值恒为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2. \qquad (2.2.1)$$

在 S_0 系观测，S 系中沿径向放置的尺等于单位长（$v=0$，无洛伦兹收缩）；垂直于半径放置的尺则长度变为 $\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}$．因此，在 S 系中测量上述两邻点的距离时，其值为

$$dl^2=dr^2+\frac{r^2d\theta^2}{1-\omega^2r^2/c^2}. \tag{2.2.2}$$

特殊地，如果在 S 系中测量一半径为 r 的圆的周长，则得

$$S=\int dl=\frac{r}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{S_0}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}>S_0. \tag{2.2.3}$$

周长与直径之比(S 系测得)为

$$\frac{S}{2r}=\frac{S_0}{2r\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}>\pi. \tag{2.2.4}$$

S 系测得圆的面积为

$$S=\int_0^{2\pi}\int_0^r\frac{rd\theta}{\sqrt{1-\omega^2r^2/c^2}}dr=\left(1-\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\right)\frac{2\pi c^2}{\omega^2}. \tag{2.2.5}$$

如果 $v=\omega r\ll c$，则有

$$S\approx\pi r^2\left(1+\frac{\omega^2r^2}{4c^2}\right). \tag{2.2.6}$$

用加速系(转动系 S)的标准尺所进行的一切测量，都将得到(2.2.2)～(2.2.6). 而加速系中的观察者认为只有这样的标准尺才是自然的. 因此，对于加速系中的观察者，由测量所构成的几何学是非欧几里得几何学. 他们得到的结论是：**由于存在引力场(等效原理)，使空间几何不再是欧几里得几何.**

对于上述转动参考系中的惯性力场，由式(2.2.4)可知，离中心越远的地方(引力场强越强)与欧几里得几何的偏离越大.

下面我们讨论转盘上的"直线"(短程线). 在固连于转盘的 S 系中，空间的几何性质由其中的线元

$$dl^2=g_{ab}dx^adx^b \quad (i,\ j=1,\ 2) \tag{2.2.7}$$

确定. 设 $x^1=r,\ x^2=\theta$, (2.2.8)

由(2.2.2)得

$$g_{11}=1,\ g_{22}=\frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c}, \tag{2.2.9}$$

$$g_{12}=g_{21}=0; \tag{2.2.10}$$

$$g^{11}=\frac{g_{22}}{g}=1,\ g^{22}=\frac{g_{11}}{g}=\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)r^{-2}, \tag{2.2.11}$$

$$g^{12}=g^{21}=0. \tag{2.2.12}$$

代入 Γ^c_{ab}的表达式，得到其不为零的分量：

$$\Gamma^1_{22}=-\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1}=\frac{-r}{(1-\omega^2r^2/c^2)^2},$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=\frac{1}{2}g^{22}g_{22,1}=\frac{1}{r(1-\omega^2r^2/c^2)}. \tag{2.2.13}$$

式中 $A_{,1}\equiv\frac{\partial A}{\partial x^1}$. 将(2.2.13)代入短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^c}{\mathrm{d}l^2}+\Gamma^c_{ab}\frac{\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b}{\mathrm{d}l\mathrm{d}l}=0, \tag{2.2.14}$$

得到

$$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}l^2}-\frac{r}{(1-\omega^2r^2/c^2)^2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2=0, \tag{2.2.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}l^2}+\frac{2}{r(1-\omega^2r^2/c^2)}\frac{\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l\mathrm{d}l}=0. \tag{2.2.16}$$

(2.2.16)即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)=0, \tag{2.2.17}$$

积分得

$$\frac{r^2}{1-\omega^2r^2/c^2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=k. \tag{2.2.18}$$

将上式代入(2.2.4)得

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\right)^2=1-\frac{r^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)^2=1-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right), \tag{2.2.19}$$

或者写成

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\frac{\kappa}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)=\pm\sqrt{1-\frac{\kappa^2}{r^2}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)}. \tag{2.2.20}$$

如果积分常数 $k=0$，则由(2.2.19)和(2.2.18)可得

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}=1,\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=0. \tag{2.2.21}$$

这就是说，转盘上的短程线是曲线 $\theta=\mathrm{const}$，即盘的半径.

若 $k\neq0$，短程线方程(2.2.20)可写为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=\pm\frac{r^2}{k}\left(1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}\right)^{-1}\sqrt{1-\frac{k^2}{r^2}+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}. \tag{2.2.22}$$

令

$$\rho=\frac{r}{k}\sqrt{1+\frac{\omega^2k^2}{c^2}}, \tag{2.2.23}$$

(2.2.22)可写为

$$\frac{1}{\rho^2\sqrt{1-\rho^{-2}}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}=\pm 1+\frac{k^2\omega^2/c^2}{1+\frac{k\omega^2}{c^2}}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^{-2}}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}, \tag{2.2.24}$$

积分得 $$\cos^{-1}\rho^{-1}=\pm(\theta-\theta_0)+\frac{k^2\omega^2/c^2}{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{\rho^2-1}. \tag{2.2.25}$$

取 $\theta_0=0$，我们得到

$$\theta=\pm\cos^{-1}\frac{\lambda}{\gamma}\mp\frac{\lambda\omega^2}{c^2}\sqrt{r^2-\lambda^2}. \tag{2.2.26}$$

式中 $$\lambda=\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k^2\omega^2}{c^2}}}. \tag{2.2.27}$$

图 2-3 中的三条短程线 AOA'，AB 和 BA'构成一三角形，其内角和显然介于 0 到 π 之间. 考虑由三条短程线构成的另一三角形 OHA. OA 和 OH 沿径向，AH 沿短程线. 将(2.2.11)代人两曲线间夹角的表达式*

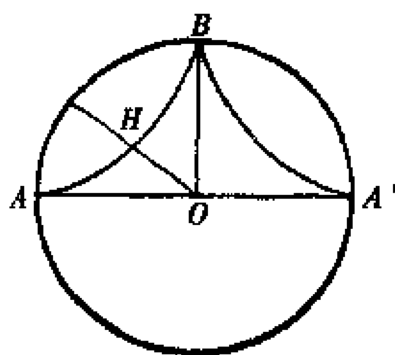


图 2-3

---

* 为了导出式(2.2.28)，我们考虑三维欧氏空间中的一个二维曲面. 欧氏空间中的直角坐标以 $X^i(i=1,2,3)$表示，曲面上的高斯坐标以 $x^a(a=1,2)$表示. 此时曲面方程可写为

$$X^i=X^i(x^a)(i=1,2,3). \tag{A$_1$}$$

曲面上两点 x^a 和 $x^a+\mathrm{d}x^a$ 之间的距离为

$$\mathrm{d}s^2=\sum_i \mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i=\left(\sum_i\frac{\partial X^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^i}{\partial x^b}\right)\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b. \tag{A$_2$}$$

令 $$g_{ab}=\sum_i\frac{\partial x^i}{\partial x^a}\frac{\partial x^i}{\partial x^b}, \tag{A$_3$}$$

则(A_2)表示为

$$\mathrm{d}s^2=g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b \quad (a,b=1,2). \tag{A$_4$}$$

另一方面，两个方向 $\mathrm{d}x^a$ 和 δx^a 之间夹角的余弦等于

$$\cos\theta=\sum_i\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}s}\frac{\delta X^i}{\delta s}, \tag{A$_5$}$$

而 $$\mathrm{d}s=\sqrt{\sum_i \mathrm{d}X^i\mathrm{d}X^i},\quad \delta s=\sqrt{\sum_i\delta X^i\delta X^i}. \tag{A$_6$}$$

将(A_2)～(A_4)代人，得到

$$\cos\theta=\frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\mathrm{d}s\delta s}=\frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\sqrt{g_{cd}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b}\sqrt{g_{ef}\mathrm{d}x^e\mathrm{d}x^f}}, \tag{A$_7$}$$

式中 $a,b,c,d,e,f=1,2$.

$$\cos\phi=\frac{g_{ab}\mathrm{d}x^a\delta x^b}{\mathrm{d}l\delta l}(a,\ b=1,\ 2). \tag{2.2.28}$$

式中 $$\mathrm{d}l^2=g_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b, \tag{2.2.29}$$

$$\delta l^2=g_{ab}\delta x^a\delta x^b,$$

δ 和 d 分别表示沿两条曲线的增量，我们得到

$$\cos\phi=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}\frac{\delta r}{\delta l}+\frac{r^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\frac{\delta\theta}{\delta l}. \tag{2.2.30}$$

考虑到(2.2.18)和(2.2.19)，可将(2.2.30)写成

$$\cos\phi=\sqrt{1-\frac{k_1^2}{r^2}+\frac{k_1^2\omega^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{k_2^2}{r^2}+\frac{k_2^2\omega^2}{c^2}}+k_1k_2\frac{1-\frac{r^2\omega^2}{c^2}}{r^2}. \tag{2.2.31}$$

式中 k_1 和 k_2 分别表示与$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l},\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)$和$\left(\frac{\delta r}{\delta l},\ \frac{\delta\theta}{\delta l}\right)$对应的积分常数 k.

现在计算短程线三角形 OHA 的内角和. 首先求出沿三条边的 κ 值. 对于 OH 和 OA，$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}=0$，故 $k_1=k_3=0$.

对于 HA，在 H 点有$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}l}=0$，由(2.2.19)得

$$k_2=\frac{r_H}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r_H^2}{c^2}}},\ r_H=OH. \tag{2.2.32}$$

将此式代入(2.2.18)得

$$\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}l}\right)_H=k_2\frac{1-\frac{\omega^2r_H^2}{c^2}}{r_H^2}=r_H^{-1}\sqrt{1-\frac{\omega^2r_H^2}{c^2}}. \tag{2.2.33}$$

代入(2.2.31)，对于点 H 有

$$r=r_H,\ k_1=0,\ k_2=\frac{r_H}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r_H^2}{c^2}}},$$

$$\cos\phi_H=0,\ \phi_H=\frac{\pi}{2}; \tag{2.2.34}$$

对于点 A(设边缘 $\omega r=c$)，我们有

$$r=\frac{c}{\omega},\ k_1=\frac{-r_H}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r_H^2}{c^2}}},\ k_3=0,$$

$$\cos\phi_A=1,\ \phi_A=0; \tag{2.2.35}$$

对于 O 点，空间为欧几里得的，故有

$$\phi_0\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{2.2.36}$$

由(2.2.34)～(2.2.36)可知，三条短程线构成的三角形其内角之和介于 0 到 π 之间：

$$\phi_H+\phi_A+\phi_0\leqslant\pi. \tag{2.2.37}$$

此式再次表明，由于引力场的存在，转盘上的空间不再遵守欧几里得几何学.

下面讨论转盘上的坐标时和本征时. 设 S 系钟 C 的读数记为 t，S_0 系钟 C_0 的读数记作 t_0，S'系钟 C'的读数记作 t'. 它们有共同的零点. 和长度测量的情况类似，我们假定 t 和 t_0 的比值与 t' 和 t_0 的比值相同(t'对应于惯性系 S'系的钟). 这就等于假定同一空间位置的两个钟的读数间存在着洛伦兹关系式：

$$t=t_0\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{2.2.38}$$

两个参考系 S 和 S_0 的观察者都发现 C 较 C_0 慢一个洛伦兹因子. S_0 系观察者把这一现象解释为 C 经受了加速过程；S 系观察者则解释为引力场的作用. 引力场的势为 $U=-\frac{1}{2}\omega^2 r$，故(2.2.38)又可写为

$$t=t_0\sqrt{1+\frac{2U}{c}}. \tag{2.2.39}$$

在 S 系中，不同位置的钟是不同步的，但位于同一半径圆周上所有钟都同步. 由式(2.2.38)确定的时间称为 S 系中的坐标时.

容易发现，若用坐标时来确定光速，则它不等于常数. 实际上，在 S_0 系中，对于光信号有

$$\mathrm{d}S_0^2=-\mathrm{d}r_0^2-r_0^2\mathrm{d}\theta_0^2-\mathrm{d}z_0^2+c^2\mathrm{d}t_0^2=0. \tag{2.2.40}$$

变换到 S 系：

$$r=r_0,\ \theta=\theta_0-\omega t_0,\ z=z_0, \tag{2.2.41}$$

我们有 $$-\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\theta^2-\mathrm{d}z^2\mp\frac{2\omega r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}}+c^2\mathrm{d}t^2=0, \tag{2.2.42}$$

或者写成 $$\mathrm{d}l_e^2\pm\frac{2\omega r^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}}-c^2\mathrm{d}t^2=0. \tag{2.2.43}$$

采用坐标时，光速应为

$$v=\frac{\mathrm{d}l_e}{\mathrm{d}t}=\left\{c^2\mp\frac{2\omega r^2}{\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right\}^{1/2}. \tag{2.2.44}$$

式中 $\mathrm{d}l_e$ 为欧几里得空间的线元：

$$\mathrm{d}l_e^2=\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2. \tag{2.2.45}$$

由(2.3.44)可见，坐标光速不等于常数 c.

下面采用本征时. 代替欧几里得空间线元 $\mathrm{d}l_e$，我们引入转盘上的非欧几里得空间线元

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}r^2+\frac{r^2\mathrm{d}\theta^2}{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}+\mathrm{d}z^2. \tag{2.2.46}$$

将此式代入(2.2.42)，得到

$$-\mathrm{d}l^2+c^2\mathrm{d}\tau^2=0, \tag{2.2.47}$$

其中 $$\mathrm{d}\tau=\sqrt{1-\frac{\omega^2r^2}{c^2}}\left(\mathrm{d}t_0\pm\frac{\omega r^2\mathrm{d}\theta}{c^2(1-\omega^2r^2/c^2)}\right). \tag{2.2.48}$$

量 τ 是与转盘上的非欧几何相对应的本征时间. 采用本征时间，则光速恒等于常数 c. 这一结论对于一般的静态引力场(取 $g_{i0}=0$)都是正确的〔见刘辽：广义相对论，§1.6〕.

§2.3 广义相对论中的空间和时间

在上一节中我们已经看到，转盘上的二维空间几何是非欧几

里得的；转盘上各处的标准钟是不同步的．其原因是这一二维空间中存在引力场．或者说，引力场使空间弯曲了；引力场改变了时空属性．在狭义相对论中，不管引力场存在与否，空间都是平直的，同一参考系中各处的钟都是同步的．或者说，在狭义相对论中，引力场的存在对时空属性没有影响(严格些说，忽略了这种影响)．

19 世纪以前，人们认为欧几里得几何学是唯一合理、唯一真实的几何学．19 世纪初，人们开始认识到非欧几何和欧几里得几何同样是合理的．但仍然认为欧几里得几何学是唯一真实的——真实的三维空间只遵守欧几里得几何学．20 世纪，广义相对论诞生．它断言二者都是真实的：当引力场不存在时，欧几里得几何是真实的；当引力场存在时，非欧几何是真实的．

对于转盘上的二维空间，我们看到，任意二曲线间的夹角(类似地，任一面元)都由度规张量 g_{ab}唯一确定．对于任意的四维时空，其几何性质、空间量，也都由度规张量 $g_{\mu\nu}$唯一确定．这就是说，只要给出线元的具体表达形式

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3), \qquad (2.3.1)$$

时空的一切性质便唯一确定．

前面我们曾讨论了转盘上的坐标时和本征时的区别．下面讨论坐标时和本征时以及坐标钟和标准钟的普遍定义，给出它们之间的关系．

在任意坐标系 x^μ 中，$t=\frac{x_0}{c}$称为**坐标时**，其时计称为**坐标钟**．在引力场中任一点，引入一局部静止惯性系($dx^i=0$)，其中静止粒子世界线长度除以 c 称为**本征时**，以 τ 表示，其时计称为**标准钟**．即

$$d\tau=\frac{ds}{c}=\sqrt{g_{00}}dt. \qquad (2.3.2)$$

此即坐标钟和标准钟的关系．

§ 2.4 引力场的势

定义引力场强 $\boldsymbol{a}$：

$$a_i = \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2},\ a_i = \gamma_{ij} a^j. \tag{2.4.1}$$

式中 γ_{ij} 为纯空间度规.

和电场的情况类似，引力场强度也可表示为标势的梯度和矢势对时间的微商. 引力场强可用一静止试验质点所受的力来量度. 在引力场中，一自由质点的运动方程应为短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\mu\sigma} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\sigma}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{2.4.2}$$

或者
$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\lambda} = 0. \tag{2.4.3}$$

试验质点瞬时静止($\mathrm{d}x^i = 0$)，上式的空间分量表示为(取参量 $\lambda = \tau$)：

$$g_{ij} \frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} \left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \right)^2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{i0} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} \right). \tag{2.4.4}$$

又有
$$\mathrm{d}s^2 = c^2 \mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}l^2 + g_{00} \mathrm{d}x^{02} \left\{ 1 - \frac{\gamma_i}{\sqrt{g_{00}}} \frac{u^i}{c} \right\}^2. \tag{2.4.5}$$

式中
$$u^i \equiv \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = c\, \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}x^0},\ \gamma_i \equiv \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}. \tag{2.4.6}$$

将(2.4.5)两边除以 $\mathrm{d}x^{02}$，解出 $\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}$，得到

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c \left\{ g_{00} \left[1 - \frac{\gamma_i u^i}{c\sqrt{g_{00}}} \right]^2 - \frac{u^2}{c^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.7}$$

式中
$$u = \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}. \tag{2.4.8}$$

上式即
$$g_{i0} \frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau} = c\gamma_i \left\{ \left[1 - \frac{\gamma_\kappa u^\kappa}{c\sqrt{g_{00}}} \right]^2 - \frac{u^2}{c^2 g_{00}} \right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.9}$$

两边对 τ 微分，并注意到 $u^i = 0$，$\mathrm{d}s^2 = g_{00}\mathrm{d}x^{02} = c^2 \mathrm{d}\tau^2$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(g_{0i}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\left\{c^2\frac{\partial\gamma_i}{\partial x^0}+\frac{\gamma_i\gamma_\kappa}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}\right\}. \tag{2.4.10}$$

又由 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}\tau^2}=\frac{1}{g_{00}}\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}. \tag{2.4.11}$$

将(2.4.6)～(2.4.11)代入(2.4.4)，得到

$$\gamma_{i\kappa}\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{c^2g_{00}}{2}\right)-c\sqrt{g_{00}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}. \tag{2.4.12}$$

令 $$U=-\frac{c^2}{2}(1-g_{00}),\text{ 即 } g_{00}=1+\frac{2U}{c^2}, \tag{2.4.13}$$

(2.4.12)可写为

$$a_i=\gamma_{i\kappa}\frac{\mathrm{d}^2x^\kappa}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\partial U}{\partial x^i}-c\sqrt{1+\frac{2U}{c^2}}\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}. \tag{2.4.14}$$

U称为标量引力势，γ_i 称为矢量引力势. 对于时轴正交系，$\gamma_i=0$.

3 引力场方程

§3.1 场方程的建立

引力场的分布确定了时-空的几何结构；反之，时空的几何结构唯一地确定了引力场的分布．而时-空的几何性质完全由度规张量 $g_{\mu\nu}$ 确定．因此，张量 $g_{\mu\nu}$ 既描述时空几何又描述引力场．换句话说，引力场就是时-空度规张量场．既然 $g_{\mu\nu}$ 作为（引力）场分布，故应满足一定形式的微分方程．按照广义协变原理，这些方程应该由同阶张量组成；方程应含有场变量 $g_{\mu\nu}$ 所构成的张量，还应含有作为场源的物质场的张量．在牛顿近似下，该方程应能退化为牛顿引力场方程．

我们知道，牛顿引力势 U 满足泊松方程：

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho. \tag{3.1.1}$$

而(2.4.13)告诉我们，引力场的势 U 与 g_{00} 有简单的关系（只差常数）．在狭义相对论中，上式右端的质量密度 ρ 又恰为能-动张量的分量 T_{00}．因此，由牛顿引力场方程(3.1.1)推断，推广后的新的引力场方程的右端应为物质场的能-动张量，左端应该是含有 $g_{\mu\nu}$ 的二阶协变导数的二阶张量．由上式还可以推断，新方程关于 $g_{\mu\nu}$ 的二阶导数应是线性的．只有这样，才能保证在近似条件下新的方程能够退化为方程(3.1.1)．

可以证明〔见 H. Vermeil, Nachr. Ges Wiss Göttingen (1917)〕，含有 $g_{\mu\nu}$ 和它的一阶、二阶导数，且对二阶导数为线性组合的二阶张量只可能取下述形式：

$$C_1R_{\mu\nu}+C_2Rg_{\mu\nu}+C_3g_{\mu\nu},\tag{3.1.2}$$

其中 C_1，C_2 和 C_3 均为常数. 因此，场方程的最普遍的可能形式应为

$$R_{\mu\nu}+ARg_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=kT_{\mu\nu}.\tag{3.1.3}$$

式中 k 由引力常数唯一确定. A 和 λ 是待定常数，可以由 Ricci 张量 $R_{\mu\nu}$的内在性质和无限远处的时空渐近性质来确定.

在狭义相对论中，能量-动量守恒定律表示为 $T^{\mu\nu}_{,\nu}=0$. 在广义相对论中自然应推广为 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$. 这样，应该要求

$$(R^{\mu\nu}+ARg^{\mu\nu})_{;\nu}=0.\tag{3.1.4}$$

将此式与附录中(7.16)式比较，知

$$A=-\frac{1}{2}.\tag{3.1.5}$$

于是(3.1.3)可写为

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=kT_{\mu\nu}.\tag{3.1.6}$$

对于真空的情况，$T_{\mu\nu}=0$，(3.1.6)简化为

$$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=0.\tag{3.1.7}$$

这一方程中只含有 $g_{\mu\nu}$和它们的导数. 这表明，λ 的值只能由整体空间的几何性质决定. 如果承认无引力场时，空间是欧几里得的，那么时空结构就必须满足条件

$$R_{\mu\nu\gamma\lambda}=0.\tag{3.1.8}$$

(3.1.8)是时空平直的充分且必要条件. 此式应导致

$$R_{\mu\nu}=0.\tag{3.1.9}$$

实验观测结果表明，在数十万光年的空间范围内，(3.1.9)是和实验结果符合得很好的. 在太阳系内的实验观测就更加准确地与(3.1.9)相合. 于是可以断定，λ 值应该等于零或极其微小.

我们有理由认为，“没有物质场($T_{\mu\nu}=0$)的空间是欧几里得的”这是小范围空间内的经验概念，可望在更大的空间范围内会与欧几里得几何有偏离；那时才有必要考虑场方程中的 $\lambda g_{\mu\nu}$一项($\lambda\neq0$). 因此，常数 λ 称为宇宙因子. $[\lambda]=[L^{-2}]$，L 为宇宙距离，数量级为宇宙半径.

方程(3.1.6)即爱因斯坦引力场方程. 它可以写为下述形式:

$$R^{\nu}_{\mu}-\frac{R}{2}\delta^{\nu}_{\mu}+\lambda\delta^{\nu}_{\mu}=kT^{\nu}_{\mu}, \tag{3.1.10}$$

$$R^{\mu\nu}-\frac{R}{2}g^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=kT^{\mu\nu}; \tag{3.1.11}$$

或者注意到 $R=4\lambda-kT$, 有

$$R^{\nu}_{\mu}+\lambda\delta^{\nu}_{\mu}=k\left(T^{\nu}_{\mu}+\frac{T}{2}\delta^{\nu}_{\mu}\right), \tag{3.1.12}$$

$$R^{\mu\nu}+\lambda g^{\mu\nu}=k\left(T^{\mu\nu}+\frac{T}{2}g^{\mu\nu}\right), \tag{3.1.13}$$

$$R_{\mu\nu}+\lambda g_{\mu\nu}=k\left(T_{\mu\nu}+\frac{T}{2}g_{\mu\nu}\right). \tag{3.1.14}$$

§3.2 牛顿极限

我们讨论弱引力场的情况. 在线元 $\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu}$ 的表达式中, 取 $x^0=ct$, t 为时间坐标. 线元表达式右端各项中, $g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0$ 比 $2g_{0k}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^k$ 要大一个量级, 而 $2g_{0k}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^k$ 又要比 $g_{kl}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l$ 大一个量级. 因此, 忽略一阶小量时有 $\mathrm{d}s^2\approx g_{00}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^0$. 显然, 当速度 $\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\ll c$ 或者 $\mathrm{d}x^k\ll c\mathrm{d}t$ 时上述条件成立, 这正是牛顿极限条件.

在短程线方程

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}s^2}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}s}=0 \tag{3.2.1}$$

中, 我们引入另一参量 λ(沿短程线):

$$\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}, \tag{3.2.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\alpha}}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}^2x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right)^2+\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2}. \tag{3.2.3}$$

将(3.2.2)和(3.2.3)代入(3.2.1), 得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda^2}+\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda}=-\frac{\mathrm{d}^2\lambda}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{3.2.4}$$

现在取参量 λ 为时间坐标 x^0, 此时(3.2.4)可写为

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\dot{x}^\mu. \tag{3.2.5}$$

式中一点表示对 x^0 求微商. 上式的零分量为

$$\ddot{x}^0 + \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = -\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2}\dot{x}^0.$$

但是 $\dot{x}^0=1$, $\ddot{x}^0=0$. 故有

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^{-2} = -\Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta. \tag{3.2.6}$$

将上式代入(3.2.4), 得到

$$\ddot{x}^\mu + (\Gamma^\mu_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^\mu)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3.2.7}$$

由于 $\ddot{x}^0=0$ 和 $\dot{x}^0=1$, 上式的零分量是一恒等式, 因此它等效于下面的方程:

$$\ddot{x}^i + (\Gamma^i_{\alpha\beta} - \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^i)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta = 0. \tag{3.2.8}$$

注意到 $\dot{x}^i = \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}$, 有 $\Gamma^i_{\alpha\beta} \gg \Gamma^0_{\alpha\beta}\dot{x}^i$. 同时, 考虑到 $\dot{x}^0 \gg \dot{x}^\tau$, 上式最后简化为

$$\ddot{x}^i = -\Gamma^i_{00}. \tag{3.2.9}$$

此式表明 Γ^i_{00}是单位质量试验粒子所受的牛顿力. 我们还可以进一步简化 Γ^i_{00}的表达式:

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(2\frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{\sigma 0}}{\partial x^\sigma}\right) \approx -\frac{1}{2}\eta^{i\sigma}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \tag{3.2.10}$$

结果得到最低级近似下的短程线方程

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \tag{3.2.11}$$

考虑到 $g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}$, 上式可用引力标势 U 表示:

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x^i} \tag{3.2.12}$$

或
$$\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\partial U}{\partial x^i}. \tag{3.2.13}$$

此式表明 U 即为牛顿引力势.

下面讨论场方程的牛顿极限. 考虑忽略宇宙项的场方程

$$R_{\mu\nu}=k\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right). \tag{3.2.14}$$

在最低级近似下，我们有

$$T=T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\approx T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}\approx T_{00}\eta^{00}=T_{00}. \tag{3.2.15}$$

由此得 $R_{00}=k\left(T_{00}-\frac{1}{2}g_{00}T\right)\approx$

$$k\left(T_{00}-\frac{1}{2}\eta_{00}T\right)=\frac{1}{2}kT_{00}=\frac{1}{2}k\rho c^2. \tag{3.2.16}$$

式中 ρ 为引力场源物质的密度. R_{00}的渐近式还可以由 $\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}$，给出：

$$R_{00}=\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{00}}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{0\lambda}}{\partial x^{0}}+\Gamma^{\sigma}_{00}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}-\Gamma^{\sigma}_{0\lambda}\Gamma^{\lambda}_{0\sigma}\approx\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{00}}{\partial x^{\lambda}}\approx\frac{\partial\Gamma^{k}_{00}}{\partial x^{k}}. \tag{3.2.17}$$

将(3.2.10)代入上式，得到

$$R_{00}\approx\frac{1}{2}\sum_{i}\frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i\partial x^i}=\frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}=\frac{1}{c^2}\nabla^2 U. \tag{3.2.18}$$

式中∇^2 为三维拉普拉斯算符.

比较(3.2.16)和(3.2.18)，得到

$$\nabla^2 U=\frac{1}{2}kc^4\rho. \tag{3.2.19}$$

将上式与牛顿引力场方程$\nabla^2 U=4\pi G\rho$ 比较，得到常数 k 的值：

$$k=\frac{8\pi G}{c^4}. \tag{3.2.20}$$

至此，爱因斯坦引力场方程(3.1.3)中的常数 A 和 k 均已确定.

§3.3 关于宇宙因子 λ 的讨论

起初爱因斯坦引入宇宙因子 λ 是为了得到静态宇宙解. 对于不等于零的平均密度 $T^0_0=\rho c^2=\text{const}$，$\lambda$ 应等于 $8\pi G\rho/c^2$. 后来发现了红移，爱因斯坦倾向于 $\lambda=0$ 的场方程. 1930 年以前，人们详细研究了 $\lambda\neq 0$ 的宇宙解(静态的和非静态的). 但是直到 1967 年以前，人们一直没有完全确认引入宇宙因子 λ 的必要性和真实性. 1967 年，类星体按红移分布的一种解释指出，λ 可能不为零，

具有量级 $\lambda \approx 10^{-55} \text{cm}^{-2}$.

至今，上述解释也没有被完全证明．甚至在用于一些新观测到的类星体时遇到了困难．但是另一方面，讨论过程表明，简单地假定 $\lambda=0$ 也没有根据，大多数学者不认为 $\lambda=0$．可以预料，近些年仍然很难确定 λ 值或它的极限值．

宇宙因子有什么物理含义?为什么学者们对它如此感兴趣呢?

前面曾指出，λ 的量纲是 $[\lambda]=\text{cm}^{-2}$．由此可以把它看作空的空间(没有物质和引力波)的曲率．而引力理论把曲率和能量、动量、物质压强联系起来．在式(3.1.6)中，将 λ 项移到右端，我们得到

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=kT_{\mu\nu}-\lambda g_{\mu\nu}. \tag{3.3.1}$$

$\lambda \neq 0$ 意味着空的空间产生了引力场．它相当于充满整个空间的物质，其密度为

$$\rho_\lambda=\frac{c^2\lambda}{8\pi G}, \tag{3.3.2}$$

能量密度为

$$\varepsilon_\lambda=\frac{c^4\lambda}{8\pi G}, \tag{3.3.3}$$

压强为 $$P_\lambda=-\varepsilon_\lambda=-\frac{c^4\lambda}{8\pi G}. \tag{3.3.4}$$

对于 $\lambda \approx 10^{-55}\text{cm}^{-2}$，$\rho_\lambda \approx 10^{-28}g/\text{cm}^3$，$\varepsilon_\lambda \approx 10^{-7}\text{erg}/\text{cm}^3$.

在这个意义上，可以说真空具有能量密度 ε_λ 和压强 P_λ(压强张量).

这里应指出，对于 ε_λ 和 ρ_λ，我们做了这样的假定：理论的相对论协变性不被破坏；ε_λ 和 P_λ 在 Lorentz 变换下是不变的.

上述各量在基本粒子实验和原子、分子物理实验中不表现出来．进行实验的局部空间中的真空能量起着常数项的作用，可以在能量守恒定律中被消掉.

ε_λ 和 P_λ 只在引力现象中出现．由(3.3.1)可见，宇宙项在场方程中是和物质场能-动张量平权的一项，它们同样作用于空间.

因此，卡文迪许实验原则上应可以用来发现和测量 ε_λ 及 P_λ. 两铅球的引力取决于铅的密度和真空的密度 $\rho_\lambda(|\rho_\lambda|<10^{-28}g/cm^3)$，积分时遍及铅球的体积.

实际测量 ε_λ 和 P_λ 是不可能的. 无论用实验室中的实验、观测太阳系中行星的运动，还是观测银河系中恒星的运动，都无法测得 ε_λ 和 P_λ 的值. 实际上，在太阳系中，在半径等于地球轨道半径的空间范围内，物质的平均密度为 $\langle\rho\rangle\approx10^{-7}\mathrm{g/cm^3}$，在银河系中为 $10^{-24}\mathrm{g/cm^3}$. ρ_λ 的效应均无法观测(可忽略不计). 它的影响只能在宇宙尺度上表现出来.

关于 λ 的性质，一些学者认为，确定的值 λ 和对应的 ρ_λ、ε_λ、P_λ 均作为宇宙常数，不再作进一步的解释. 另一种观点是假定零级近似：$\lambda=\rho_\lambda=\varepsilon_\lambda=P_\lambda=0$.

下面我们先回顾一下关于真空能量的理论发展，再说明关于建立宇宙因子 λ 的理论的一些观点.

第一批关于电磁场量子化的尝试导致了真空能量密度无限大的佯谬. 真空作为所研究系统的最低能态(例如在研究电磁现象时用 Maxwell 方程组表征)，粒子(如光子)是基本的受激系统. 类似于量子力学中原子核在晶体点阵中运动的图像：基本的受激态叫作光子(声子、量子)；在晶体的基态不含有光子，即具有零温度. 这个状态类似于真空. 晶体基态的能量具有完全确定的值，是可以测量的. 同一元素的不同的同位素，其基态能量依赖于同位素原子气体的温度. 在最简单的场论方案中，基态具有无限大的能量. 但是可以改变一下理论的形式，使得自由场的自由态能量等于零.

在经典 Maxwell 理论中，能量密度等于 $\varepsilon=\dfrac{E^2+H^2}{8\pi}$. 里弗西兹(Lifshitz)曾指出，不存在一种量子电动力学理论，能使真空中 E^2 或 H^2 的平均值等于零(离电荷很远并且不存在实光子). 因此，为了借助于通常的算符乘积来构成这些理论，使真空 $\varepsilon=0$，就必须放弃 ε 与场强之间的经典关系式.

真空能量的另一种来源是由狄拉克(Dirc)电子理论给出的.负能态被充满的思想不可避免地导致能量密度具有负值. 在这种情况下，也必须改变原理论，使得对于无相互作用的真空 ϵ 恒等于零. 但是不能保证在有相互作用时真空能量仍为零. 按照现在的理论，不仅实粒子之间存在相互作用，而且虚粒子也有相互作用. 注意这里“相互作用”一术语和经典意义上的不同. 在经典物理中谈到两个碰撞物体的相互作用，质子和电子的库仑相互作用等；在量子场论中谈到4-费米相互作用(当中子，电子，质子和中微子散射时)和光子-电子相互作用(当电子辐射光子时).

众所周知，自由电子不能辐射实光子. 但是可以说自由电子辐射然后又吸收了虚光子. 这将使电子的质量和磁矩发生变化，正如 Lemb 实验所证实的那样. 实验测定电子质量的变化是不可能的，因为不可能测量失去虚光子后电子的质量. 但是电子磁矩的变化却可以测出来.

还有许多类似的过程，例如电子对(e^+，e^-)在真空中产生和湮灭.

现在，真空的组成和性质的理论不像 60 年前那么简单和明显.

真空能量理论的第一个可能方案是假定在没有场和相互作用时真空的能量恒等于零；当它们存在时真空的能量不等于零. 引入实粒子时它应等于一个附加常数. 根据这一方案建立的粒子理论可以使所得结果不依赖于未知的(不确定的或无限大的)真空能量. 费曼正是这样做的. 他把跃迁幅 A_{12}(真空加始态 1 的粒子→真空加末态 2 的粒子)分解成 A_V(真空→真空)和比值 A_{12}/A_V 的积. 只有 A_{12}/A_V 才是与实粒子相互作用对应的真实值. 这一方案使真空能量问题得到了很好的解决，但是这一方案不包含引力场. 在引力理论中，真空的能量密度如前面所说，是真实的，原则上可观测的.

在粒子理论中，真空能量理论的第二个方案，即公理式的方案，假定真空的能量密度和相应的压强恒等于零.

这一假定只能作为一种可能性提出.有些文献中出现这样的断言:这一公理是必须的，只有这样才能与相对论的不变性相符合.这样的断言是不正确的.正如前面指出的，真空的压力 P_λ 和能量密度 ε_λ 均不为零，它们之间的关系 $P_\lambda=-\varepsilon_\lambda$(由场方程得出)具有相对论不变性.

我们指出，像粒子理论一样，原则上可以估计 ε_λ 的量级，它不等于零且保持相对论不变性.这里应注意，常常在研究有限体积 V 内的能量 $E=\varepsilon V$ 时发生错误.真空的三维动量 P 显然等于零，因为真空中无法分辨方向.能量和动量构成四维矢量(E, $\boldsymbol{P}$);对于给定的体积，这 4-矢量是(E, 0).这样的组合显然不是不变量.如果不假定 $E=0(\varepsilon=0)$，在另一相对于该坐标系运动的坐标系中将有 $\boldsymbol{P}\neq0$.错误发生在选择了特殊的有限体积，因为这违背相对论不变性.无限的(非局域的)介质，其中包括真空，可以用能量密度表征，它是一个能-动张量的分量 T_0^0.此张量的其余分量 T_0^i($i=1$, 2, 3)同时描述空间的能流和动量密度.能-动张量的分量 T_ν^μ 对应于弹性理论中的张力.对于流体(各向同性的)$T_\nu^\mu=P\delta_\nu^\mu$.

在这里重复这些众所周知的内容是为了强调，问题不在于真空是否具有能-动矢量，而在于是否存在能-动张量.不存在具有相对论不变性的矢量(它的大小恒等于零)，但是完全有可能存在相对论不变的张量.在洛伦兹系中，这一张量应有形式

$$T_{\mu,\nu}=\text{const}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{3.3.5}$$

而这正是在 $\lambda\neq0$ 的情况下所提到的那个张量.人们没有理由先验地排除这样的与真空相联系的张量.

现在仍然存在的问题是:

1. 是否存在某种要求 $\lambda\neq0$ 的原理?

2. 我们是否应该把 λ 看作新的独立的常数?或者说:

3. 能否由其他的普适常数来计算 λ(尽管只是量级)?

下面我们试图回答第三个问题，不涉及前两个问题. 这一回答(根据量纲和量级的比较)也许有利于构成更正确的和最终的理论.

在实验物理中，我们测量(真空＋粒子)系统和单独真空系统的能量之差，不等于零的 ε_λ 在计算中被消掉了. 按照真空极化理论和量子的粒子理论所作的全部工作都是这样的.

量 ε_λ 只在引力理论中才引入. 虽然没有精确的理论，但是我们可以借助于量纲的分析提出重要的设想.

基本粒子理论使人们能够建立具有 ε_λ 的量纲的量. 由理论基本常数可以构成能量 mc^2，长度 $\frac{h}{mc}$，密度 $\left(\frac{mc}{h}\right)^3$ 和 $\varepsilon_\lambda=mc^2\times\left(\frac{mc}{h}\right)^3$. 这样得到的量 ε_λ 明显的不合用. 因为以电子质量代入时得 $\varepsilon_\lambda=10^{22}\mathrm{erg/cm^3}$，以质子质量代入时得 $\varepsilon_\lambda\sim10^{35}\mathrm{erg/cm^3}$. 这些数值远大于宇宙学中假定的值($\varepsilon_\lambda<10^{-7}\mathrm{erg/cm^3}$). 正因为这样，物理学家才本能地反对 $\lambda\neq0$;如果不能取更大的 ε_λ(相应地取更大的 λ)，则什么都谈不到.

在天文学家的影响下，人们发现将 $mc^2\left(\frac{mc}{h}\right)^3$ 乘以一个表征引力的无量纲因子$\frac{Gm^2}{hc}$，可能构造出一个合理的 ε_λ. 这一表达式为

$$\varepsilon_\lambda=\left(\frac{Gm^2}{hc}\right)\cdot mc^2\cdot\left(\frac{mc}{h}\right)^3=\frac{Gm^2}{\lambda}\cdot\frac{1}{\lambda^3},\quad \lambda=\frac{h}{mc}. \quad (3.3.6)$$

这一表达式可以解释为:在真空中产生虚粒子，质量为 m，它们的平均空间距离为 λ; 假定它们的总的本征能量为零，使得真空的总能量密度只决定于相邻粒子间的相互作用. 对于 $m=m_e$，上式给出 $\varepsilon_\lambda=10^{-19}\mathrm{erg/cm^3}$; 对于 $m=m_p$，上式给出 $\varepsilon_\lambda=1\mathrm{er/cm^3}$. 宇宙学所假定的 ε_λ 值介于二者之间.

还有一个问题，人们常说 $\lambda\neq0$ 意味着引力子具有不为零的静止质量，这似乎不合理. 我们知道，当 $\lambda\neq0$ 时，即使物质不存在，时空也不可能是平直的. 而在弯曲空间中引力子质量的定义

是不明确的.

宇宙因子项如果不等于零，它的数值也是很小的，它的效应只在宇宙学中才可能出现，这一点是无凝的.

§3.4 引力场的变分原理

前面已经建立了爱因斯坦引力场方程.本节将由引力场的变分原理得到这一组场方程.为了使所得到的场方程具有协变性，最好的途径是由变分原理出发进行推导.在许多非爱因斯坦引力理论中也都是这样做的.问题的关键在于选择适当的作用量泛函.

引入标量泛函

$$I = I_g + I_f = \int (L_g + L_f)\ \sqrt{-g}\mathrm{d}^4x. \qquad (3.4.1)$$

式中 I_g 和 L_g 分别表示引力场的作用量和拉格朗日函数，I_f 和 L_f 分别表示除引力场之外的所有其他场的作用量和拉格朗日函数. L_g 和 L_f 的表示式取为

$$L_g = R,\ L_f = -2\kappa L_f. \qquad (3.4.2)$$

式中 k 为爱因斯坦引力常数，$k=8\pi G/c^4$.

变分原理表示为

$$\delta I = 0. \qquad (3.4.3)$$

首先计算 δI_g.

$$\delta I_g = \delta\int \sqrt{-g}R\mathrm{d}^4x = \delta\int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x = \int \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x + \int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x. \qquad (3.4.4)$$

为了求出 $\delta R_{\mu\nu}$，采用短程线坐标系.此时有

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta\left\{\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\right\} =$$

$$\delta\left\{\frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\right\} =$$

$$\frac{\partial(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})}{\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})}{\partial x^{\nu}}=$$

$$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}. \tag{3.4.5}$$

在上式中，注意到$(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})$是张量. 这是一个张量方程，因此，它在任何参考系中的任何时空点都成立，不局限于短程线参考系. 于是式(3.4.4)右端第一项的被积式可写为

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}&=\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\{(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}\}=\\&\sqrt{-g}\,\{(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda})_{;\nu}\}=\\&\sqrt{-g}\,\{(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_{;\lambda}-(g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma})_{;\lambda}\}=\\&\sqrt{-g}\,V^{\lambda}_{;\lambda}.\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

式中

$$V^{\lambda}=g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} \tag{3.4.7}$$

为一逆变矢量. 由此得到

$$\int\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=\int\frac{\partial(\sqrt{-g}\,V^{\lambda})}{\partial x^{\lambda}}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.8}$$

此式由高斯定理化为沿系统边界面的面积分. 在系统边界面上$\delta g^{\mu\nu}$(从而$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$)为零，因此上式等于零：

$$\int\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\mathrm{d}^4x=0. \tag{3.4.9}$$

(3.4.4)右端第二项为

$$\begin{aligned}&\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x=\\&\int\sqrt{-g}\,R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x+\int R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}\delta\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x=\\&\int\sqrt{-g}\,R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x+\int R\delta\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^4x.\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

其中右端第二项中$\delta\sqrt{-g}$可由行列式性质得到〔见附录(5.28)式〕：

$$\delta\sqrt{-g}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\delta g=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{3.4.11}$$

于是有

$$\int R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\mathrm{d}^4x=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.12}$$

将上式和(3.4.9)代入(3.4.4)得

$$\delta I_g=\delta\int\sqrt{-g}R\mathrm{d}^4x=$$

$$\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.13}$$

下面计算除引力场以外的其他场作用量 I_f 的变分 δI_f. 由(3.4.1)和(3.4.2)知

$$\delta I_f=-2k\delta\int\sqrt{-g}L_f\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.14}$$

由变分学可知，对于泛函

$$I=\int F(q^\mu,\ q^\mu_{,\lambda},\ q^\mu_{,\lambda_1\lambda_1},\ \cdots q^\nu_{,},q^\nu_{,\lambda},q^\nu_{,\lambda_1\lambda_1},\ \cdots)\mathrm{d}^nx, \tag{3.4.15}$$

其变分表示为

$$\delta I=\int\left\{\frac{\delta F}{\delta q^\mu}\delta q^\mu+\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda}}\delta q^\mu_{,\lambda}+\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}}\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}+\cdots+\right.$$

$$\left.\frac{\delta F}{\delta q^\nu}\delta q^\nu+\frac{\delta F}{\delta q^\nu_{,\lambda}}\delta q^\nu_{,\lambda}+\frac{\delta F}{\delta q^\nu_{,\lambda_1\lambda_1}}\delta q^\mu_{,\lambda,\lambda_1}+\cdots\right\}\mathrm{d}^nx. \tag{3.4.16}$$

式中各变分导数表示为

$$\frac{\delta F}{\delta q^\mu}=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left(\frac{\partial F}{\partial q^\mu_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}}\right)_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}; \tag{3.4.17}$$

$$\frac{\delta F}{\delta q^\mu_{,\lambda}}=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\left(\frac{\partial F}{\partial q_{,\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}}\right)_{,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}. \tag{3.4.18}$$

设(3.4.14)中的 L_f 不含有 $g^{\mu\nu}$的高于一阶偏导数：

$L_f=L_f(g^{\mu\nu},\ g^{\mu\nu}_{,\lambda})$，代入(3.4.15)～(3.4.18)得

$$\delta I_f=-2k\int\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu}+\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda}\right\}\mathrm{d}^4x. \tag{3.4.19}$$

(3.4.19)右端被积式中第二项可写为

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}=$$

$$\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}{}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}\right]_{,\lambda}-\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu}{}_{,\lambda}^{\nu}}\right]_{,\lambda}\delta g^{\mu\nu}. \quad (3.4.20)$$

上式第一项代入(3.4.19)化为沿系统边界面的面积分，等于零(因为边界面上 $\delta g^{\mu\nu}=0$). 将上式第二项代入(3.4.19)得

$$\delta I_f=-2k\int\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}-\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu}{}_{,\lambda}^{\nu}}\right]_{,\lambda}\right\}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x.$$

(3.4.21)

定义能-动张量 $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu}=\frac{2}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}-\left[\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right]_{,\lambda}\right\}, \quad (3.4.22)$$

我们得到

$$\delta I_f=-k\int\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \quad (3.4.23)$$

由(3.4.23)和(3.4.13)可知作用量 I 的变分 δI 为

$$\delta I=\int\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R-kT_{\mu\lambda}\right)\delta g^{\mu\nu}\mathrm{d}^4x. \quad (3.4.24)$$

令 $\delta I=0$，考虑到 $\delta g^{\mu\nu}$的任意性，得到

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=kT_{\mu\nu}. \quad (3.4.25)$$

如果在作用量 I 中引入宇宙作用量

$$I_\lambda=c\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x, \quad (3.4.26)$$

式中 c 为一待定常数. 则有

$$\delta I_\lambda=\frac{c}{2}\int g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x.$$

此时由 $\delta(I_g+I_f+I_\lambda)=0$ 得

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\lambda g_{\mu\nu}=kT_{\mu\nu}. \quad (3.4.27)$$

式中 $\lambda=\frac{c}{2}$. 此即含宇宙项的爱因斯坦引力场方程.

§ 3.5 广义相对论 Maxwell 方程

根据广义协变原理，我们可以将狭义相对论中四维形式的 Maxwell 方程推广到弯曲空间. 原则上讲，只要将普通导数换为协变导数即可.

当电磁场存在时，因为它属于引力场以外的物质场，它应影响时空几何性质. 电磁场的能-动张量作为引力场方程中 $T_{\mu\nu}$ 的一个组成部分，应以明显形式给出. 我们仍从变分原理出发.

如果除引力场之外只有电磁场存在，则由狭义相对论推广到弯曲空间的情况，(3.4.14)中的 L_f 应具有形式

$$L_f=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{c}J^{\mu}A_{\mu}+L_e. \tag{3.5.1}$$

式中 J^{μ} 为四维电流密度，L_e 为电荷对 L_f 的单独贡献. 现在考虑纯电磁场的情况，即上式后两项为零：

$$L_f=-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{3.5.2}$$

注意到 $F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}$，可知$(L_f\ \sqrt{-g})$只是 $g_{\mu\nu}$ 和 A_{μ} 的函数.

首先，保持 A_{μ} 不变，对 $g_{\mu\nu}$ 求变分. 此时 $F_{\mu\nu}=$canst，而 $F^{\mu\nu}\neq$ const. 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}&=-\frac{1}{16\pi}F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}\frac{\partial(\sqrt{-g}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma})}{\partial g^{\mu\nu}}=\\&-\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}\Big\{g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}+\\&\sqrt{-g}(g^{\alpha\rho}\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\sigma}_{\nu}+g^{\beta\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu})\Big\}=\\&-\frac{1}{16\pi}\left(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}+2\sqrt{-g}F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right),\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

$$\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g^{\mu\nu}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial g^{\mu\nu}}=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}. \tag{3.5.4}$$

最后得

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}L_f)}{\partial g^{\mu\nu}}=\frac{\sqrt{-g}}{8\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right). \qquad (3.5.5)$$

令

$$E_{\mu\nu}=T_{\mu\nu(em)}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}\right), \qquad (3.5.6)$$

此式正是(4.3.1a)的推广. 将(3.5.5)代入 $\delta I=\delta(I_g+I_f)=0$，便得到 Einstein-Maxwell 方程：

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=kE_{\mu\nu}. \qquad (3.5.7)$$

张量 E^{ν}_{μ} 是零迹的：

$$E=E^{\lambda}_{\lambda}=g^{\lambda\sigma}E_{\lambda\sigma}=0. \qquad (3.5.8)$$

将(3.5.7)缩并得 $R=-kE$，所以 $R=0$，(3.5.7)简化为

$$R_{\mu\nu}=kE_{\mu\nu}. \qquad (3.5.9)$$

上式是只存在电磁场时的爱因斯坦引力场方程.

有电荷存在时，作用量应增加一项. 对于电荷为 e 的单个粒子，增加的一项为

$$I_e=-e\int A_\mu \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}\tau=-e\int A_\mu u^\mu \mathrm{d}s\mathrm{d}\tau. \qquad (3.5.10)$$

式中积分 $\mathrm{d}s$ 沿世界线.

为了避免奇点，我们讨论带电物质连续分布的情况. 设每一物质元带有电荷. 在每一点 x^μ，有速度矢量 u^μ(可有一因子与之相乘). 我们总可以确定一逆变矢量密度 $\mathscr{T}^\mu$，它与 u^μ 同方向，并使

$$\mathscr{T}^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \qquad (3.5.11)$$

表示某一体元 d^3x 内的电荷，而使

$$\mathscr{T}^1\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \qquad (3.5.12)$$

表示时间间隔 $\mathrm{d}x^0$ 内通过面元 $\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 的电量. 由于电荷守恒，于是有

$$\mathscr{T}^\mu_{;\mu}=0. \qquad (3.5.13)$$

设一电荷元由位置 x^μ 移到位置 $x^\mu+h^\mu$，h^μ 为一阶小量. 我们要确定给定点 x^μ 处 $\mathscr{T}^\mu$ 的变化.

首先考虑 $h^0=0$ 的情况，在一三维体积 V 内，电荷的增量等

于通过 V 的界面流出的电量的负值：

$$\delta\int_V \mathscr{T}^0 \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 = -\int_S \mathscr{T}^0 h^i \mathrm{d}s_i \,. \tag{3.5.14}$$

式中 S 为 V 的界面. 根据高斯定理，可以把上式右端的面积分换成体积分. 于是得到

$$\delta\mathscr{T}^0 = -(\mathscr{T}^0 h^i)_{,i}. \tag{3.5.15}$$

下面将(3.5.15)推广到 $h^0 \neq 0$ 的情况. 我们注意到，如果 h^μ 正比于 $\mathscr{T}^\mu$，则物质元沿其世界线移动，从而 $\mathscr{T}^\mu$ 不变. 这样，上式 应推广为

$$\delta\mathscr{T}^0 = (\mathscr{T}^i h^0 - \mathscr{T}^0 h^i)_{,i}. \tag{3.5.16}$$

这是因为当 $h^0=0$ 时上式与(3.5.15)相合；而当 h^μ 正比于 $\mathscr{T}^\mu$ 时，上式给出 $\delta\mathscr{T}^0=0$. 对于 $\mathscr{T}^\mu$ 的其他分量有相应的式子，所以可写为

$$\delta\mathscr{T}^\mu = (\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h^\nu)_{,\nu} \tag{3.5.17}$$

量 $\mathscr{T}^\mu$ 是连续带电物质流作用量中的基本变 量. 经过变分和适当的分部积分运算后，令 h^μ 的系数等于零，便给出电荷的运动方程.

对于带电物质连续分布的情况，带电粒子的作用量(3.5.10)应写为

$$I_e = -\int \mathscr{T}^0 A_\mu u^\mu \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}s. \tag{3.5.18}$$

引进度规时可令

$$\mathscr{T}^\mu = \rho_e u^\mu \sqrt{-g}. \tag{3.5.19}$$

式中 ρ_e 为一标量，表征电荷密度. 于是(3.5.18)变为

$$I_e = -\int \rho_e A_\mu u^\mu \sqrt{-g}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}x^0 = -\int A_\mu \mathscr{T}^\mu \mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3\mathrm{d}s. \tag{3.5.20}$$

由此得

$$\delta I_e = -\int \{\mathscr{T}^\mu \delta A\mu + A\mu(\mathscr{T}^\nu h^\mu - \mathscr{T}^\mu h^\nu)_{,\nu}\}\mathrm{d}^4x =$$

$$\int\{-\rho_e u^\mu\sqrt{-g}\delta A_\mu+A_{\mu,\nu}(\mathscr{T}^\nu h^\mu-\mathscr{T}^\mu h^\nu)\}\mathrm{d}^4x=$$

$$\int\rho_e(-u^\mu\delta A_\mu+F_{\mu\nu}u^\nu h^\mu)\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x. \qquad (3.5.21)$$

代入变分原理

$$\delta_I=\delta(I_g+I_{em}+I_\lambda+I_e+I_m)=0. \qquad (3.5.22)$$

式中括号内各项分别表示引力场、电磁场、真空场、电荷和物质场的作用量，我们可以得到上述各类场和引力场相互作用的方程. 为此，将前面得到的 δI_g，δI_{em}，δI_λ，δI_e 和 δI_f[即(3.4.23)]代 入(3.5.22)，并注意到(3.5.17)，然后分别令 $\delta g_{\mu\nu}$，δA_μ 和 h^μ 的系数为零.

(1) $\delta g_{\mu\nu}$的系数为零给出

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+\lambda g_{\mu\nu}=k(T_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}). \qquad (3.5.23)$$

这就是有电磁场和物质场存在时的 Einstein-Maxwell 方程，右端的 $T_{\mu\nu}$表示物质场的能量-动量张量.

(2) δA_μ 的系数为零给出

$$-\rho_e u^\mu+F^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0. \qquad (3.5.24)$$

由(3.5.19)可知 $\rho_e u^\mu=J^\mu$ 为电流密度矢量，因此上式即为引力场中的 Maxwell 方程：

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=J^\mu. \qquad (3.5.25)$$

至于另一组 Maxwell 方程，很容易由 $F_{\mu\nu}$的反对称性得到. 实际上，由 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$和 $\Gamma^\mu_{\sigma\tau}=\Gamma^\mu_{\tau\sigma}$得到

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu}F_{\lambda\rho}+\Gamma^\rho_{\nu\mu}F_{\rho\lambda}=$$

$$\Gamma^\rho_{\lambda\mu}F_{\nu\rho}+\Gamma^\rho_{\mu\lambda}F_{\rho\nu}=\Gamma^\rho_{\nu\lambda}F_{\mu\rho}+\Gamma^\rho_{\lambda\nu}F_{\rho\mu}=0.$$

将这三个等于零的式子与狭义相对论中对应的方程

$$F_{\mu\nu,\lambda}+F_{\nu\lambda,\mu}+F_{\lambda\mu,\nu}=0. \qquad (3.5.26)$$

相加，便得到

$$F_{\mu\nu;\lambda}+F_{\nu\lambda;\mu}+F_{\lambda\mu;\nu}=0. \qquad (3.5.27)$$

这就是另一组 Maxwell 方程(在引力场中).

(3) 式(3.5.23)中的连续物质的 $T_{\mu\nu}$可由与引入 $\mathscr{T}^\mu$ 类似的

过程引入 Q^μ 而得到(零压情况)，其结果为

$$T_{\mu\nu}=\rho u_\mu u_\nu. \tag{3.5.28}$$

此时 h^μ 的系数为零给出

$$\rho u_{\mu;\nu}u^\nu+p_e F_{\mu\nu}u^\nu=0,$$

即

$$-\rho u_{\mu;\nu}u^\nu+F_{\mu\nu}J^\nu=0. \tag{3.5.29}$$

式中第二项给出洛伦兹力，它使物质元的运动偏离短程线.

方程(3.5.29)也可由守恒定律得到. 即由

$$(\rho u^\mu u^\nu+E^{\mu\nu})_{;\nu}=0 \tag{3.5.30}$$

导出. 由于

$$E^{\mu\nu}_{;\nu}=F^{\mu\alpha}F^\nu_{\alpha;\nu}+F^{\mu\alpha}_{;\nu}F^\nu_\alpha-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta;\nu}=$$

$$F^{\mu\alpha}F^\nu_{\alpha;\nu}+\frac{1}{2}g^{\mu\rho}F^{\nu\sigma}(F_{\rho\sigma;\nu}-F_{\rho\nu;\sigma}-F_{\nu\sigma;\rho})=-F^{\mu\alpha}J_\alpha,$$

我们得到

$$u^\mu(\rho u^\nu)_{;\nu}+\rho u^\mu_{;\nu}u^\nu-F^{\mu\alpha}J_\alpha=0. \tag{3.5.31}$$

上式乘以 u_μ 缩并，并注意

$$u_\mu u^\mu_{;\sigma}=0, \tag{3.5.32}$$

得到

$$(\rho u^\nu)_{;\nu}=-F^{\mu\alpha}u_\mu J_\alpha=0. \tag{3.5.33}$$

这里用了条件 $J_\alpha=\rho_e u_\alpha$，即 J_α 与 u_α 同一方向. 将(3.5.33)代入(3.5.31)，便得到(3.5.29).

在这里，我们选择自然单位制($c=G=1$).

§3.6 物质的运动方程和物质场的能-动张量

当电磁场不存在时，爱因斯坦引力场方程可写为(对于零压流体)

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=8\pi\rho u_\mu u_\nu. \tag{3.6.1}$$

从方程(3.6.1)可以导出物质守恒方程和物质运动方程——短程

线方程. 为此，将方程两端求协变散度，得到

$$(\rho u^\mu u^\nu)_{;\nu}=0,$$

即

$$u^\mu(\rho u^\nu)_{;\nu}+\rho u^\nu u^\mu_{;\nu}=0. \tag{3.6.2}$$

上式乘以 u_μ 缩并，注意到 $u_\mu u^\mu_{;\nu}=0$，得到

$$(\rho u^\nu)_{;\nu}=0, \tag{3.6.3}$$

此即物质守恒方程. 将此式代回(3.6.2)，便得到短程线方程〔附录(8.11)〕:

$$u^\nu u^\mu_{;\nu}=0. \tag{3.6.4}$$

这就是说，对于一个物质元，把真空引力场方程应用到该物质元的周围空间，则其运动被约束在一短程线上.

由场方程可以导出场源的运动方程，或者说，场方程中包含了场源的运动方程，这是引力场特有的性质.

电磁场不具有上述性质. 由电磁场方程

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu}=J^\mu$$

求协变散度，注意到 $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$，得到

$$J^\mu{}_{;\mu}=0, \tag{3.6.5}$$

这是电荷守恒定律. 由此可见，电磁场方程本身只包含场源的守恒律，与场源的运动方程无关. 这表明，在电动力学中，可以在满足守恒律的条件下任意给定场源(电荷)的分布和运动来求解场方程. 而在引力理论中，引力场源(物质系统)的运动方程必须与引力场方程同时求解.

下面我们给出几种场源物质的能-动张量的具体形式.

各向同性理想流体的能-动张量与狭义相对论中的形式相同:

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}. \tag{3.6.6}$$

式中 ρ 表示随动坐标系中的能量密度，p 是压强. 如果以 ρ 表示质量密度，还常加内能项 $\rho\pi$.

在随动坐标系中，流体的动量和能量流均为零，所以

$$T_{0\mu}=T_{\mu0}=0. \tag{3.6.7}$$

由于压强各向同性，故有

$$T_\mu{}^\nu=T\,\delta_\mu{}^\nu. \tag{3.6.8}$$

于是 $T_{\mu\nu}$具有简单形式：

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \tag{3.6.9}$$

沿 x 轴正方向以光速运动的相对论粒子，其能-动张量可写为

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \rho & \rho & 0 & 0 \\ \rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.10}$$

上述粒子沿 x 轴反方向运动时，其能-动张量可写为

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \rho & -\rho & 0 & 0 \\ -\rho & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.11}$$

所有方向的粒子流叠加，便得到相对论气体的能-动张量($p=\rho/3$).

在洛伦兹系中，沿 $x^1=x$ 方向的纯磁场($H_y=H_z=E_i=0$)的能-动张量可写为

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}, \tag{3.6.12}$$

此式是(3.5.6)的特殊情况. 式中 $\rho=\frac{H^2}{8\pi}$，为能量密度. 沿 x 轴方向作用有负压力($T_{11}=-\rho$)，沿 y 轴和 z 轴作用有正压力(ρ). 如果场强不是沿着一个确定的轴，而是任意的，则 $T_{\mu\nu}$中会有不为零的对角元素. 但是它的迹T_i^i(在直角坐标系中等于$-T_{11}-T_{22}-T_{33}$)保持不变.

对于纯磁场，将能-动张量按最大不均匀程度取平均，我们

得到

$$T_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & \rho/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \rho/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \rho/3\end{pmatrix}. \tag{3.6.13}$$

即纯磁场平均地看类似于气体，它具有特殊的态方程 $p=\rho/3$. 我们重新得到了前面的结果.

§3.7 李导数和时-空的对称性

对于坐标变换 $x\to x'$，度规 $g_{\mu\nu}(x)$变为$g'_{\mu\nu}(x')$. 如果$g'_{\mu\nu}(x)$作为 x 的函数的形式与$g'_{\mu\nu}(x')$作为 x 的函数的形式相同，则将$g'_{\mu\nu}(x')$中的 x'换为 x 时，所得函数$g'_{\mu\nu}(x)$便与 $g_{\mu\nu}(x)$相等了：

$$g'_{\mu\nu}(x)=g_{\mu\nu}(x). \tag{3.7.1}$$

如果对于所有点 x^μ，(3.7.1)均成立，则称度规 $g_{\mu\nu}(x)$对于坐标变换 $x\to x'$**是形式不变的**(注意上述条件与标量的变换条件不同).

在任一点 x^μ，度规的变换式为

$$g'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}g_{\lambda\sigma}(x), \tag{3.7.2}$$

$$g_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}g'_{\lambda\sigma}(x'). \tag{3.7.3}$$

将(3.7.1)代入得

$$g_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}g_{\lambda\sigma}(x'). \tag{3.7.4}$$

满足(3.7.4)的变换称为**等度量变换**.

在时空中同一点，可以用两个坐标系 x^μ 和x'^μ 来描述. 例如在 Minkowski 时空中的每一点，既可用 $x^\mu=(ct, x, y, z)$描述，也可用球坐标$x'^\mu=(ct, r, \theta, \phi)$描述. 两坐标之间有确定的变换关系. 本节中我们引入一种本质不同的坐标变换，从而引入 Lie 导数的概念，以便用来讨论时空的对称性.

条件(3.7.4)对函数$x'^{\mu}=x'^{\mu}(x)$是一个很复杂的限制.为了使其简化，我们讨论特殊情况.考虑一坐标变换

$$\tilde{x}^{\mu}=\tilde{x}^{\mu}(\varepsilon, x). \tag{3.7.5}$$

式中

$$x^{\mu}=\tilde{x}^{\mu}(0, x), \tag{3.7.6}$$

ε为一参量.方程(3.7.5)表示变换$x\to\tilde{x}$的一个单参量族.

设时空中有一点P，以坐标x^{μ}标志；同一时空中我们指定另一点Q，以坐标$\tilde{x}^{\mu}$标志.$\tilde{x}^{\mu}$和x^{μ}属于同一坐标系.因此，变换(3.7.5)表示一个**时空映射(向自身的)**.

再考虑(3.7.5)的一个特殊情况——无穷小变换：

$$\tilde{x}^{\mu}=x^{\mu}+\varepsilon\xi^{\mu}(x), \ |\varepsilon|\ll 1. \tag{3.7.7}$$

这便是一个**无穷小映射**.式中ε是一个无穷小参量，$\xi^{\mu}(x)$是一个逆变矢量场.$\xi^{\mu}(x)$由下式确定：

$$\xi^{\mu}(x)=\left.\frac{\partial\tilde{x}^{\mu}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{3.7.8}$$

考虑同一时空中的一个张量场$T(x)$.在点$Q(\tilde{x}^{\mu})$，我们可以用两种不同的方法确定张量T的值.首先，在坐标系x^{μ}中，有T的值$T(\tilde{x})$.另一方面，用通常坐标变换的方法得到$\tilde{x}^{\mu}$系中T的值$\tilde{T}(\tilde{x})$.这样，在坐标为$\tilde{x}^{\mu}$的点Q,张量T有两个不同的值,二者之差便给出张量T的**Lie导数的概念**.

下面分别给出标量场、矢量场和张量场的Lie导数.

1. 标量场$\phi(x)$

在点Q，ϕ的值为$\phi(\tilde{x})$.可将$\phi(\tilde{x})$在x^{μ}处按ε作无限小展开：

$$\phi(\tilde{x})=\phi(x+\varepsilon\xi)=\phi(x)+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^{\alpha}}\xi^{\alpha}. \tag{3.7.9}$$

另一方面，按定义，标量函数ϕ在坐标变换下是不变的，即

$$\tilde{\phi}(\tilde{x})=\phi(x). \tag{3.7.10}$$

式中$\tilde{\phi}$是定值在点Q的一个函数，其坐标为$\tilde{x}^{\mu}$；而ϕ是定值在点P的，其坐标为x^{μ}.

标量函数的 Lie 导数记作 $\mathscr{L}_\xi\phi(x)$，其定义为

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(\tilde{x})-\tilde{\phi}(\tilde{x})}{\varepsilon}. \tag{3.7.11}$$

将(3.7.9)和(3.7.10)代入上式到

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x)=\xi^\alpha(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.12}$$

即函数 ϕ 的 Lie 导数恰为矢量 ξ^α 和 ϕ 的梯度的标量积.

还可以用另一途径给出标量函数 ϕ 的 Lie 导数. 我们认为所有函数都定值在点 P. 这时函数$\tilde{\phi}(\tilde{x})$展开为

$$\tilde{\phi}(\tilde{x})=\tilde{\phi}(x+\varepsilon\xi)=\tilde{\phi}(x)+\varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.13}$$

将(3.7.10)代入得

$$\phi(x)-\tilde{\phi}(x)=\varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial\tilde{\phi}(x)}{\partial x^\alpha}+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.14}$$

于是有

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(x)-\tilde{\phi}(x)}{\varepsilon}=\xi^\alpha(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.15}$$

在引力场中，我们应该用协变导数代替上式中的偏导数. 注意到 $\phi(x)$是标量函数，上式可直接写为

$$\mathscr{L}_\xi\phi(x)=\xi^\alpha(x)[\phi(x)]_{;\alpha}. \tag{3.7.16}$$

按照标量函数 Lie 导数的定义式，一般张量 T 的 Lie 导数定义为

$$\mathscr{L}_\xi T(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{T(x)-\tilde{T}(x)}{\varepsilon}. \tag{3.7.17}$$

下面讨论矢量和二阶张量的 Lie 导数表示式.

2. 逆变矢量场 A^μ

对于无限小坐标变换(3.7.7)，矢量 A^μ 按下式变换：

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})=\frac{\partial\tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}A^\alpha(x). \tag{3.7.18}$$

由(3.7.7)得

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}=\delta^\mu_\alpha+\varepsilon\,\frac{\partial \xi^\mu}{\xi x^\alpha}. \tag{3.7.19}$$

代入(3.7.18)得

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})=A^\mu(x)+\varepsilon A^\alpha(x)\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.20}$$

将 $\tilde{A}^\mu(\tilde{x})$在点 x^μ 展开：

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})=\tilde{A}(x)+\varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\alpha}+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.21}$$

比较(3.7.21)和(3.7.20)，得到

$$\tilde{A}^\mu(x)=A^\mu(x)+\varepsilon\left(A^\alpha\,\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}-\xi^\alpha\,\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}\right)+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.22}$$

式中所有函数都定值在 P 点.

由此得

$$\mathscr{L}_\xi A^\mu=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{A^\mu(x)-\tilde{A}(x)}{\varepsilon}=\xi^\alpha\,\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}-A^\alpha\,\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.23}$$

上式中的偏导数可代之以协变导数：

$$\mathscr{L}_\xi A^\mu=\xi^\alpha\,A^\mu{}_{;\alpha}-A^\alpha\,\xi^\mu{}_{;\alpha}. \tag{3.7.24}$$

3. 协变矢量场 A_μ

按照同样的方法，我们有

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x})=\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}A_\alpha(x). \tag{3.7.25}$$

将(3.7.7)对 $\tilde{x}^\nu$ 求导得

$$\delta_\nu{}^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}+\varepsilon\,\frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

代入(3.7.25)，得到

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x})=A_\mu(x)-\varepsilon A_\alpha(x)\frac{\partial \xi^\alpha(x)}{\partial x^\mu}+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.26}$$

将 $\tilde{A}(\tilde{x})$在 P 点展开：

$$\tilde{A}_\mu(\tilde{x})=\tilde{A}_\mu(x)+\varepsilon\xi^\alpha(x)\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\alpha}+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.27}$$

比较(3.7.26)和(3.7.27)得

$$\tilde{A}_\mu(x)=A_\mu(x)-\varepsilon\left(A_\alpha\,\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}+\xi^\alpha\,\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha}\right)+o(\varepsilon^2). \tag{3.7.28}$$

按定义(3.7.17)有

$$\mathscr{L}_\xi A_\mu = \xi^\alpha \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} + A^\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{3.7.29}$$

上式中的偏导数可代之以协变导数，我们最后得到协变矢量的 Lie 导数.

$$\mathscr{L}_\xi A_\mu = \xi^\alpha A_{\mu;\alpha} + A_\alpha \xi^\alpha{}_{;\mu}. \tag{3.7.30}$$

4. 二阶张量场 $T_{\mu\nu}$ 和 $T^{\mu\nu}$

对于无限小坐标变换(3.7.7)，$T_{\mu\nu}$的变换式为

$$\widetilde{T}_{\mu\nu}(\widetilde{x}) = T_{\mu\nu}(x) - \epsilon\left(T_{\mu\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} + T_{\alpha\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) + o(\epsilon^2). \tag{3.7.31}$$

另一方面，将 $\widetilde{T}_{\mu\nu}(\widetilde{x})$按 x^μ 展开，得到，

$$\widetilde{T}_{\mu\nu}(\widetilde{x}) = \widetilde{T}_{\mu\nu}(x) + \epsilon\xi^\alpha \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + o(\epsilon^2). \tag{3.7.32}$$

比较上二式，得到

$$\widetilde{T}_{\mu\nu}(x) = \widetilde{T}_{\mu\nu}(x) - \epsilon\left(\xi^\alpha \frac{\partial T_{\mu\alpha}}{\partial x^\alpha} + T_{\mu\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} + T_{\alpha\gamma}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\right) + o(\epsilon^2). \tag{3.7.33}$$

于是有

$$\mathscr{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\alpha \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + T_{\mu\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} + T_{\alpha\nu}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}. \tag{3.7.34}$$

对于二阶逆变张量 $T^{\mu\nu}$，类似地可以得到

$$\mathscr{L}_\xi T^{\mu\nu} = \xi^\alpha \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} - T^\mu{}_\alpha \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\alpha} - T^{\mu\alpha}\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.35}$$

我们可以将上二式中的偏导数代之以协变导数：

$$\mathscr{L}_\xi T_{\mu\nu} = \xi^\alpha T_{\mu\nu;\alpha} + T_{\mu\alpha}\xi^\alpha{}_{;\nu} + T_{\alpha\nu}\xi^\alpha{}_{;\mu}, \tag{3.7.36}$$

$$\mathscr{L}_\xi T^{\mu\nu} = \xi^\alpha T^{\mu\nu}{}_{;\alpha} - T^{\mu\alpha}\xi^\nu{}_{;\alpha} - T^{\alpha\nu}\xi^\mu{}_{;\alpha}. \tag{3.7.37}$$

对于度规张量场，由上二式可得

$$\mathscr{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\nu;\mu}, \tag{3.7.38}$$

$$\mathscr{L}_\xi g^{\mu\nu} = -(\xi^{\nu;\mu} + \xi^{\mu;\nu}), \tag{3.7.39}$$

$$(\nabla^\mu = g^{\mu\alpha}\nabla_\alpha).$$

5. 矢量和张量的积

可以证明，矢量和张量的积的 Lie 导数满足下式：

$$\mathscr{L}_\xi(AT) = A\mathscr{L}_\xi T + (\mathscr{L}_\xi A)T. \tag{3.7.40}$$

作为例子，我们计算 $\mathscr{L}_{\xi}(A^{\alpha}T_{\alpha\rho})$.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\xi}(A^{\alpha}T_{\alpha\rho})=&\xi^{\beta}(A^{\alpha}T_{\alpha\rho})_{;\beta}+A^{\alpha}T_{\alpha\beta}\xi^{\beta}_{;\rho}=\\&\xi^{\beta}(A^{\alpha}T_{\alpha\rho;\beta}+T_{\alpha\rho}A^{\alpha}_{;\beta})+A^{\alpha}T_{\alpha\beta}\xi^{\beta}_{;\rho}=\\&A^{\alpha}(\xi^{\beta}T_{\alpha\rho;\beta}+T_{\alpha\beta}\xi^{\beta}_{;\rho}+T_{\beta\rho}\xi^{\beta}_{;\alpha})+\\&T_{\alpha\rho}(\xi^{\beta}A^{\alpha}_{;\beta}-A^{\beta}\xi^{\alpha}_{;\beta})=\\&A^{\alpha}\mathscr{L}_{\xi}T_{\alpha\rho}+(\mathscr{L}_{\xi}A^{\alpha})T_{\alpha\rho}.\end{aligned}$$

6. 标量密度$(\omega=+1)$

设 A 为标量，则其密度为

$$\underset{\sim}{\mathscr{A}}=\sqrt{-g}A.$$

将 $\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(\bar{x})$在点 x^{μ} 展开，得到

$$\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(\bar{x})=\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(x+\varepsilon\xi)=\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(x)+\varepsilon\xi^{\alpha}\frac{\partial\widetilde{\mathscr{A}}}{\partial x^{\alpha}}+o(\varepsilon^{2}).\tag{3.7.41}$$

另一方面，函数 $\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}$ 的变换为

$$\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(\bar{x})=\sqrt{-\tilde{g}(\bar{x})}\tilde{A}(\bar{x})=\sqrt{-\tilde{g}(\bar{x})}A(x).\tag{3.7.42}$$

由 $\tilde{g}=\left|\frac{\partial x}{\partial\bar{x}}\right|^{2}g$，可将上式写为

$$\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(\bar{x})=\left|\frac{\partial x}{\partial\bar{x}}\right|\sqrt{-g(x)}A(x)=\left|\frac{\partial x}{\partial\bar{x}}\right|\underset{\sim}{\mathscr{A}}(x).\tag{3.7.43}$$

又由(3.7.7)可得

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial\bar{x}^{\nu}}=\delta_{\nu}^{\ \mu}-\varepsilon\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial x^{\nu}}+o(\varepsilon^{2}),\tag{3.7.44}$$

从而有

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\bar{x}}\right|=1-\varepsilon\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial x^{\mu}}+o(\varepsilon^{2}).\tag{3.7.45}$$

将上式代入(3.7.43)得

$$\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}(\bar{x})=\underset{\sim}{\mathscr{A}}(x)-\varepsilon\underset{\sim}{\mathscr{A}}(x)\frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial x^{\mu}}+o(\varepsilon^{2}).\tag{3.7.46}$$

比较(3.7.41)和(3.7.46)，得到

$$\widetilde{\underset{\sim}{\mathscr{A}}}=\underset{\sim}{\mathscr{A}}-\varepsilon\left(\xi^{\alpha}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x^{\alpha}}+\mathscr{A}\frac{\partial\xi^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}}\right)+o(\varepsilon^{2}),$$

$$\mathscr{L}_\xi \mathscr{A} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathscr{A}'(x) - \mathscr{A}(x)}{\epsilon} = \xi^\alpha \frac{\partial \mathscr{A}}{\partial x^\alpha} + \mathscr{A} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}. \tag{3.7.47}$$

我们可以将上式中的偏导数改写为协变导数：

$$\mathscr{L}_\xi \mathscr{A} = \xi^\alpha \mathscr{A}_{;\alpha} + \mathscr{A} \xi^\alpha_{;\alpha}. \tag{3.7.48}$$

§3.8 Killing 矢量

从本节开始，我们应用 Lie 导数的概念讨论度规张量的对称性，即讨论时-空的对称性.

上节开头我们谈到了等度量变换(3.7.2)或(3.7.1). 按照 Lie 导数的定义，无穷小变换

$$\tilde{x} = x^\mu + \epsilon \xi^\mu \tag{3.8.1}$$

为等度量变换的条件即度规张量的 Lie 导数等于零. 此时由(3.7.38)有

$$\xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu} = 0. \tag{3.8.2}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}(x)$ 在变换(3.8.1)下是形式不变的，这就是说时空映射为其自身. 这种映射称为**共形映射**.

可以看出，方程(3.8.2)的解 $\xi_\mu(x)$ 存在，是时空中存在共形映射的条件. 方程(3.8.2)称为 **Killing 方程**；它的解 $\xi_\mu(x)$ 称为 **Killing 矢量**. 当然，给定一时空，Killing 方程不一定有解. 没有对称性的时空，此方程无解.

一般地说，如果存在 Killing 矢量，即 Killing 方程有解，则对应的时空具有确定的对称性.

Killing 方程(3.8.2)是对时空的很强的约束条件. 由这一方程，我们可以从 ξ_μ 和 $\xi_{\mu;\nu}$ 的给定值来决定整个函数 $\xi_\mu(x)$. 下面我们论证这一点.

矢量 ξ_μ 的两次协变导数的对易式为〔附录(7.5)〕：

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} - \xi_{\mu;\sigma;\rho} = R^\tau_{\mu\rho\sigma} \xi_{;\tau}. \tag{3.8.3}$$

将上式脚标作两次循环，并将所得二式与上式相加，得到 ξ_μ 须满足的式子：

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma}-\xi_{\mu;\sigma;\rho}+\xi_{\sigma;\mu;\rho}-\xi_{\rho;\mu;\sigma}+\xi_{\rho;\sigma;\mu}-\xi_{\sigma;\rho;\mu}=0. \tag{3.8.4}$$

将 Killing 方程(3.8.2)代入上式得

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma}-\xi_{\mu;\sigma;\rho}-\xi_{\sigma;\rho;\mu}=0. \tag{3.8.5}$$

于是(3.8.3)可写为

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu}=R^{\tau}_{\mu\rho\sigma}\xi_{\tau}. \tag{3.8.6}$$

此式表明，在某一给定的点 $\bar{x}$，一旦给出 $\xi_{\tau}(\bar{x})$ 和 $\xi_{\tau;\lambda}(\bar{x})$，便可求得 $\xi_{\tau}(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处的二阶导数值. 再对(3.8.6)求导数，可继续求得 $\xi_{\tau}(x)$ 在 $\bar{x}$ 的高阶导数值. 这样，$\xi_{\tau}(x)$ 在 $\bar{x}$ 点的各阶导数值均可表示为 $\xi_{\tau}(\bar{x})$ 和 $\xi_{\tau;\lambda}(\bar{x})$ 的线性组合. 于是在点 $\bar{x}$ 的邻域内可将函数 $\xi_{\tau}(x)$ 表示为 $(x^{\lambda}-\bar{x}^{\lambda})$ 的泰勒级数. 即任一度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的 Killing 矢量 $\xi^{n}_{\rho}(x)$ 可以写为

$$\xi^{n}_{\rho}(x)=M^{\lambda}_{\rho}(x;\bar{x})\xi^{n}_{\lambda}(\bar{x})+N^{\lambda\nu}_{\rho}(x;\bar{x})\xi_{\lambda;\nu}{}^{n}(\bar{x}). \tag{3.8.7}$$

式中 M^{λ}_{ρ} 和 $N^{\lambda\nu}_{\rho}$ 是度规和 $\bar{x}$ 的函数，但不含有 $\xi_{\lambda}(\bar{x})$ 和 $\xi_{\lambda;\nu}(\bar{x})$，因此它们对于所有的 Killing 矢量都是相同的. 这就是说，所有 Killing 矢量 $\xi_{\rho}(x)$ 都可由任一给定点 $\bar{x}$ 处的 $\xi_{\rho}(\bar{x})$ 和 $\xi_{\rho;\lambda}(\bar{x})$ 值唯一确定.

下面我们讨论 N 维空间中最多能有多少个 Killing 矢量. 考虑一组 Killing 矢量 $\xi^{n}_{\mu}(x)$，其中 n 表示序号，从 1 取到 M(即共有 M 个矢量). 对于每一个 n，显然有 N 个独立的 $\xi^{n}_{\mu}(\bar{x})$. 注意到式(3.8.2)，知 $\xi^{n}_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 和 $\xi^{n}_{\nu;\mu}(\bar{x})$ 不是独立的. 因此，独立的量 $\xi^{n}_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 的个数等于

$$C^{2}_{N}=\frac{1}{2}N(N-1). \tag{3.8.8}$$

式中 C^{2}_{N} 表示从 N 个元素中任取 2 个的组合数. 这样，在式(3.8.7)的右端有 $N+\frac{N}{2}(N-1)=\frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的项 $\xi^{n}_{\mu}(\bar{x})$ 和 $\xi^{n}_{\mu;\nu}(\bar{x})$；只能组成 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的 Killing 矢量 $\xi^{n}_{\mu}(x)$. 这里我们不妨把 $\xi^{n}_{\mu}(\bar{x})$ 和 $\xi^{n}_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 看作这 M 个矢量在 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 维空间中的分量. 如果 $M>\frac{1}{2}N(N+1)$，则这 M 个矢量不可能是线

性独立的，所以它们必须满足关系式

$$C_n\xi^n_\rho(\bar{x})=C_n\xi^n_{\rho;\nu}(\bar{x})=0\ (C_n\ 为常数).\tag{3.8.9}$$

由(3.8.7)知 Killing 矢量 $\xi^n_\rho(x)$处处满足条件

$$C_n\xi^n_\rho(x)=0,\tag{3.8.10}$$

所以它们不是独立的 Killing 矢量. 至此，我们证明了一个定理：**在 N 维空间中最多能有 $\frac{1}{2}N(N+1)$ 个独立的 Killing 矢量.** 这里独立的矢量定义为不满足任何常系数线性关系(3.8.10)的矢量.

根据这一定理，四维时空最多能有 10 个 Killing 矢量. 下面我们将求出四维 Minkowski 平直时空的 killing 矢量. 这时 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$,

$$\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&-1\end{pmatrix}.\tag{3.8.11}$$

将上式代入 Killing 方程(3.8.2)并取 $\mu,\nu=0,1,2,3$，得到四个方程

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^0}=\frac{\partial\xi_1}{\partial x^1}=\frac{\partial\xi_2}{\partial x^2}=\frac{\partial\xi_3}{\partial x^3}=0,\tag{3.8.12}$$

和另外六个方程

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial x^i}=-\frac{\partial\xi_i}{\partial x^0},\tag{3.8.13}$$

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial x^k}=-\frac{\partial\xi_k}{\partial x^i}.\tag{3.8.14}$$

方程(3.8.12)的解具有形式

$$\xi_0=\xi_0(x^i),\xi_1=\xi_1(x^0,x^2,x^3),$$

$$\xi_2=\xi_2(x^0,x^1,x^3),\xi_3=\xi_3(x^0,x^1,x^2).\tag{3.8.15}$$

方程(3.8.13)的左端不含 x^0，而右端不含 x^i($i=1$ 或 2,3)，所以两端都必须等于常数. 同理，(3.8.14)两端也都必须等于常数. 于是(3.8.13)和(3.8.14)的解具有形式

$$\xi_\mu(x)=a_{\mu\nu}x^\nu+\zeta_\mu.\tag{3.8.16}$$

式中 $a_{\mu\nu}$和 ζ_μ 为常数，且 $a_{\mu\nu}=-a_{\nu\mu}$. 上式写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}\xi_0\\ \xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03}\\ -\alpha_{01} & 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ -\alpha_{02} & -\alpha_{12} & 0 & \alpha_{23}\\ -\alpha_{03} & -\alpha_{13} & -\alpha_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\zeta_0\\ \zeta_1\\ \zeta_2\\ \zeta_3\end{pmatrix}. \tag{3.8.17}$$

逆变分量为

$$\xi^\mu(x)=\eta^{\mu\nu}\xi_\mu(x)=\alpha^\mu_\lambda x^\lambda+\zeta^\mu. \tag{3.8.18}$$

式中

$$\alpha^\mu_\lambda=\eta^{\mu\nu}\alpha_{\nu\lambda},\zeta^\mu=\eta^{\mu\nu}\zeta_\nu. \tag{3.8.19}$$

上式可写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\xi^0\\ \xi^1\\ \xi^2\\ \xi^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03}\\ \alpha_{01} & 0 & -\alpha_{12} & \alpha_{31}\\ \alpha_{02} & \alpha_{12} & 0 & -\alpha_{23}\\ \alpha_{03} & -\alpha_{31} & \alpha_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\ x^1\\ x^2\\ x^3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\zeta^0\\ \zeta^1\\ \zeta^2\\ \zeta^3\end{pmatrix}. \tag{3.8.20}$$

上式明显地给出了 Killing 矢量的几何意义. 矢量 ζ^μ 显然描述 Minkowski 空间中沿 x^μ 轴的平移. 它们是 Poincare 群之平移子群的无限小生成元，是 Minkowski 平直空间的对称群. 另外 6 个参量 $\alpha_{\mu\nu}$显然描述平直空间中的 6 个 Lorentz 转动. 它们中每一个描述一个三维转动或者一个均匀的 Lorentz 变换(缩短). 其中 α_{23}，α_{31}和 α_{12}分别描述绕 $x^i(i=1,2,3)$轴的三维转动，可以用矩阵表示为

$$\alpha^1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\alpha^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}; \tag{3.8.21}$$

α_{01}，α_{02}，α_{03}分别描述沿 x^i 轴的 Lorentz 缩短，可用矩阵表示为

$$\alpha^4=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\alpha^5=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\alpha^6=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}. \tag{3.8.22}$$

利用上二式，可将(3.8.20)改写为

$$(\xi^\mu)=((\alpha_{23}\alpha^1+\alpha_{31}\alpha^2+\alpha_{12}\alpha^3)+$$
$$(\alpha_{01}\alpha^4+\alpha_{02}\alpha^5+\alpha_{03}\alpha^6))(x^\mu)+(\zeta^\mu). \tag{3.8.23}$$

为了说明无限小 Lorentz 矩阵的确满足通常均匀 Lorentz 群的对易关系，我们令

$$J_l=i\alpha^l(l=1,2,3),$$
$$K_l=i\alpha^p(p=4,5,6\text{ 分别与 }l=1,2,3\text{ 对应}). \tag{3.8.24}$$

此时容易得到($l,m,n=1,2,3$)：

$$[J_l,J_m]=i\varepsilon_{lmn}J_n, \tag{3.8.25a}$$
$$[K_l,K_m]=-i\varepsilon_{lmn}J_n, \tag{3.8.25b}$$
$$[J_l,K_m]=i\varepsilon_{lmn}K_n, \tag{3.8.25c}$$

式中$[A,B]\equiv AB-BA$.

令

$$J_l=\frac{1}{2}\varepsilon_{lmn}J_{mn},K_l=iJ_{ol}. \tag{3.8.26}$$

式中 J_{lm}关于脚标具有和 ε_{lm}相同的对称性. 此时可将(3.8.25)诸式合写为一个式子：

$$[J_{l\lambda},J_{\mu\nu}]=i(\delta_{l\mu}J_{\lambda\nu}+\delta_{\lambda\nu}J_{l\mu}-\delta_{l\nu}J_{\lambda\mu}-\delta_{\lambda\mu}J_{l\nu}). \tag{3.8.27}$$

用无限小矩阵 $\alpha^l(l=1,2,\cdots,6)$可以表示三维有限转动和有限 Lorentz 变换：

$$\alpha^l(\psi)=\exp(\psi\alpha^l)=I+\psi\alpha^l+\frac{\psi^2}{2!}(\alpha^l)^2+\frac{\psi^3}{3!}(\alpha^l)^3+\cdots. \tag{3.8.28}$$

式中 I 为 4×4 单位矩阵. 当 $l=1$,容易得到

$$(\alpha^1)^{2m+1}=(-1)^m\alpha^1,\ (\alpha^1)^{2m}=(-1)^{m+1}(\alpha^1)^2,\quad m=1,2,\cdots. \tag{3.8.29}$$

其中 α^1 已由(3.8.21)给出,而 $(\alpha^1)^2$ 可写为

$$(\alpha^1)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{3.8.30}$$

将(3.8.30)和(3.8.29)代入(3.8.28)得

$$\alpha^1(\psi)=I+\left(\psi-\frac{1}{3!}\psi^3+\cdots\right)\alpha^1+\left(\frac{1}{2!}\psi^2-\frac{1}{4!}\psi^4+\cdots\right)(\alpha^1)^2=I+\sin\psi\alpha^1+(1-\cos\psi)(\alpha^1)^2. \tag{3.8.31}$$

写成矩阵形式即

$$\alpha^1(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos\psi&-\sin\psi\\0&0&\sin\psi&\cos\psi\end{pmatrix}. \tag{3.8.32a}$$

用同样方法可以得到

$$\alpha^2(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\psi&0&\sin\psi\\0&0&1&0\\0&-\sin\psi&0&\cos\psi\end{pmatrix}, \tag{3.8.32b}$$

$$\alpha^3(\psi)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\psi&-\sin\psi&0\\0&\sin\psi&\cos\psi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{3.8.32c}$$

$$\alpha^4(\psi)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\psi & \mathrm{sh}\psi & 0 & 0\\ \mathrm{sh}\psi & \mathrm{ch}\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.8.32d}$$

$$\alpha^5(\psi)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\psi & 0 & \mathrm{sh}\psi & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \mathrm{sh}\psi & 0 & \mathrm{ch}\psi & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.8.32e}$$

$$\alpha^6(\psi)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\psi & 0 & 0 & \mathrm{sh}\psi\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \mathrm{sh}\psi & 0 & 0 & \mathrm{ch}\psi\end{pmatrix}. \tag{3.8.32f}$$

由(3.8.28)可知

$$\alpha^l=\frac{\mathrm{d}\alpha^l(\psi)}{\mathrm{d}\psi}\bigg|_{\psi=0}\quad(l=1,2,\cdots,6). \tag{3.8.33}$$

(3.8.32a)～(3.8.32c)中的 ψ 表示转动前后两个 Lorentz 标架间的夹角，而(3.8.32d)～(3.8.32f)中的 ψ 表示相互运动的两个 Lorentz 标架间的转动角.

我们可以证明，如果两坐标系的相对速度为 v，则 ψ 和 v 之间存在关系式

$$\mathrm{sh}\psi=\frac{-v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\mathrm{ch}\psi=1/\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{3.8.34}$$

设两个坐标系间的变换以(3.8.32d)表示，且设 $x^0=ct$，$x_1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$，则

$$\begin{aligned}ct'&=ct\mathrm{ch}\psi+x\mathrm{sh}\psi,\\ x'&=ct\mathrm{sh}\psi+x\mathrm{ch}\psi,\\ y'&=y,\\ z'&=z.\end{aligned} \tag{3.8.35}$$

对于 x^μ 系原点有 $x=0$，代入上式得

$$\frac{x'}{t'}=-v=\mathrm{cth}\psi, \tag{3.8.36}$$

从而得(3.8.34).

将(3.8.34)代入(3.8.35)便得到沿 x 轴运动的 Lorentz 变换式:

$$t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad x'=\frac{x-vx}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\quad y'=y,z'=z. \tag{3.8.37}$$

用同样方法可以得到沿 y 轴和 z 轴运动的 Lorentz 变换式.

至此,我们得到了 Minkowski 空间中 Killing 方程的全部解——10 个 Killing 矢量,它们表示 Poincare 群的 10 个参量. 这是四维空间中 Killing 方程所能有的最多的解. 因此,Minkowski 空间是具有最大对称性的时空.

为了使问题的表述更加明显,我们解与空间 $E(2)$ 中欧几里得群对应的 Killing 方程.

在 $E(2)$ 中度规可写为

$$g_{ab}=\delta_{ab}(a,b=1,2). \tag{3.8.38}$$

Killing 方程为

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial x^b}+\frac{\partial\xi^b}{\partial x^a}=0, \tag{3.8.39}$$

即

$$\frac{\partial\xi^1}{\partial x}+\frac{\partial\xi^2}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\xi^1}{\partial y}+\frac{\partial\xi^2}{\partial x}=0. \tag{3.8.40}$$

由此得到

$$\xi^1=\xi^1(y),\quad \xi^2=\xi^2(x), \tag{3.8.41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\xi^2(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}\xi^1(y)}{\mathrm{d}y}. \tag{3.8.42}$$

上式两端必须都等于一常数,以 ϕ 表之,积分得

$$\begin{aligned}\xi^2&=\phi x+A,\\ \xi^1&=-\phi y+B.\end{aligned} \tag{3.8.43}$$

式中 A 和 B 均为常数. 这表明有三个参量来描述 $E(2)$ 中的无限小运动群. 参量 A 和 B 对应于沿 x 轴和 y 轴的平移变换,参量 ϕ 对应于绕原点的转动.

上面的结果也可以写成共形映射(3.7.7)的形式.这只要将(3.8.43)代入(3.7.7)即可.首先令 $\phi=0$,代入(3.7.7)得

$$\tilde{x}=x+\varepsilon A,\quad \tilde{y}=y+\varepsilon B, \tag{3.8.44}$$

此即平移变换.再令 $A=B=0$,代入(3.7.7)得

$$\tilde{x}=x-\varepsilon\phi y,\quad \tilde{y}=y+\varepsilon\phi x, \tag{3.8.45}$$

写成矩阵形式即

$$\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\varepsilon\phi\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\approx \begin{pmatrix}\cos\varepsilon\phi & -\sin\varepsilon\phi\\ \sin\varepsilon\phi & \cos\varepsilon\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}. \tag{3.8.46}$$

上式描述绕原点的无限小转动(转动角为 $\varepsilon\phi$).

§3.9 引力场的对称性

1. 几个基本概念

引力场就是时空度规张量场.因此,讨论引力场的对称性实际上就是讨论四维时空的对称性.广义相对论中所研究的时-空都是度规空间.下面我们给出关于空间对称性的几个基本概念.

如果在度规空间中任一点 $\bar{x}$,存在无限小等度量变换(3.7.7),把 $\bar{x}$ 变到它的邻域内任意其他点,即该度规可使 Killing 矢量在任意点取一切可能值,则此空间称为**均匀的**.例如,在 N 维空间中,可以选一组(N 个)Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})$,使得 $\xi_\sigma^{(\mu)}(x;\bar{x})=\delta_\sigma^\mu$.这些矢量显然是独立的,因为任何关系式 $C_\mu\xi_\nu^{(\mu)}(x;\bar{x})=0$ 在 $x=\bar{x}$ 有 $C_\mu=0$.

如果存在无限小等度量变换(3.7.7),使点 $\bar{x}$ 固定、$\xi^\mu(\bar{x})=0$,且使 $\xi_{\mu;\nu}(\bar{x})$ 除满足 Killing 方程以外可以取一切可能值,则称此度规空间为关于给定点 $\bar{x}$ **各向同性的**.例如,在 N 维空间中,可以选一组 $N(N-1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$,且有

$$\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\equiv-\xi_\sigma^{(\nu\mu)}(x;\bar{x}), \tag{3.9.1}$$

$$\xi_\sigma^{(\mu\nu)}(\bar{x};\bar{x})\equiv 0, \tag{3.9.2}$$

$$\xi_{\sigma;\lambda}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\Big|_{x=\bar{x}}\equiv\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}-\delta_{\lambda}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\nu}. \qquad (3.9.3)$$

这些 Killing 矢量都是独立的，因为任何关系式 $c_{\mu\nu}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})=0$ 且 $c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu}$ 在 $\bar{x}$ 点必导致 $c_{\mu\nu}-c_{\nu\mu}=2c_{\mu\nu}=0$（$c_{\mu\nu}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}$ 对 μ 和 ν 不取和，下同）.

如果空间中存在 killing 矢量 $\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$ 和 $\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x})$，它们分别在点 $\bar{x}$ 和 $\bar{x}+\mathrm{d}\bar{x}$ 满足上面的初始条件，则称此空间是**每点各向同性的**. 这些 killing 矢量的任何线性组合也是 Killing 矢量，所以 $\frac{\partial\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})}{\partial\bar{x}^{\lambda}}$ 也是该度规的 Killing 矢量.

由(3.9.2)可得

$$\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\lambda}}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})=\left[\frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}+\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\lambda}}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}=0.$$

从而有
$$\left[\frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\lambda}}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})\right]_{x=\bar{x}}=-\delta_{\sigma}^{\mu}\delta_{\lambda}^{\nu}+\delta_{\lambda}^{\mu}\delta_{\sigma}^{\nu}. \qquad (3.9.4)$$

显然可找到一矢量 $\xi_{\sigma}(x)$：

$$\xi_{\sigma}(x)=\frac{\alpha_{\nu}}{N-1}\ \frac{\partial}{\partial\bar{x}^{\lambda}}\xi_{\sigma}^{(\lambda\nu)}(x;\bar{x}), \qquad (3.9.5)$$

该矢量在点 $x=\bar{x}$ 可以取任意值 α_{ν}. 因此，任意一个**每点各向同性的空间必是均匀的**.

如果一空间的度规具有最大数目 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量，则此空间称为**最大对称的**. **一个均匀且于某点各向同性的空间必是最大对称的**. 实际上，一个空间既是均匀的又是在某点各向同性的，就要求有 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi_{\sigma}^{(\mu)}(x;\bar{x})$ 和 $\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})$. 这些 Killing 矢量显然是独立的，因为假设它们间有一线性关系

$$c_{\mu}\xi_{\sigma}^{(\mu)}(x;\bar{x})+c_{\mu\nu}\xi_{\sigma}^{(\mu\nu)}(x;\bar{x})=0, \qquad (3.9.6)$$

$$c_{\mu\nu}=-c_{\nu\mu},$$

则对 x^{λ} 求导后令 $x=\bar{x}$ 得 $c_{\sigma\lambda}=0$；将 $x=\bar{x}$ 直接代入得 $c_{\sigma}=0$. 即 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量不可能是线性相关的，必是独立的. 下面

的定理是明显成立的：

每点各向同性的空间必是最大对称的. 下面我们证明此定理的逆定理：最大对称空间必是均匀且每点各向同性的. 设有 $N(N+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量 $\xi^n_\sigma(x)$. 我们可以把 $\xi^n_\rho(x)$、$\xi^n_{\lambda;\nu}(x)$ 排成一个方阵；用 n 标明 $N(N+1)/2$ 行，用 N 个 ρ 和 $N(N-1)/2$ 个 λ 与 $\nu(\lambda>\nu)$ 标明 $N(N+1)/2$ 列. 这个方阵的行列式一定不等于零. 因为假若有

$$c_n\xi^n_\rho(\bar{x})=c_n\xi^n_{\lambda;\nu}(\bar{x})=0,$$

则考虑到(3.8.7)，可导致 $c_n\xi^n_\rho(x)=0$，这与假设 Killing 矢量 $\xi^n_\sigma(x)$独立相矛盾. 因此对于任何"行矢量"，方程组

$$d_n\xi^n_\mu(\bar{x})=a_\mu, \tag{3.9.7}$$

$$d_n\xi^n_{\mu;\nu}(\bar{x})=b_{\mu\nu} \tag{3.9.8}$$

必定有解，式中 a_μ 和 $b_{\mu\nu}=-b_{\nu\mu}$为"行矢量"的"分量". 很容易找到一个 Killing 矢量 $\xi_\mu(x)$：

$$\xi_\mu(x)=d\xi^n_\mu(x), \tag{3.9.9}$$

它在点 $\bar{x}$ 取值 $\xi_\mu(\bar{x})=a_\mu$，它的导数在 $\bar{x}$ 点取值 $\xi_{\mu;\nu}(\bar{x})=b_{\mu\nu}$. 由于 a_μ 是任意的，所以空间是均匀的. $b_{\mu\nu}$也是任意的(只要满足 $b_{\mu\nu}=-b_{\nu\mu}$)，因此空间对点 $\bar{x}$ 是各向同性的.

作为最大对称空间的例子，我们在上一节中讨论了四维平直空间，求出了 $N(N+1)/2=10$ 个 Killing 矢量. 为了使问题更加明显，我们还讨论了 $E(2)$空间. 现在我们证明，一个曲率张量为零的 N 维空间(N 维平直空间)一定是最大对称空间.

适当选择坐标系(如 Descartes 坐标)，可使 N 维平直空间度规张量各分量均为常数，且仿射联络为零. 此时方程(3.8.6)简化为

$$\frac{\partial^2\xi_\mu}{\partial x^\rho\partial x^\nu}=0, \tag{3.9.10}$$

它的解具有形式

$$\xi_\mu(x)=a_{\mu\nu}x^\nu+b_\mu. \tag{3.9.11}$$

式中 $a_{\mu\nu}$和 b_μ 为积分常数. 将上式代入 Killing 方程，得到

$$a_{\mu\nu}=-a_{\nu\mu}. \tag{3.9.12}$$

因此，我们可以选取 $N(N+1)/2$ 个 Killing 矢量：

$$\xi_{\mu}^{(\nu)}(x)\equiv\delta_{\mu}^{\nu},\quad \xi_{\mu}^{(\nu\lambda)}(x)\equiv\delta_{\mu}^{\nu}x^{\lambda}-\delta_{\mu}^{\lambda}x^{\nu}. \tag{3.9.13}$$

而一般的 Killing 矢量为

$$\xi_{\mu}(x)=b_{\nu}\xi_{\mu}^{(\nu)}(x)+a_{\nu\lambda}\xi_{\mu}^{(\nu\lambda)}(x). \tag{3.9.14}$$

上式中 $b_{\nu}\xi_{\mu}^{(\nu)}$ 不对 ν 取和. N 个 Killing 矢量 $\xi_{\mu}^{(\nu)}(x)$ 描述平移，$N(N-1)/2$ 个矢量 $\xi_{\mu}^{(\nu\lambda)}$ 描述无限小旋转，对于 Minkowski 空间表示 Lorentz 变换. 因此，任一 N 维平直空间存在 $N(N+1)/2$ 个独立的 Killing 矢量，所以是最大对称空间.

一确定的空间中，独立的 Killing 矢量的个数与坐标系的选择无关. 这就是说，独立的 Killing 矢量的个数是空间的内禀属性. 现在我们说明这一点. 设 $\xi^{\mu}(x)$ 是空间度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 的 Killing 矢量. 在坐标变换 $x^{\mu}\to x'^{\mu}$ 下，度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 变为

$$g'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}g_{\alpha\beta}(x). \tag{3.9.15}$$

不难看出，矢量

$$\xi'^{\mu}(x')=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\xi^{\alpha}(x) \tag{3.9.16}$$

在坐标系 x'^{μ} 中满足 Killing 方程，即矢量 $\xi'^{\mu}(x')$ 是度规 $g'_{\mu\nu}(x')$ 的 Killing 矢量. 各 Killing 矢量 $\xi'^{\mu}(x')$ 是独立的，因为否则各 Killing 矢量 $\xi^{\mu}(x)$ 也不是独立的(由 $\xi^{\mu\prime}(x')$ 之间的线性关系将导致 $\xi^{\mu}(x)$ 之间的线性关系).

由上面的讨论可以得出结论：给定空间的最大对称性是空间的内禀属性，与坐标系选择无关. 例如，曲率张量为零的空间必是最大对称空间(注意其逆定理不成立).

容易发现，空间的均匀性和各向同性也都与坐标系的选择无关.

2. 常曲率空间

由(3.8.3)有

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu}-\xi_{\rho;\mu;\nu;\sigma}=R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu}+R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}. \tag{3.9.17}$$

(3.8.6)满足(3.9.17)的充分且必要条件是

$$R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\xi_{\lambda;\sigma}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\xi_{\lambda;\nu}+(R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\sigma}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu})\xi_{\lambda}=$$
$$R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\xi_{\lambda;\mu}+R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\xi_{\rho;\lambda}. \tag{3.9.18}$$

将 Killing 方程代入上式得

$$(R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\mu}-R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}+R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}-R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma})\xi_{\lambda;\alpha}=$$
$$(R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\sigma}-R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu})\xi_{\lambda}. \tag{3.9.19}$$

前面已经证明，在最大对称空间中任一点 x^{μ}，我们可以找到 Killing 矢量 ξ_{μ}，使得 $\xi_{\mu}(x)=0$. 再考虑到 $\xi_{\lambda;\alpha}(x)$是任意反对称矩阵，可知式(3.9.19)中 $\xi_{\lambda;\alpha}(x)$的系数必有等于零的反对称部分，即

$$R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\mu}-R^{\lambda}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\alpha}_{\rho}+R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\nu}-R^{\lambda}_{\nu\rho\mu}\delta^{\alpha}_{\sigma}=$$
$$R^{\alpha}_{\rho\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\mu}-R^{\alpha}_{\mu\sigma\nu}\delta^{\lambda}_{\rho}+R^{\alpha}_{\sigma\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\nu}-R^{\alpha}_{\nu\rho\mu}\delta^{\lambda}_{\sigma}. \tag{3.9.20}$$

前面还证明了，在最大对称空间中任一给定的点 x 存在 Killing 矢量 ξ_{μ}，$\xi_{\mu}(x)$可取任意值. 这样，由(3.9.20)和(3.9.19)得

$$R^{\lambda}_{\nu\rho\mu;\sigma}=R^{\lambda}_{\sigma\rho\mu;\nu}. \tag{3.9.21}$$

实际上前面已经证明了，一个每点各向同性〔因而满足(3.9.20)〕的空间必是均匀的，所以必满足(3.9.21).

将(3.9.20)中的 α 与 μ 缩并，得到

$$NR^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}-R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}+R^{\lambda}_{\sigma\rho\nu}-R^{\lambda}_{\nu\rho\sigma}=$$
$$R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}-R_{\sigma\rho}\delta^{\lambda}_{\nu}+R_{\nu\rho}\delta^{\lambda}_{\sigma}. \tag{3.9.22}$$

利用曲率张量 $R^{\lambda}_{\rho\sigma\nu}$的性质〔附录(7.8)，(7.15)〕得

$$(N-1)R_{\lambda\rho\sigma\nu}=R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}. \tag{3.9.23}$$

上式对 λ 和 ρ 反对称，于是有

$$R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}=-R_{\nu\lambda}g_{\rho\sigma}+R_{\sigma\lambda}g_{\rho\nu}.$$

对 λ 和 ν 缩并，得到

$$R_{\sigma\rho}-NR_{\sigma\rho}=-R^{\lambda}_{\lambda}g_{\sigma\rho}+R_{\rho\sigma},$$

$$R_{\sigma\rho}=\frac{1}{N}R^{\lambda}_{\lambda}g_{\sigma\rho}. \tag{3.9.24}$$

将上式代入(3.9.23)，得到曲率张量的表达式：

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=\frac{R^{\lambda}_{\lambda}}{N(N-1)}(g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}). \tag{3.9.25}$$

在每点各向同性的空间中，式(3.9.24)和(3.9.25)处处成立.

不难证明，**在三维或高于三维($N\neq 2$)的空间中，R^λ_λ 必为常数**．实际上，将(3.9.24)代入附录(7.16)，得到

$$\left(R^\sigma_\rho-\frac{1}{2}\delta^\sigma_\rho R^\lambda_\lambda\right)_{;\sigma}=0,$$

即

$$\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2}\right)R^\lambda_{\lambda;\sigma}=0,$$

$$\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^\sigma}R^\lambda_\lambda=0. \tag{3.9.26}$$

由此得 $R^\lambda_\lambda=\text{const}$．引入常曲率 K 代替 R^λ_λ 更加方便：

$$R^\lambda_\lambda\equiv-N(N-1)K. \tag{3.9.27}$$

此时(3.9.24)和(3.9.25)改写为

$$R_{\sigma\rho}=-(N-1)Kg_{\sigma\rho}, \tag{3.9.28}$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu}=K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}-g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}). \tag{3.9.29}$$

具有上述性质的空间称为**常曲率空间**．

由(3.9.26)可知，当 $N=2$ 时无法判定 R^λ_λ 是否为常数．我们可以由(3.9.21)出发，证明 $N=2$ 的最大对称空间确实为常曲率空间，即(3.9.29)中的 K 为常数．这一工作读者可自己完成．

关于最大对称空间，存在下述定理(唯一性定理)：最大对称空间由曲率常数 K 和度规张量的正、负特征值个数唯一确定．根据这一定理，我们只要随便用任何方式构成一个具有任意常曲率 K 的空间，了解了它，便了解了最大对称空间的普遍性质．我们这样构成一常曲率空间．先考虑一个($N+1$)维平直空间，其度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=C_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x_\nu+K^{-1}\mathrm{d}z^2. \tag{3.9.30}$$

式中 $C_{\mu\nu}=\text{const}$，$K=\text{const}$；$\mu,\nu=1,2,\cdots,N$．即由 N 个量 x^μ 和一个量 z 确定一个($N+1$)维空间的点．用条件

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu+z^2=1 \tag{3.9.31}$$

把一个 N 维非欧几里得空间嵌入这个高一维的空间中．上述条件相当于把变量 x^μ 和 z 限制在一伪球(或球)的表面上．在这一 N 维空间中(上述伪球面上)，$\mathrm{d}z^2$ 可写为

$$dz^2=\frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{z^2}=\frac{K^2(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{1-KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}. \tag{3.9.32}$$

将上式代入(3.9.30)得

$$ds^2=C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+\frac{K(C_{\alpha\beta}x^\alpha dx^\beta)^2}{(1-KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu)}. \tag{3.9.33}$$

因此度规可写为

$$g_{\mu\nu}(x)=C_{\mu\nu}+\frac{KC_{\mu\alpha}C_{\nu\beta}}{1-KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma}x^\alpha x^\beta. \tag{3.9.34}$$

上式给出了最一般的最大对称空间度规. 当 $K=0$ 时，上式退化为平直空间度规.

由上述构造过程可知(3.9.34)允许有 $N(N+1)/2$ 个参量的等度量变换群. 因为$(N+1)$维线元(3.9.30)与嵌入条件(3.9.31)在$(N+1)$维空间里的"转动"下是不变的. 这些变换是

$$x'^\mu=R^\mu_\nu x^\nu+R^\mu_z z, \tag{3.9.35}$$

$$z'=R^z_\mu x^\mu+R^z_z z. \tag{3.9.36}$$

式中 $R^A_\alpha=\text{const}$，且满足下列方程：

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_\sigma+K^{-1}R^z_\rho R^z_\sigma=C_{\rho\sigma}, \tag{3.9.37}$$

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_z+KR^z_\rho R^z_z=0, \tag{3.9.38}$$

$$C_{\mu\nu}R^\mu_z R^\nu_z+K^{-1}(R^z_z)^2=K^{-1}. \tag{3.9.39}$$

我们可以将满足上三式的变换分为两类：

$$\text{(I)}\quad R^\mu_z=R^z_\mu=0,\quad R^z_z=1. \tag{3.9.40}$$

此时有

$$C_{\mu\nu}R^\mu_\rho R^\nu_\sigma=C_{\rho\sigma}, \tag{3.9.41}$$

$$x'^\mu=R^\mu_\nu x^\nu. \tag{3.9.42}$$

可见矩阵 R^μ_ν($N\times N$ 矩阵)表示绕原点的刚性"旋转".

$$\text{(II)}\quad R^\mu_z=a^\mu,\quad R^z_\mu=-KC_{\mu\nu}a^\nu,$$

$$R^z_z=(1-KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta)^{1/2},\quad R^\mu_\nu=\delta^\mu_\nu-bKC_{\nu\sigma}a^\sigma a^\mu. \tag{3.9.43}$$

式中 a^μ 是任意的，b 的表达式为

$$b\equiv\frac{1-(1-KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta)^{1/2}}{KC_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta}; \tag{3.9.44}$$

R^z_z 为实数，即

$$KC_{\alpha\beta}a^{\alpha}a^{\beta}\leqslant 1. \tag{3.9.45}$$

这些变换是"平移"：

$$x'^{\mu}=x^{\mu}+a^{\mu}\{(1-KC_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta})^{1/2}-bKC_{\alpha\beta}x^{\alpha}a^{\beta}\}, \tag{3.9.46}$$

把原点 $x^{\alpha}=0$ 变为 $x'^{\mu}=a^{\mu}$.

注意到 a^{μ} 的任意性，变换(3.9.46)的存在便表明了空间是均匀的. 变换(3.9.42)的存在表明该空间对原点是各向同性的. 因为度规是均匀的，又是对原点各向同性的，所以它是每点各向同性的，也是最大对称的.

为了确定度规中常数 K 的含义，我们寻求曲率张量 $R_{\lambda\nu\rho\sigma}$的表达式. 为此，由(3.9.34)先求出 $\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}$：

$$\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}=Kx^{\lambda}g_{\nu\sigma}. \tag{3.9.47}$$

由此得到

$$\begin{aligned}R_{\lambda\nu\rho\sigma}=&K(C_{\lambda\sigma}C_{\nu\rho}-C_{\lambda\rho}C_{\nu\sigma})+\\&K^{2}(1-KC_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta})^{-1}(C_{\lambda\sigma}x_{\nu}x_{\rho}-C_{\lambda\rho}x_{\nu}x_{\sigma}+\\&C_{\nu\rho}x_{\lambda}x_{\sigma}-C_{\nu\sigma}x_{\rho}x_{\lambda}),\end{aligned} \tag{3.9.48}$$

即

$$R_{\lambda\nu\rho\sigma}=K(g_{\rho\nu}g_{\lambda\sigma}-g_{\sigma\nu}g_{\lambda\rho}). \tag{3.9.49}$$

将此式与(3.9.29)比较，可知度规(3.9.34)中的常数 K 就是(3.9.27)中引入的曲率常数. K 是不依坐标系选择的常数. 因此，在坐标变换下，不同的度规必具有和(3.9.34)相同的 K 值. 变换后得到的度规应和(3.9.34)形式相同，只是 $C_{\mu\nu}$不同. 对于线性变换 $x^{\mu}=\alpha^{\mu}_{\nu}x'^{\nu}$，$C_{\mu\nu}$变为

$$C'_{\mu\nu}=\alpha^{\alpha}_{\mu}\alpha^{\beta}_{\nu}C_{\alpha\beta}. \tag{3.9.50}$$

Sylvester 定理指出，矩阵(张量)的正的、负的或为零的本征值的数目在上述线性变换下分别保持不变. 因此，通过变换(3.9.50)可以把 $C_{\mu\nu}$变为我们所需要的任何一个实对称张量，只要保持它的正、负特征值的个数不变. 由于空间是均匀的，所以 $C_{\mu\nu}$的特征值个数与 $g_{\mu\nu}$在 $x=0$ 点的相同.

一个 N 维度规允许引入局部欧几里得坐标系，其所有的特征值都是正的，故当 $K\neq 0$ 时可以取 $C_{\mu\nu}=\dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$. 此时(3.9.33)可改

写为

$$
ds^2=\begin{cases}\dfrac{1}{K}\left\{dx_\mu dx^\mu+\dfrac{(x_\alpha dx^\alpha)^2}{1-x_\mu x^\mu}\right\}, & \text{当 } K>0; \quad (3.9.51)\\ -\dfrac{1}{K}\left\{dx_\mu dx^\mu-\dfrac{(x_\alpha dx^\alpha)^2}{1+x_\mu x^\mu}\right\}, & \text{当 } K<0; \quad (3.9.52)\\ dx_\mu dx^\mu. & \text{当 } K=0. \quad (3.9.53)\end{cases}
$$

式中 $dx_\mu dx^\mu=\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.

对于 $K>0$ 的情况，将 $C_{\mu\nu}=\dfrac{\delta_{\mu\nu}}{|K|}$ 代入(3.9.30)和(3.9.31)，得到

$$
ds^2=\frac{1}{K}(dx_\mu dx^\mu+dz^2),(dx_\mu dx^\mu=\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) \quad (3.9.54a)
$$

和

$$
x_\mu x^\mu+z^2=1 \quad (x_\mu x^\mu=\delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu). \quad (3.9.55a)
$$

因此，(3.9.51)可解释为嵌入平直空间(3.9.54a)中的曲面(3.9.55b). 为了更加明显，令 $x'^\mu=\dfrac{1}{\sqrt{K}}x^\mu, z'=\dfrac{1}{\sqrt{K}}z$，则上二式成为(变换后去掉一撇号)：

$$
ds^2=\delta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu+dz^2, \quad (3.9.54b)
$$

$$
\delta_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=\frac{1}{K}. \quad (3.9.55b)
$$

显然，(3.9.51)描述$(N+1)$维欧几里得空间(3.9.54b)中半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{K}}$ 的球面. 对于$(N+1)=3$ 的三维平直空间(3.9.54b)，我们可以引入角坐标 θ,ϕ 和径坐标 r，使

$$
x^1=\sin\theta\cos\phi, \quad x^2=\sin\theta\sin\phi, z=r. \quad (3.9.56)
$$

此时曲面方程(3.9.55a)化为

$$
r^2=\cos^2\theta; \quad (3.9.57)
$$

代入三维平直度规(3.9.54a)，得到

$$
ds^2=\frac{1}{K}(dx^{1^2}+dx^{2^2}+dz^2)=\frac{1}{K}(\sin^2\theta d\phi^2+d\theta^2), \quad (3.9.58)
$$

这正是熟知的二维球面线元，球面半径为$\frac{1}{\sqrt{K}}$.

现在我们讨论，四维最大对称时空度规，特征值取为一正三负．令

$$C_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}, \tag{3.9.59}$$

则线元(3.9.33)可写为

$$ds^2=dt^2-\delta_{ij}dx^i dx^j+\frac{K(tdt-\delta_{ij}x^i dx^j)^2}{1-K(t^2-\delta_{ij}x^i x^j)}. \tag{3.9.60}$$

令 $\boldsymbol{r}=(x^1,x^2,x^3)$，则上式可写为

$$ds^2=dt^2-(d\boldsymbol{r})^2+\frac{K(tdt-\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r})^2}{1-K(t^2-\boldsymbol{r}^2)}. \tag{3.9.61}$$

对于 $K>0$，引入新坐标 t'，$\boldsymbol{r}'$：

$$t=\frac{1}{\sqrt{K}}\left\{\frac{Kr'^2}{2}\cosh(\sqrt{K}t')+\left(1+\frac{Kr'^2}{2}\right)\cdot\sinh(\sqrt{K}t')\right\}, \tag{3.9.62}$$

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'\exp(\sqrt{K}t'),$$

度规(3.9.61)变换为

$$ds^2=dt'^2-\exp(2\sqrt{K}t')(d\boldsymbol{r}')^2. \tag{3.9.63}$$

再做一次坐标变换可以得到与时间无关的度规．这一变换为

$$t''=t'-\frac{1}{2\sqrt{K}}\ln[1-K\boldsymbol{r}'^2\exp(2\sqrt{K}t')], \tag{3.9.64}$$

$$\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{r}'\exp(\sqrt{K}t');$$

度规变为(去掉 t''，$\boldsymbol{r}''$中的两撇号)：

$$ds^2=(1-K\boldsymbol{r}^2)dt^2-d\boldsymbol{r}^2-\frac{K(\boldsymbol{r}\cdot d\boldsymbol{r})^2}{1-K\boldsymbol{r}^2}. \tag{3.9.65}$$

度规(3.9.63)和(3.9.65)在处理稳恒态宇宙模型时是有用的，它们曾为 de Sitter 研究过(见第 6 篇)．

3. 最大对称子空间

在许多情况下，整个时空不是最大对称的，但它可以分解为一

些最大对称的子空间族. 设 N 维空间中有一些 M 维的最大对称子空间. 我们可以用(N-M)个坐标记号 v^a 来标记这些子空间,用 M 个坐标 u^i 标记每个子空间中的点.

定理 在上述 N 维空间中,总可以选择 M 个 u^i 坐标,使这个 N 维空间的度规具有形式

$$ds^2 = g_{ab}(v)dv^a dv^b + f(v)\tilde{g}_{ij}(u)du^i du^j. \tag{3.9.66}$$

式中 $\tilde{g}_{ij}(u)$是 M 维最大对称空间的度规,$g_{ab}(v)$和 $f(v)$都只是 v 坐标的函数.

我们假设整个空间可以分解为一些每点各向同性的子空间. 这一假设在很多有物理意义的情况下都会满足. 这时在任一点(v,u^0)有 $\xi^{i(a)}=0$,且有 $\xi_{i;j}$为任意反对称张量,$\xi^{(a)}$为整个 N 维空间的 Killing 矢量. 我们可以找到 $M(M-1)/2$ 个 Killing 矢量 $\xi^{(lm)}(u, v;u^0)$,它们满足条件

$$\xi^{a(lm)}(u,v;u^0)=0, \tag{3.9.67}$$

$$\xi^{i(lm)}(u,v;u^0)=-\xi^{i(ml)}(u,v;u^0); \tag{3.9.68}$$

$$\xi^{(lm)}_{i;j}(u^0,v;u^0)\equiv g_{ij}(u^0,v)\left[\frac{\partial\xi^{k(lm)}(u,v;u^0)}{\partial u^j}\right]_{u=u^0}= \delta^l_i\delta^m_j-\delta^m_i\delta^l_j. \tag{3.9.69}$$

又由(I)中的讨论可知,整个空间的 Killing 矢量

$$\xi^{\mu(l)}(u,v;u^0)\equiv\frac{\partial}{\partial u^{0m}}\xi^{\mu(lm)}(u,v;u^0) \tag{3.9.70}$$

满足

$$\xi^{a(l)}(u,v;u^0)=0 \tag{3.9.71}$$

和

$$\xi^{i(l)}(u,v;u^0)=-\frac{1}{N-1}\tilde{g}^{il}(u^0,v). \tag{3.9.72}$$

Killing 矢量 $\xi^{\mu(lm)}$和 $\xi^{\mu(l)}$是独立的,它们的总个数为 $M(M+1)/2$. 这就证明了上述 M 维空间是最大对称的.

在引力理论中,最大子空间不是**时空**,而是**空间**. 此时我们可以利用(3.9.51)~(3.9.53)来求出 $\tilde{g}_{ij}du^i du^j$ 的形式. 这样,考虑到(3.9.66),我们得到

$$ds^2=g_{ab}dv^a dv^b+f(v)\left[d\boldsymbol{u}^2+\frac{k(\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{u})^2}{1-k\boldsymbol{u}^2}\right], \qquad (3.9.73)$$

$f(v)<0$,[$f(v)$代替 $|K|^{-1}f(v)$]

$$k=\begin{cases}+1, & \text{当 } M \text{ 空间的 } K>0;\\ -1, & \text{当 } M \text{ 空间的 } K<0;\\ 0, & \text{当 } M \text{ 空间的 } K=0.\end{cases} \qquad (3.9.74)$$

对于**球对称空间**,设 $N=3,M=2$. 设 v 坐标为 r;u 坐标为 θ, ϕ. 定义

$$u^1=\sin\theta\cos\phi, u^2=\sin\theta\sin\phi. \qquad (3.9.75)$$

代入(3.9.73),取 $k=+1$,得

$$ds^2=g(r)dr^2+f(r)(d\theta^2+\sin^2\theta d\theta^2). \qquad (3.9.76)$$

式中 $g(r)<0,f(r)<0$.

对于**球对称时-空**,设 $N=4$,度规特征值为一正三负;$M=2$. 于是 v 坐标有 $(N-M)=2$ 个,记为 r 和 t;u 坐标有 $M=2$ 个,仍记为 θ 和 ϕ,u^1 和 u^2 的定义同(3.9.75). 将它们代入(3.9.73),取 $k=+1$,得到

$$ds^2=g_{tt}(r,t)dt^2+2g_{rt}(r,t)drdt+ g_{rr}(r,t)dr^2+f(r,t)(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2). \qquad (3.9.77)$$

式中 $f(r,t)<0$.

对于**均匀球对称时-空**,取 $N=4$,其度规特征值为一正三负,$M=3$. 此时有一个 v 坐标和 3 个 u 坐标. 由(3.9.73)得

$$ds^2=g(v)dv^2+f(v)\left[d\boldsymbol{u}^2+\frac{K(\boldsymbol{u}\cdot d\boldsymbol{u})^2}{1-K\boldsymbol{u}^2}\right], \qquad (3.9.78)$$

式中 $g(v)>0,f(v)<0$. 定义

$$\begin{aligned} t &\equiv \int\sqrt{g(v)}dv,\\ u^1 &= r\sin\theta\cos\phi,\\ u^2 &= r\sin\theta\sin\phi, \qquad (3.9.79)\\ u^3 &= r\cos\theta, \end{aligned}$$

则度规可写为

$$ds^2=dt^2-R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\phi^2\right). \qquad (3.9.80)$$

式中 $R^2(t)=-f(v)$.

度规(3.9.80)是著名的 Robertson-Walker 度规(H. P. Robertson 1935, 1936; H. G. Walker 1936). 由于它描述的时空是均匀、各向同性的，因此在宇宙学中有重要意义. 对于球对称恒星的引力场，采用随动坐标系，可以由爱因斯坦引力场方程的严格解给出度规(3.9.80).

4. 稳恒引力场

下面讨论两种基本类型的、具有特殊对称性的引力场.

在引力场 $g_{\mu\nu}$ 中，如果允许有一类时 Killing 矢量场 ξ^μ 存在，即如果 Killing 方程

$$\xi_{\nu;\mu}+\xi_{\mu;\nu}=0, \quad \xi^\nu\xi_\mu>0 \tag{3.9.81}$$

的解存在，则这一引力场称为**稳恒引力场**，或者称时-空 $g_{\mu\nu}$ 为**稳恒时空**. 现在说明这一定义的物理含义.

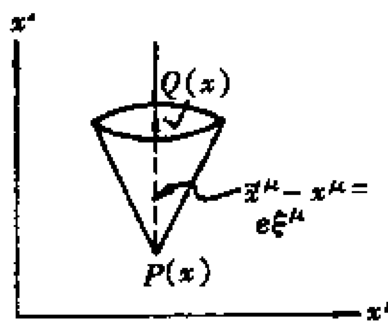


图 2-4

考虑矢量场 $\xi^\mu(x)$ 的一条无限短的世界线 PQ. 我们建立一个坐标系 x^μ，使 x^0 轴的方向沿着 PQ(如图 2-4 所示). 沿着这条世界线 PQ 只有时间坐标发生变化，而空间坐标 x^i 保持不变. 这是做得到的，因为 ξ^μ 是类时 Killing 矢量. 我们还可以适当选择坐标轴上的长度单位，使 $\xi^0=1$，即

$$\xi^\mu=(1, 0, 0, 0). \tag{3.9.82}$$

Killing 方程还可以写为

$$\xi^\alpha_{;\nu}g_{\alpha\mu}+\xi^\alpha_{;\mu}g_{\alpha\nu}=0,$$

即

$$\xi^\alpha_{,\nu}g_{\alpha\mu}+\xi^\alpha_{,\mu}g_{\alpha\nu}+(\Gamma^\alpha_{\nu\sigma}\xi^\sigma g_{\alpha\mu}+\Gamma^\alpha_{\mu\sigma}\xi^\sigma g_{\alpha\nu})=0.$$

由 $g_{\mu\nu;\sigma}=0$ 知上式左端后一括号为 $\xi^\sigma g_{\mu\nu,\sigma}$，从而有

$$\xi^\sigma g_{\mu\nu;\alpha}+g_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{,\nu}+g_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{,\mu}=0. \tag{3.9.83}$$

将(3.9.82)代入(3.9.83)，得到

$$g_{\mu\nu,0}=0. \tag{3.9.84}$$

这样，在我们所选定的坐标系中，**度规张量的所有分量 $g_{\mu\nu}$ 均不含**

时间坐标.

我们指出，满足(3.9.84)的坐标系不止一个. 作变换

$$x'^0 = x^0 + f(x^i),$$
$$x'^i = x^i. \tag{3.9.85}$$

式中 $f(x^i)$为一任意形式的函数. 此时度规张量的变换式为

$$g'_{00} = g_{00},\ g'_{0i} = g_{0i} - g_{00}\frac{\partial f}{\partial x^i},$$
$$g'_{ik} = g_{ik} - g_{0i}\frac{\partial f}{\partial x^k} - g_{0k}\frac{\partial f}{\partial x^i} + g_{00}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^k}. \tag{3.9.86}$$

由此得到 $\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\delta^\alpha_0 = \frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x^0}.$ (3.9.87)

将(3.9.86)和(3.9.84)代入(3.9.87)，得到

$$\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial x'^0} = 0. \tag{3.9.88}$$

变换(3.9.85)表明，在时空中可以任意选择时间的起点，即 x^0 可以附加一个任意常数.

但是当改变 x^0 的符号时，所得到的两个方向对于稳恒引力场是不等效的，这是由于 $g_{0i}\neq 0$ 的缘故. 例如 Kerr 度规的情况. 当 $x^0\to -x^0$ 时角速度的方向也要改变.

作为稳恒引力场的特殊情况，当 Killing 矢量 ξ^μ 的世界线与超曲面族正交时，这个稳态引力场称为**静态引力场**，或称时空 $g_{\mu\nu}$ 为**静态时空**. 下面我们证明，在静态引力场中一定存在一个坐标系，使其中 $g_{0i}=0$.

按定义，Killing 矢量 ξ^μ 和超曲面正交，即

$$\xi^\mu(x) = \phi(x)\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}. \tag{3.9.89}$$

式中 $\phi(x)$和 $\psi(x)$均为标量函数. 由此可得

$$\xi_{\tau,\nu} = \phi_{,\nu}\psi_{,\tau} + \phi\psi_{,\tau\nu}, \tag{3.9.90}$$
$$\xi_\mu\xi_{\tau,\nu} = \phi\psi_{,\mu}(\phi_{,\nu}\psi_{,\tau} + \phi\psi_{,\tau\nu}). \tag{3.9.91}$$

由(3.9.91)可得

$$\xi_{[\mu}\xi_{\tau,\nu]} \equiv \xi_\mu\xi_{\tau,\nu} + \xi_\nu\xi_{\mu,\tau} + \xi_\tau\xi_{\nu,\mu} -$$
$$\xi_\nu\xi_{\tau,\mu} - \xi_\mu\xi_{\nu,\tau} - \xi_\tau\xi_{\mu\nu} = 0. \tag{3.9.92}$$

上式中的偏导数可代之以协变导数：

$$\xi_{[\mu}\xi_{\tau;\nu]}=0, \tag{3.9.93}$$

因为其中含 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$的项互相抵消了.

将 Killing 方程代入(3.9.93)，得到

$$\xi_\mu\xi_{\tau;\nu}+\xi_\nu\xi_{\mu;\tau}+\xi_\tau\xi_{\nu;\mu}=0. \tag{3.9.94}$$

将上式乘以 ξ^τ 缩并，令 $\xi_\alpha\xi^\alpha\equiv\xi^2$，得到

$$\xi_\mu\xi^\tau\xi_{\tau;\nu}-\xi_\nu\xi^\tau\xi_{\tau;\mu}+\xi^2\xi_{\nu;\mu}=0, \tag{3.9.95}$$

和
$$\xi_\mu\xi_\tau\xi_{\tau;\nu}-\xi_\nu\xi_\tau\xi_{\tau;\mu}-\xi^2\xi_{\mu;\nu}=0. \tag{3.9.96}$$

将(3.9.95)和(3.9.96)相加，得到

$$(\xi_\mu\xi^2_{;\nu}-\xi_\nu\xi^2_{;\mu})+\xi^2(\xi_{\nu;\mu}-\xi_{\mu;\nu})=0. \tag{3.9.97}$$

在上式中，由于含 $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$项互相抵消，所以可将协变导数写为偏导数形式：

$$(\xi_\mu\xi^2_{,\nu}-\xi_\nu\xi^2_{,\mu})+\xi^2(\xi_{\nu,\mu}-\xi_{\mu,\nu})=0. \tag{3.9.98}$$

此式又可写成

$$\left(\frac{\xi_\nu}{\xi^2}\right)_{,\mu}-\left(\frac{\xi_\mu}{\xi^2}\right)_{,\nu}=0. \tag{3.9.99}$$

此方程的解为

$$\frac{\xi_\mu}{\xi^2}=\frac{\partial\psi(x)}{\partial x^\mu}. \tag{3.9.100}$$

式中 $\psi(x)$为标量函数.

比较(3.9.100)和(3.9.89)，得 $\phi(x)=\xi^2(x)$. 选择一坐标系，使 $\xi^\alpha=\delta^\alpha_0$，则(3.9.100)给出

$$\xi_\mu=\xi^2\psi_{,\mu}=g_{\mu\nu}\xi^\nu=g_{\mu0}. \tag{3.9.101}$$

又因为
$$\xi^2=g_{\mu\nu}\delta^\mu_0\delta^\nu_0=g_{00}, \tag{3.9.102}$$

故有
$$g_{\mu0}=g_{00}\psi_{,\mu}. \tag{3.9.103}$$

在上式中代入 $\mu=0$，得到

$$\psi_{,0}=1,$$

$$\psi(x)=x^0+f(x^i). \tag{3.9.104}$$

选择一个坐标系 x'^μ，使得

$$x'=x^0+f(x^j),\ x'^k=x^k, \tag{3.9.105}$$

则有 $$g'_{0k}=g_{0k}-g_{00}f_{,k}.\tag{3.9.106}$$
将(3.9.104)代入得
$$g'_{0k}=g_{0k}-g_{00}\psi_{,k},\tag{3.9.107}$$
由(3.9.103)知
$$g'_{0k}=0.\tag{3.9.108}$$
我们证明了，在静态引力场中，一定存在一个坐标系，在其中，引力场同时满足稳恒条件和时轴正交条件：
$$g_{\mu\nu,0}=0,\ g_{i_0}=0.\tag{3.9.109}$$

§3.10 引力场方程的正交标架形式

对于时空中同一点，可以引入一局部惯性系 X^μ 和一任意坐标系 x^μ. 其线元分别表示为
$$ds^2=\eta_{\mu\nu}dX^\mu dX^\nu\tag{3.10.1}$$
和 $$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.\tag{3.10.2}$$
平直时空度规 $\eta_{\mu\nu}$和任意坐标的度规 $g_{\mu\nu}$之间有关系式
$$g_{\mu\nu}=\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}\eta_{\alpha\beta}.\tag{3.10.3}$$
令 $$h^\alpha_\mu\equiv\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu},\ h^\beta_\nu\equiv\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu},\tag{3.10.4}$$
则有 $$g_{\mu\nu}=\eta_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu h^\beta_\nu=h_{\beta\mu}h^\beta_\nu.\tag{3.10.5}$$
式中 $h_{\beta\mu}\equiv\eta_{\alpha\beta}h^\alpha_\mu$. h^α_μ 的指标由 $\eta_{\alpha\beta}$或 $\eta^{\alpha\beta}$进行下移或上移. 此时线元可写为
$$ds^2=h_{\beta\mu}h^\beta_\nu dx^\mu dx^\nu,\tag{3.10.6}$$
此即标架表象. 脚标 α, β, γ 称为 Lorentz 脚标；它们的上移和下移由 $\eta_{\alpha\beta}$和 $\eta^{\alpha\beta}$进行. 脚标 μ, ν, τ 等为协变脚标，它们的上移和下移仍由 $g_{\mu\nu}$和 $g^{\mu\nu}$进行.

由(3.10.5)可以得到行列式$|h_{\alpha\mu}|$和 g 之间的关系：
$$g=|g_{\mu\nu}|=|\eta^{\beta\alpha}|\cdot|h_{\alpha\mu}|\cdot|h_{\beta\nu}|=-|h_{\alpha\mu}|^2,$$
或者 $$|h_{\alpha\mu}|=\sqrt{-g}.\tag{3.10.7}$$

按定义，$h^{\mu}_{a} \equiv g^{\mu\nu} h_{a\nu}$，由此可得

$$h^{a}_{\mu} h^{\nu}_{a} = \delta^{\nu}_{\mu}. \qquad (3.10.8)$$

又由 $$g^{\mu\sigma} = \frac{A^{\mu\sigma}}{g} = \frac{A^{\mu a} A^{\sigma}_{a}}{h^{2}} (h \equiv |h_{a\mu}|). \qquad (3.10.9)$$

式中 $A^{\mu a}$ 和 A^{σ}_{a} 分别表示行列式 $|h_{a\mu}|$ 中元素 $h_{\mu a}$ 和 $h_{a\sigma}$ 的代数余子式，我们有

$$h^{\mu a} = g^{\mu\sigma} h^{a}_{\sigma} = \frac{A^{\mu\beta} A^{\sigma}_{\beta}}{h^{2}} h^{a}_{\sigma}. \qquad (3.10.10)$$

而 $$h^{\mu a} = \frac{A^{\mu a}}{h}, \qquad (3.10.11)$$

所以有 $$\frac{A^{\sigma}_{\beta}}{h} h^{a}_{\sigma} = \delta^{a}_{\beta}, \qquad (3.10.12)$$

即 $$h^{a}_{\mu} h^{\mu}_{\beta} = \delta^{a}_{\beta}. \qquad (3.10.13)$$

式(3.10.13)和(3.10.8)表明，h^{a}_{μ} 无论对于协变脚标还是对于 Lorentz 脚标，都是正交归一的，故称**正交标架**.

考虑标架空间的一个仿射正交变换：

$$h'_{a\mu} = \lambda^{\beta}_{a} h_{\beta\mu}, \quad \lambda^{\beta}_{a} \lambda^{\nu}_{\beta} = \delta^{\nu}_{a}. \qquad (3.10.14)$$

此时度规张量的变换式为

$$g'_{\mu\nu} = h'_{a\mu} h'^{a}_{\nu} = \lambda^{\beta}_{a} \lambda^{a}_{\tau} h_{\beta\mu} h^{\tau}_{\nu} = \delta^{\beta}_{\tau} h_{\beta\mu} h^{\tau}_{\nu} = h_{\tau\mu} h^{\tau}_{\nu} = g_{\mu\nu}. \qquad (3.10.15a)$$

此式表明，**对于标架空间的仿射正交变换，$g_{\mu\nu}$ 是一个不变量.**

设标架不动，坐标变换 $x^{\mu} \to x'^{\mu}$，此时有

$$h'^{a}_{\mu} = \frac{\partial X^{a}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial X^{a}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} h^{a}_{\nu}. \qquad (3.10.15b)$$

这就是说，**$h_{a\mu}$ 在坐标空间中是一协变矢量.**

现在我们给出曲率张量的正交标架形式. 和在坐标空间的情况类似[见附录(7.3)]，由 $h_{a\mu}$ 的协变导数不可对易便可给出曲率张量的表达式. 我们定义 $R^{\lambda}_{\tau\mu\nu}$：

$$h_{a\tau;\mu\nu} - h_{a\tau;\nu\mu} = R^{\lambda}_{\tau\mu\nu} h_{a\lambda}, \qquad (3.10.16)$$

即 $$R^{\lambda}_{\tau\mu\nu} = h^{a\lambda} (h_{a\tau;\mu\nu} - h_{a\tau;\nu\beta}). \qquad (3.10.17)$$

由 $g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0$ 可得

$$h^{\mu}_{a;\lambda} h^{a\nu} + h^{\mu}_{a} h^{a\nu}{}_{;\lambda} = 0.$$

从而有 $(h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha\mu}{}_{;\lambda})_{;\nu}=h^{\nu}_{\alpha;\nu}h^{\alpha\mu}{}_{;\lambda}+h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha\mu}{}_{;\lambda\nu}=-(h^{\mu}_{\alpha;\nu}h^{\alpha\nu}_{;\lambda}+h^{\mu}_{\alpha}h^{\alpha\nu}{}_{;\lambda\nu})$，

$$(3.10.18)$$

或者写成 $h^{\nu}_{\alpha}h^{\alpha\mu}{}_{;\lambda\nu}=-(h^{\nu}_{\alpha;\nu}h^{\alpha\mu}{}_{;\lambda}+h^{\mu}_{\alpha\nu;}h^{\alpha\nu}{}_{;\lambda}+h^{\mu}_{\alpha}h^{\nu}_{;\lambda\nu})$. (3.10.19)

由(3.10.19)和(3.10.17)，得到

$$R^{\mu}_{\lambda}=h^{\alpha\nu}(h^{\mu}_{\alpha;\nu\lambda}-h^{\mu}_{\alpha;\lambda\nu})=$$

$$h^{\alpha\nu}{}_{;\nu}h^{\mu}_{\alpha;\lambda}+h^{\alpha\mu}{}_{;\nu}h^{\nu}_{\alpha;\lambda}+h^{\alpha\mu}h^{\nu}_{\alpha;\lambda\nu}+h^{\alpha\nu}h^{\mu}_{\alpha;\nu\lambda}. \tag{3.10.20a}$$

再缩并得 $R=h^{\alpha\nu}_{;\nu}h^{\mu}_{\alpha;\mu}+h^{\alpha\nu}_{;\mu}h^{\mu}_{\alpha;\nu}+2h^{\alpha\nu}h^{\mu}_{\alpha;\nu\mu}$. (3.10.20b)

由上式可见，无论在坐标空间还是在标架空间，R 都是标量.

下面我们给出引力场方程的正交标架形式. 引力场的拉格朗日 $L=L(g_{\mu\nu}, g_{\mu\nu,\lambda})$，而

$$g_{\mu\nu}=h^{\alpha}_{\mu}h_{\alpha\nu}.$$

现在对标架进行变分：

$$\delta g_{\mu\nu}=h^{\alpha}_{\mu}\delta h_{\alpha\nu}+(\delta h^{\alpha}_{\mu})h_{\alpha\nu}=h^{\alpha}_{\mu}\delta h_{\alpha\nu}+h^{\alpha}_{\nu}\delta h_{\alpha\mu}=$$

$$h^{\alpha}_{\mu}\delta(g_{\rho\nu}h^{\rho}_{\alpha})+h^{\alpha}_{\nu}\delta(g_{\rho\mu}h^{\rho}_{\alpha})=2\delta g_{\mu\nu}+(h^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\nu}+h^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\mu})h^{\rho}_{\alpha}.$$

$$(3.10.21)$$

即 $$\delta g_{\mu\nu}=-(h^{\alpha}_{\mu}g_{\rho\nu}+h^{\alpha}_{\nu}g_{\rho\mu})\delta h^{\rho}_{\alpha}. \tag{3.10.22}$$

将上式代入(3.4.13)，得到

$$\delta I_{g}=\int\sqrt{-g}\left(R^{\mu}_{\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}R\right)h^{\alpha}_{\mu}\delta h^{\rho}_{\alpha}\mathrm{d}^{4}_{x}. \tag{3.10.23}$$

此时(3.4.21)和(3.4.22)为

$$\delta I_{f}=-k\int\sqrt{-g}T^{\mu}_{\rho}h^{\alpha}_{\mu}\delta h^{\rho}_{\alpha}\mathrm{d}^{4}_{x}. \tag{3.10.24}$$

将(3.10.23)和(3.10.24)代入 $\delta(I_{g}+I_{f})=0$，得到

$$\left(R^{\mu}_{\rho}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\rho}R\right)h^{\alpha}_{\mu}=kT^{\mu}_{\rho}h^{\alpha}_{\mu}, \tag{3.10.25}$$

即 $$R^{\alpha}_{\rho}-\frac{1}{2}Rh^{\alpha}_{\rho}=kT^{\alpha}_{\rho}. \tag{3.10.26}$$

此即正交标架形式的 Einstein 引力场方程. 两端乘以 $h_{\alpha\lambda}$便得到坐标形式的场方程.

§ 3.11 引力场方程的零标架形式

Einstein 引力场方程除了通常的张量形式外，还常以其他形式给出. 其中一种很有用的形式是 Newman 和 Penrose 给出的零标架形式，常称为 Newman-penrose 方程.

1. 零标架

在四维时空中每一点，引入一组矢量 l_μ，n_μ，m_μ 和 $\overline{m}_\mu$ 构成一标架. 其中 l_μ 和 n_μ 为实的零矢量，m_μ 和 $\overline{m}_\mu$ 为一对复的零矢量. m_μ 由两个实的正交矢量 a_μ 和 b_μ 构成：

$$m_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_\mu-ib_\mu). \tag{3.11.1}$$

标架(l_μ，n_μ，m_μ，$\overline{m}_\mu$)满足准正交条件：

$$\begin{aligned}&l_\mu m^\mu=n_\mu m^\mu=l_\mu\overline{m}^\mu=n_\mu\overline{m}^\mu=0,\\&l_\mu l^\mu=n_\mu n^\mu=m_\mu m^\mu=\overline{m}_\mu\overline{m}^\mu=0,\\&l_\mu n^\mu=-m_\mu\overline{m}^\mu=1.\end{aligned} \tag{3.11.2}$$

引入零标架符号

$$Z_{m\mu}=(l_\mu,\ n_\mu,\ m_\mu,\ \overline{m}_\mu),\quad m=1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{3.11.3}$$

零标架指标 m 的升降由平直时空度规 η^{mn}进行，η^{mn}的形式为

$$\eta^{mn}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\eta_{mn}. \tag{3.11.4}$$

度规张量 $g_{\mu\nu}$可表示为

$$g_{\mu\nu}=Z_{m\mu}Z_{n\nu}\eta^{mn}=l_\mu n_\nu+n_\mu l_\nu-m_\mu\overline{m}_\nu-\overline{m}_\mu n_\nu, \tag{3.11.5}$$

$$\eta_{mn}=Z_{m\mu}Z_{n\nu}g^{\mu\nu}. \tag{3.11.6}$$

2. 旋系数

由这一标架可以定义复的 Ricci 旋系数 γ^{mnp}：

$$\gamma^{mnp}=Z^m_{\mu;\nu}Z^{n\mu}Z^{p\nu}. \tag{3.11.7}$$

γ^{mnp}具有反对称性：

$$\gamma^{mnp} = -\gamma^{nmp}. \tag{3.11.8}$$

12 个旋系数表示为

$$\kappa = \gamma_{131} = l_{\mu;\nu} m^\mu l^\nu, \tag{3.11.9a}$$

$$\rho = \gamma_{134} = l_{\mu;\nu} m^\mu \overline{m}^\nu, \tag{3.11.9b}$$

$$\sigma = \gamma_{133} = l_{\mu;\nu} m^\mu m^\nu, \tag{3.11.9c}$$

$$\tau = \gamma_{132} = l_{\mu;\nu} m^\mu n^\nu, \tag{3.11.9d}$$

$$\nu = -\gamma_{242} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu n^\nu \tag{3.11.9e}$$

$$\mu = -\gamma_{243} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu m^\nu, \tag{3.11.9f}$$

$$\lambda = -\gamma_{244} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu, \tag{3.11.9g}$$

$$\pi = -\gamma_{241} = -n_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu l^\nu, \tag{3.11.9h}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\gamma_{124} - \gamma_{344}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu \overline{m}^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu), \tag{3.11.9i}$$

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma_{123} - \gamma_{343}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu m^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu m^\nu), \tag{3.11.9j}$$

$$\gamma = \frac{1}{2}(\gamma_{122} - \gamma_{342}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu n^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu n^\nu), \tag{3.11.9k}$$

$$\epsilon = \frac{1}{2}(\gamma_{121} - \gamma_{341}) = \frac{1}{2}(l_{\mu;\nu} n^\mu l^\nu - m_{\mu;\nu} \overline{m}^\mu l^\nu). \tag{3.11.9l}$$

3. 张量和方向导数

任一线量 $T_{\mu\nu\cdots}$ 的标架分量定义为

$$T_{mn\cdots} = T_{\mu\nu\cdots} Z^\mu_m Z^\nu_n \cdots. \tag{3.11.10}$$

在坐标空间中 Weyl 张量表示为

$$C_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\mu\nu} - \frac{1}{2}(g_{\rho\mu} R_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu} R_{\sigma\mu} - g_{\sigma\mu} R_{\rho\nu} + g_{\sigma\nu} R_{\rho\mu}) - \frac{1}{6}(g_{\rho\nu} g_{\sigma\mu} - g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu}) R.$$

在零标架中具有形式

$$C_{mnpq} = R_{mnpq} - \frac{1}{2}(\eta_{mp} R_{nq} - \eta_{mq} R_{np} - \eta_{np} R_{mq} + \eta_{nq} R_{mp}) - \frac{1}{6}(\eta_{mq} \eta_{np} - \eta_{mp} \eta_{nq}). \tag{3.11.11a}$$

利用 Weyl 张量的无迹性和恒等式

$$\eta^{mn} C_{mpqn} = C_{1pq2} + C_{2pq1} - C_{3pq4} - C_{4pq3} = 0,$$

$$C_{1234}+C_{1423}+C_{1342}=0,$$

我们得到

$$C_{1314}=C_{1413}=C_{2324}=C_{2423}=C_{1323}=C_{1424}=0,$$

$$C_{1313}=\overline{C}_{1414},\ C_{1213}=C_{1343}=\overline{C}_{1434}=\overline{C}_{1214},$$

$$C_{1242}=C_{2434}=\overline{C}_{1232}=\overline{C}_{2343},\ C_{2424}=C_{2323},$$

$$C_{1342}=\frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234})=\frac{1}{2}(C_{3434}-C_{1234}).$$

Weyl 张量的 5 个独立分量可写为

$$\Psi_0=-C_{1313}=-C_{\mu\nu\tau\lambda}l^\mu m^\nu l^\tau m^\lambda, \tag{3.11.11b}$$

$$\Psi_1=-C_{1213}=-C_{\mu\nu\tau\lambda}l^\mu n^\nu l^\tau m^\lambda, \tag{3.11.11c}$$

$$\Psi_2=-\frac{1}{2}(C_{1212}-C_{1234})=$$

$$-\frac{1}{2}C_{\mu\nu\tau\lambda}l^\mu n^\nu(l^\tau n^\lambda-m^\tau\overline{m}^\lambda), \tag{3.11.11d}$$

$$\Psi_3=-C_{1242}=-C_{\mu\nu\tau\lambda}\overline{m}^\mu n^\nu l^\tau n^\lambda, \tag{3.11.11e}$$

$$\Psi_4=-C_{2424}=-C_{\mu\nu\tau\lambda}\overline{m}^\mu n^\nu\overline{m}^\tau n^\lambda. \tag{3.11.11f}$$

Ricci 张量的 6 个独立分量为

$$\Phi_{00}=-\frac{1}{2}R_{11}=\overline{\Phi}_{00}, \tag{3.11.12a}$$

$$\Phi_{11}=-\frac{1}{4}(R_{12}+R_{34}), \tag{3.11.12b}$$

$$\Phi_{01}=-\frac{1}{2}R_{13}=\overline{\Phi}_{10}, \tag{3.11.12c}$$

$$\Phi_{12}=-\frac{1}{2}R_{23}, \tag{3.11.12d}$$

$$\Phi_{10}=-\frac{1}{2}R_{14}=\overline{\Phi}_{01}, \tag{3.11.12e}$$

$$\Phi_{21}=-\frac{1}{2}R_{24}, \tag{3.11.12f}$$

$$\Phi_{02}=-\frac{1}{2}R_{33}=\overline{\Phi}_{20}, \tag{3.11.12g}$$

$$\Phi_{22}=-\frac{1}{2}R_{22}, \tag{3.11.12h}$$

$$\Phi_{20}=-\frac{1}{2}R_{44}, \tag{3.11.12i}$$

标曲率为 $\Lambda = \frac{R}{24}$. (3.11.12j)

任意标量的方向导数定义为

$$D\phi = \phi_{;\mu} l^\mu = \phi_{,\mu} l^\mu, \tag{3.11.13a}$$

$$\nabla\phi = \phi_{;\mu} n^\mu = \phi_{,\mu} n^\mu, \tag{3.11.13b}$$

$$\delta\phi = \phi_{;\mu} m^\mu = \phi_{,\mu} m^\mu, \tag{3.11.13c}$$

$$\bar{\delta}\phi = \phi_{;\mu} \overline{m}^\mu = \phi_{,\mu} \overline{m}^\mu. \tag{3.11.13d}$$

或者写为 $D = l^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ \nabla = n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},$

$$\delta = m^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu},\ \bar{\delta} = \overline{m}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \tag{3.11.13e}$$

4. Newman-Penrose 方程

应用前面定义的符号，可以把 Einstein 引力场方程写成零标架形式，这就是 Newman-Penrose 方程. 这是一组一阶偏微分方程，含有 5 个 Weyl 张量的标架分量，6 个独立的 Einstein 张量分量，标曲率 Λ 和 12 个复的旋系数.

Newman-Penrose 方程分为三组：对易关系，Ricci 恒等式和 Bianchi 恒等式.

(1) 对易关系

按定义有

$$\phi^{;m} = \phi_{;\mu} Z^{m\mu}, \tag{3.11.14}$$

于是可以得到 $\phi^{;m;n}$ 和 $\phi^{;n;m}$ 的表达式：

$$\phi^{;m;n} = (\phi_{;\nu} Z^{m\mu})_{;\mu} Z^{n\nu} = \phi_{;\mu\nu} Z^{m\mu} Z^{n} + \phi^{;l}\gamma^{m;n}, \tag{3.11.15}$$

$$\phi^{;n;m} = (\phi_{;\nu} Z^{n\nu})_{;\mu} Z^{m\mu} = \phi_{;\nu\mu} Z^{m\mu} Z^{n\nu} + \phi^{;l}\gamma^{n;m}.$$

由上式得 $\phi^{;m;n} - \phi^{;n;m} = \phi^{;\nu}(\gamma_l^{mn} - \gamma_l^{nm})$. (3.11.16)

在此式中取$(m, n) = (1, 2), (2, 4), (1, 4), (3, 4)$，得到

$$(\Delta D - D\Delta)\phi = [(\gamma + \bar{\gamma})D + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\Delta - (\tau + \bar{\pi})\bar{\delta} - (\bar{\tau} + \pi)\delta]\phi, \tag{3.11.17a}$$

$$(\delta D - D\delta)\phi = [(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})D + k\Delta - \sigma\bar{\delta} - (\bar{\rho} + \varepsilon - \bar{\varepsilon})\delta]\phi, \tag{3.11.17b}$$

$$(\delta\Delta - \Delta\delta)\phi = [-\bar{\nu}D + (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\Delta + \overline{\lambda\delta} +$$

$$(\mu - \gamma + \bar{\gamma})\delta]\phi, \qquad (3.11.17c)$$

$$(\bar{\delta}\delta - \delta\bar{\delta})\phi = [(\bar{\mu} - \mu)D + (\bar{\rho} - \rho)\Delta - (\bar{\alpha} - \beta)\delta - (\bar{\beta} - \alpha)\bar{\delta}]\phi), \qquad (3.11.17d)$$

(2) Ricci 恒等式和旋系数方程

根据 Ricci 恒等式

$$Z_{m\mu;[\nu\rho]} = \frac{1}{2}Z_{m\sigma}R^{\sigma}_{\mu\rho}; \qquad (3.11.18)$$

可得 Riemann 张量的标架形式：

$$R^{mnpq} = \gamma^{mnp;q} - \gamma^{mnq;p} + \gamma^{mq}_{l}\gamma^{lnp} - \gamma^{mp}_{l}\gamma^{mnq} + \gamma^{mnl}(\gamma^{pq}_{l} - \gamma^{qp}_{l}). \qquad (3.11.19)$$

将(3.11.11)代入上式，得到

$$\gamma_{mn[p;q]} + \gamma_{lmq}\gamma^{l}_{np} - \gamma_{lmp}\gamma^{l}_{nq} + \gamma^{l}_{mn}(\gamma_{lpq} - \gamma_{lpq}) = C_{mnpq} - \frac{1}{2}(\eta_{mp}R_{nq} - \eta_{nq}R_{np} + \eta_{nq}R_{mp} - \eta_{np}R_{mq}) - \frac{1}{6}R(\eta_{mq}\eta_{np} - \eta_{mp}\eta_{nq}), \qquad (3.11.20)$$

在上式中取

$(m,n,p,q) = (1,3,4,1),(1,3,3,1),(1,3,2,1),[(1,2,4,1)-(3,4,4,1)],[(1,2,3,1)-(3,4,3,1)],[(1,2,2,1)-(3,4,2,1)],(2,4,4,1),(2,4,3,1),(2,4,2,1).(2,4,4,2),(1,3,4,3),[(1,2,4,3)-(3,4,4,3)],(2,4,4,3),(2,4,2,3),[(1,2,2,3)-(3,4,2,3)],(1,3,2,3),(1,3,4,2),[(1,2,4,2)-(3,4,4,2)]$，注意到旋系数、Weyl 张量和 Ricci 张量的标架表达式，我们得到下面一组方程：

$$D\rho - \bar{\delta}\kappa = (\rho^2 + \sigma\bar{\sigma}) + (\varepsilon + \bar{\varepsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) + \Phi_{00}, \qquad (3.11.21a)$$

$$D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\varepsilon - \bar{\varepsilon})\sigma - (\tau - \pi + \bar{\alpha} + 3\beta)\kappa + \Psi_0, \qquad (3.11.21b)$$

$$D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\varepsilon - \bar{\varepsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \Psi_1 + \Phi_{01}, \qquad (3.11.21c)$$

$$D\alpha - \bar{\delta}\varepsilon = (\rho + \bar{\varepsilon} - 2\varepsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\varepsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma +$$

$$(\epsilon + \rho)\pi + \Phi_{10}, \qquad (3.11.21d)$$

$$D\beta - \delta\epsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \Psi_1, \qquad (3.11.21e)$$

$$D\gamma - \Delta\epsilon = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \Psi_2 - \Lambda + \Phi_{11}, \qquad (3.11.21f)$$

$$D\lambda - \bar{\delta}\pi = (\rho\lambda + \bar{\sigma}\mu) + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda + \Phi_{20}, \qquad (3.11.21g)$$

$$D\mu - \delta\pi = (\bar{\rho}\mu + \sigma\lambda) + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \Psi_2 + 2\Lambda, \qquad (3.11.21h)$$

$$D\nu - \Delta\pi = (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \Psi_3 + \Phi_{21}, \qquad (3.11.21i)$$

$$D\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \Psi_4, \qquad (3.11.21j)$$

$$\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \Psi_1 + \Phi_{10}, \qquad (3.11.21k)$$

$$\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = (\mu\rho - \lambda\sigma) + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \Psi_2 + \Lambda + \Phi_{11}, \qquad (3.11.21l)$$

$$\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \Psi_3 + \Phi_{21}, \qquad (3.11.21m)$$

$$\delta\nu - \Delta\mu = (\mu^2 + \lambda\bar{\lambda}) + (\gamma + \bar{\gamma})\mu + \bar{\nu}\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu + \Phi_{22}, \qquad (3.11.21n)$$

$$\delta\gamma - \Delta\beta = (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\lambda + \Phi_{12}, \qquad (3.11.21o)$$

$$\delta\tau - \Delta\sigma = (\mu\sigma + \bar{\lambda}\rho) + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} + \Phi_{02}, \qquad (3.11.21p)$$

$$\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -(\rho\bar{\mu} + \sigma\lambda) + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \Psi_2 - 2\Lambda, \qquad (3.11.21q)$$

$$\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha +$$

$$(\bar{\beta}-\bar{\tau})\gamma-\Psi_3. \tag{3.11.21r}$$

(3) Bianchi 恒等式

Bianchi 恒等式 $R_{\mu\nu[\tau\lambda;\sigma]}=0$ 在零标架中具有形式

$$R_{mn[pq;r]}-(\gamma^l_{mr}R_{pqln}+\gamma^l_{mp}R_{qrln}+\gamma^l_{mq}R_{rpln}-\gamma^l_{nr}R_{pqlm}-\gamma^l_{np}R_{qrlm}-\gamma^l_{nq}R_{rplm}+2R_{mnlp}\gamma^l_{rq}+2R_{mnlr}\gamma^l_{qp}+2R_{mnlq}\gamma^l_{pr})=0. \tag{3.11.22}$$

在上式中，取 $(m,n,p,q,r)=(1,3,1,3,4),(1,3,4,2,1),(1,3,1,3,2),[(2,1,1,3,2)-(2,3,1,3,4)],[(1,2,2,4,1)-(1,4,2,4,3)],(2,4,3,1,2),(2,4,2,4,1),(2,4,2,4,3),\{[4,3,1,3,4)+(1,2,3,4,1)]+2(1,3,4,2,1)\},\{[(2,1,1,3,2)-(2,3,1,3,4)]-(1,3,4,2,3)\},\{[(3,4,2,4,3)+2,1,4,3,2)]+(2,4,3,1,2)\}$，

注意 Riemann 张量的标架表达式，我们得到下面一组方程：

$$\bar{\delta}\Psi_0-D\Psi_1-D\Phi_{01}-\delta\Phi_{00}=(4\alpha-\pi)\Psi_0-2(2\rho+\varepsilon)\Psi_1+3\kappa\Psi_2+(\bar{\pi}-2\bar{\alpha}-2\beta)\Phi_{00}+2(\varepsilon+\bar{\rho})\Phi_{01}+2\sigma\Phi_{10}-2\kappa\Phi_{11}-\bar{\kappa}\Phi_{02}, \tag{3.11.23a}$$

$$\Delta\Psi_0-\delta\Psi_1+D\Phi_{02}-\delta\Phi_{01}=(4\gamma-\mu)\Psi_0-2(2\tau+\beta)\Psi_1+3\sigma\Psi_2-\bar{\lambda}\Phi_{00}+2(\bar{\pi}-\beta)\Phi_{01}+2\sigma\Phi_{11}+(2\varepsilon-2\bar{\varepsilon}+\bar{\rho})\Phi_{02}-2\kappa\Phi_{12}, \tag{3.11.23b}$$

$$3(\bar{\delta}\Psi_1-D\Psi_2)+2(D\Phi_{11}-\delta\Phi_{10})+\bar{\delta}\Phi_{01}-\Delta\Phi_{00}=3\lambda\Psi_0-9\rho\Psi_2+6(\alpha-\pi)\Psi_1+6\kappa\Psi_3+(\bar{\mu}-2\mu-2\gamma-2\bar{\gamma})\Phi_{00}+(2\alpha+2\pi+2\bar{\tau})\Phi_{01}+2(\tau-2\bar{\alpha}+\bar{\pi})\Phi_{10}+2(2\bar{\rho}-\rho)\Phi_{11}+2\sigma\Phi_{20}-\bar{\delta}\Phi_{02}-2\kappa\bar{\Phi}_{12}-2\kappa\Phi_{21}, \tag{3.11.23c}$$

$$3(\Delta\Psi_1-\delta\Psi_2)+2(D\Phi_{12}-\delta\Phi_{11})+(\bar{\delta}\Phi_{02}-\Delta\Phi_{01})=3\nu\Psi_0+6(\gamma-\mu)\Psi_1-9\tau\Psi_2+6\delta\Psi_3-\bar{\nu}\Phi_{00}+2(\bar{\mu}-\mu-\gamma)\Phi_{01}-2\bar{\lambda}\Phi_{10}+2(\tau+2\bar{\pi})\Phi_{11}+(2\alpha+2\pi+\bar{\tau}-2\bar{\beta})\Phi_{02}+(2\bar{\rho}-2\rho-4\bar{\varepsilon})\Phi_{12}+2\sigma\Phi_{21}-2\kappa\Phi_{22}, \tag{3.11.23d}$$

$$3(\bar{\delta}\Psi_2 - D\Psi_3) + D\Phi_{21} - \delta\Phi_{20} + 2(\bar{\delta}\Phi_{11} - \Delta\Phi_{10}) =$$
$$6\lambda\Psi_1 - 9\pi\Psi_2 + 6(\epsilon - \rho)\Psi_3 + 3\kappa\Psi_4 - 2\nu\Phi_{00} +$$
$$2\lambda\Phi_{01} + 2(\bar{\mu} - \mu - 2\bar{\gamma})\Phi_{10} + (2\pi + 4\bar{\tau})\Phi_{11} +$$
$$(2\beta + 2\tau + \bar{\pi} - 2\bar{\alpha})\Phi_{20} - 2\bar{\sigma}\Phi_{12} +$$
$$2(\bar{\rho} - \rho - \epsilon)\Phi_{21} - \bar{\kappa}\Phi_{22}, \tag{3.11.23e}$$
$$3(\Delta\Psi_2 - \delta\Psi_3) + D\Phi_{22} - \delta\Phi_{21} + 2(\bar{\delta}\Phi_{12} - \Delta\Phi_{11}) =$$
$$6\nu\Psi_1 - 9\mu\Psi_2 + 6(\beta - \tau)\Psi_3 + 3\sigma\Psi_4 - 2\nu\Phi_{01} -$$
$$2\bar{\nu}\Phi_{10} + 2(2\bar{\mu} - \mu)\Phi_{11} + 2\lambda\Phi_{02} - \bar{\lambda}\Phi_{20} + 2(\pi + \bar{\tau} -$$
$$2\beta)\Phi_{12} + 2(\beta + \tau + \bar{\pi})\Phi_{21} + (\bar{\rho} -$$
$$2\epsilon - 2\bar{\epsilon} - 2\rho)\Phi_{22}, \tag{3.11.23f}$$
$$\bar{\delta}\Psi_3 - D\Psi_4 + \bar{\delta}\Phi_{21} - \Delta\Phi_{20} =$$
$$3\lambda\Psi_2 - 2(\alpha - 2\pi)\Psi_3 + (4\epsilon - \rho)\Psi_4 - 2\nu\Phi_{10} +$$
$$2\lambda\Phi_{11} + (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\Phi_{20} + 2(\bar{\tau} - \alpha)\Phi_{21} - \bar{\sigma}\Phi_{22}, \tag{3.11.23g}$$
$$\Delta\Psi_3 - \delta\Psi_4 + \bar{\delta}\Phi_{22} - \Delta\Phi_{21} =$$
$$3\nu\Psi_2 - 2(\gamma + 2\mu)\Psi_3 + (4\beta - \tau)\Psi_4 - 2\nu\Phi_{11} -$$
$$\bar{\nu}\Phi_{20} + 2\lambda\Phi_{12} + 2(\gamma + \bar{\mu})\Phi_{21} + (\bar{\tau} - 2\beta - 2\alpha)\Phi_{22}. \tag{3.11.23h}$$
$$D\Phi_{11} - \delta\Phi_{10} - \bar{\delta}\Phi_{01} + \Delta\Phi_{00} + 3D\Lambda =$$
$$(2\gamma - \mu + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\Phi_{00} + (\pi - 2\alpha - 2\bar{\tau})\Phi_{01} +$$
$$(\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\tau)\Phi_{10} + 2(\rho + \bar{\rho})\Phi_{11} + \bar{\sigma}\Phi_{02} + \sigma\Phi_{20} -$$
$$\bar{\kappa}\Phi_{12} - \kappa\Phi_{21}, \tag{3.11.23i}$$
$$D\Phi_{21} - \delta\Phi_{11} - \bar{\delta}\Phi_{02} + \Delta\Phi_{01} + 3\delta\Lambda =$$
$$(2\gamma - \mu - 2\bar{\mu})\Phi_{01} + \bar{\nu}\Phi_{00} - \bar{\lambda}\Phi_{01} + (2\bar{\pi} - \tau)\Phi_{11} +$$
$$(\pi + 2\bar{\beta} - 2\alpha - \bar{\tau})\Phi_{02} + (2\rho + \bar{\rho} - 2\bar{\epsilon})\Phi_{12} +$$
$$\sigma\Phi_{21} - \kappa\Phi_{22}, \tag{3.11.23j}$$
$$D\Phi_{22} - \delta\Phi_{21} - \bar{\delta}\Phi_{12} + \Delta\Phi_{11} + 3\Delta\Lambda =$$
$$\nu\Phi_{01} + \bar{\nu}\Phi_{10} - 2(\mu + \bar{\mu})\Phi_{11} - \lambda\Phi_{02} - \bar{\lambda}\Phi_{20} +$$
$$(2\pi - \bar{\tau} + 2\bar{\beta})\Phi_{12} + (2\beta - \tau + 2\bar{\pi})\Phi_{21} +$$

$$(\rho + \bar{\rho} - 2\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\Phi_{22}. \tag{3.11.23k}$$

方程(3.11.17),(3.11.21)和(3.11.23)即为 Einstein 场方程的 Newman-Penrose 形式.

(4) 速度场

速度 u^μ 的协变导数可构成一个与 u^μ 正交的表达式 $u_{\mu;\nu} + u_{\mu;\lambda}u^\lambda u_\nu$. 此式可分解为反对称部分、对称无迹部分和它的迹:

$$u_{\mu;\nu} + u_{\mu;\lambda}u^\lambda u_\nu = \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \theta h_{\mu\nu}/3,$$

即
$$u_{\mu;\nu} = -\dot{u}_\mu u_\nu + \omega_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} + \theta h_{\mu\nu}/3. \tag{3.11.24}$$

式中
$$\dot{u}_\mu = u_{\mu;\nu}u^\nu = \frac{Du_\mu}{Ds},$$

$$\omega_{\mu\nu} = u_{[\mu;\nu]} + \dot{u}_{[\mu}u_{\nu]}, \tag{3.11.25a}$$

$$\sigma_{\mu\nu} = u_{(\mu;\nu)} + \dot{u}_{(\mu}u_{\nu)} - \theta h_{\mu\nu}/3, \tag{3.11.25b}$$

$$\theta = u^\mu{}_{;\mu}, \tag{3.11.25c}$$

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu; \tag{3.11.25d}$$

$$\dot{u}_\mu u^\mu = 0,\ \omega_{\mu\nu}u^\nu = 0,\ \sigma_{\mu\nu}u^\nu = 0,\ h_{\mu\nu}u^\nu = 0. \tag{3.11.25e}$$

速度场的性质包含在这些量中,$\dot{u}_\mu$ 称为加速度,$\omega_{\mu\nu}$称为**扭或旋速度**,$\sigma_{\mu\nu}$称为**切变速度**,θ 称为**膨胀速度**. 现在我们来说明这些量的几何意义.

设物质元的世界线簇(流线簇)为

$$x^\mu = x^\mu(y^i, \tau).$$

速度场为 $u^\mu(x^\nu) = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$.

沿着每条世界线有 $y^i = \text{const}$. 当 τ 不变时,由世界线 y^i 到邻近的世界线$(y^i + \delta y^i)$有增量

$$\delta x^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i}\delta y^i.$$

由于
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}\delta x^\mu = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\mu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\delta x^\beta = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau\partial y^i}\delta y^i + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta =$$
$$\frac{\partial u^\mu}{\partial y^i}\delta y^i + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\delta x^\nu + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha\delta x^\beta,$$

所以沿世界线有

$$(\delta x^\mu)^{\cdot} = u^\mu_{;\nu}\delta x^\nu.$$

对于随动系中的观测者，邻近体元的位移应是 δx^μ 向他的三维空间的投影：

$$\delta_\perp x^\mu=(g^\mu_\nu+u^\mu u_\nu)\delta x^\nu=h^\mu_\nu\delta x^\nu.$$

根据以上二式，注意到 $(\delta_\perp x^\mu)u_\mu=0$，得到相应的速度

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}(\delta_\perp x^\mu)-(\delta_\perp x^\nu)(u^\mu\dot{u}_\nu-\dot{u}^\mu u_\nu)=(\delta_\perp x^\nu)\cdot h^\mu_\nu.$$

将(3.11.25)代入上式，得到

$$(\delta_\perp x^\nu)\cdot h^\mu_\nu=(u^\mu_{;\nu}+\dot{u}^\mu u_\nu)\delta_\perp x^\nu=(\omega^\mu_\nu+\sigma^\mu_\nu+\theta\delta^\mu_\nu/3)\delta_\perp x^\nu.$$

由上式可以发现，膨胀速度 θ 为径向速度，其大小和方向无关. 当 $\theta>0$ 时物质元的体积膨胀，当 $\theta<0$ 时收缩. 根据(3.1.1)，可将反对称张量 $\omega_{\mu\nu}$ 变换为旋速度矢量 ω^μ：

$$\omega^\mu=\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\tau}u_\nu\omega_{\lambda\tau},\ \omega_{\lambda\tau}=\varepsilon_{\lambda\tau\alpha\beta}\omega^\alpha u^\beta.$$

由 ω^μ 描述的速度场具有形式

$$(\delta_\perp x^\nu)\cdot h^\mu_\nu=\varepsilon^\mu_{\nu\lambda\tau}\omega^\lambda u^\tau\delta_\perp x^\nu,$$

可见速度垂直于位移 $\delta_\perp x^\mu$，也垂直于旋速度 ω^μ. 所以，$\omega_{\mu\nu}$ 表征绕轴 ω^μ 旋转. 关于切变速度，由于迹 $\sigma^\mu_\mu=0$，所以 $\sigma_{\mu\nu}$ 表征物质元由球变为椭球的等体积形变.

由零标架矢量 l_μ 的协变导数可以构成与(3.11.25)对应的三个标量场. 定义 $l^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial v}$，$v$ 是沿着固定短程线的仿射参量. 这三个标量可以写为

$$\theta=-\frac{1}{2}l^\mu_{;\mu},\tag{3.11.26a}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{2}l_{[\mu;\nu]}l^{\mu;\nu}},\tag{3.11.26b}$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu}-\theta^2}.\tag{3.11.26c}$$

由(3.11.9)可以得到

$$l_{\mu;\nu}=(\gamma+\bar{\gamma})l_\mu l_\nu+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})l_\mu n_\nu-(\alpha+\bar{\beta})l_\mu m_\nu-$$
$$(\bar{\alpha}+\beta)l_\mu\bar{m}_\nu-\bar{\tau}m_\mu l_\nu-\tau\bar{m}_\mu l_\nu-\bar{k}m_\mu n_\nu-$$

$$\kappa\overline{m}_\mu n_\nu+\bar{\sigma}m_\mu m_\nu+\sigma\overline{m}_\mu\overline{m}_\nu+\bar{\rho}m_\mu\overline{m}_\nu+\rho\overline{m}_\mu\overline{m}_\nu.$$

(3.11.27)

我们可以沿上述零曲线族中每一条短程线引入一仿射参量，从而使 $\varepsilon+\bar{\varepsilon}=0$. 进而，因 l_μ 为短程线的切线，故有 $\kappa=0$. 采用(3.11.27)，可将标量场 θ,ω 和 $|\sigma|$ 用旋系数表示出来：

$$\theta=\frac{1}{2}(\rho+\bar{\rho}), \tag{3.11.28}$$

$$\omega=\frac{1}{2}|\rho+\bar{\rho}|, \tag{3.11.29}$$

$$|\sigma|=\sqrt{\sigma\bar{\sigma}}. \tag{3.11.30}$$

(5)Maxwell 方程

在零标架形式中，Maxwell 方程可写为

$$\eta^{pq}(F_{mp;q}-F_{lp}\gamma^l_{mq}-F_{ml}\gamma^l_{pq})=J_m. \tag{3.11.31}$$

在上式中取 $m=1, 2, 3, 4$，得到

$$\mathrm{D}\Phi_1-\bar{\delta}\Phi_0=(\pi-2\alpha)\Phi_0+2\rho\Phi_1-\kappa\Phi_2+J_1, \tag{3.11.32a}$$

$$\mathrm{D}\Phi_2-\bar{\delta}\Phi_1=-\lambda\Phi_0+2\pi\Phi_1+(\rho-2\varepsilon)\Phi_2+J_4, \tag{3.11.32b}$$

$$\delta\Phi_2-\Delta\Phi_1=-\nu\Phi_0+2\mu\Phi_1+(\tau-2\beta)\Phi_2+J_2, \tag{3.11.32c}$$

$$\delta\Phi_1-\Delta\Phi_0=(\mu-2\gamma)\Phi_0+2\tau\Phi_1-\sigma\Phi_2+J_3. \tag{3.11.32d}$$

式中

$$\Phi_0=F_{\mu\nu}l^\mu m^\nu, \tag{3.11.33a}$$

$$\Phi_1=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu+\overline{m}^\mu m^\nu), \tag{3.11.33b}$$

$$\Phi_2=F_{\mu\nu}\overline{m}^\mu n^\nu; \tag{3.11.33c}$$

$$J_m=J_\mu Z^\mu_m,$$

J_μ 为四维电流密度矢量.

方程组(3.11.32)即 Maxwell 方程的零标架形式.

$F_{\mu\nu}$可用零标架表示为

$$F_{\mu\nu}=-4Re(\Phi_1)l_{[\mu}n_{\nu]}+4iI_m(\Phi_1)m_{[\mu}\overline{m}_{\nu]}+2\Phi_2 l_{[\mu}m_{\nu]}+$$
$$2\Phi_2 l_{[\mu}\overline{m}_{\nu]}-2\Phi_0 n_{[\mu}m_{\nu]}-2\Phi_0 n_{[\mu}\overline{m}_{\nu]}. \tag{3.11.34}$$

将上式代入电磁场能-动张量表达式

$$E_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}-F_{\mu\sigma}F^\sigma_\nu\right), \tag{3.11.35}$$

得到相应的标架表示形式：

$$4\pi E_{\mu\nu}=2\{|\Phi_2|^2 l_\mu l_\nu+|\Phi_0|^2 n_\mu n_\nu+\overline{\Phi}_0\Phi_2 m_\mu m_\nu+\\ \Phi_0\overline{\Phi}_2\overline{m}_\mu\overline{m}_\nu\}+4|\Phi_1|^2\{l_{(\mu}n_{\nu)}+m_{(\mu}\overline{m}_{\nu)}\}-\\ 4\Phi_1\Phi_2 l_{(\mu}m_{\nu)}-4\Phi_1\overline{\Phi}_2 l_{(\mu}\overline{m}_{\nu)}-\\ 4\overline{\Phi}_0\Phi_1 n_{(\mu}m_{\nu)}-4\Phi_0\overline{\Phi}_1 n_{(\mu}\overline{m}_{\nu)}. \tag{3.11.36}$$

如果能够解方程(3.11.32)求得 Φ_0，Φ_1 和 Φ_2，则可以代入(3.11.34)和(3.11.35)，得到 Maxwell 张量和电磁场能-动张量的协变分量(坐标分量).

如果 Ricci 张量和 Maxwell 张量成正比，即

$$\Phi_{mn}=\kappa\Phi_m\Phi_n(m,\ n=0,\ 1,\ 2). \tag{3.11.37}$$

取 $\kappa=1$，Bianchi 恒等式成为

$$(\delta-\tau+4\beta)\Psi_4-(\Delta+2\gamma+4\mu)\Psi_3+3\nu\Psi_2=\\ \overline{\Phi}_1\Delta\Phi_2-\overline{\Phi}_2\delta\Phi_2+2(\overline{\Phi}_1\Phi_1\nu-\overline{\Phi}_2\Phi_1\lambda-\overline{\Phi}_1\Phi_2\gamma+\overline{\Phi}_2\Phi_2\alpha), \tag{3.11.38a}$$

$$(\delta-2\tau+2\beta)\Psi_3+\sigma\Psi_4-(\Delta+3\mu)\Psi_2+2\nu\Psi_1=\\ \overline{\Phi}_1\delta\Phi_2-\overline{\Phi}_2 D\Phi_2+2(\overline{\Phi}_1\Phi_1\mu-\overline{\Phi}_2\Phi_1\pi-\overline{\Phi}_1\Phi_2\beta+\overline{\Phi}_2\Phi_2\varepsilon), \tag{3.11.38b}$$

$$(\delta-3\tau)\Psi_2+2\sigma\Psi_3-(\Delta-2\gamma+2\mu)\Psi_1+\nu\Psi_0=\\ \overline{\Phi}_1\Delta\Phi_0-\overline{\Phi}_2\delta\Phi_0+2(\overline{\Phi}_1\Phi_0\gamma-\overline{\Phi}_2\Phi_0\alpha-\overline{\Phi}_1\Phi_1\tau+\overline{\Phi}_2\Phi_1\rho), \tag{3.11.38c}$$

$$(\delta-4\tau-2\beta)\Psi_1+3\sigma\Psi_2-(\Delta-4\gamma+\mu)\Psi_0=\\ \overline{\Phi}_1\delta\Phi_0-\overline{\Phi}_2 D\Phi_0+2(\overline{\Phi}_1\Phi_0\beta-\overline{\Phi}_2\Phi_0\varepsilon-\overline{\Phi}_1\Phi_1\sigma+\overline{\Phi}_2\Phi_1\kappa), \tag{3.11.38d}$$

$$(D+4\varepsilon-\rho)\Psi_4-(\overline{\delta}+4\pi+2\alpha)\Psi_3+3\lambda\Psi_2=\\ \overline{\Phi}_0\Delta\Phi_2-\overline{\Phi}_1\overline{\delta}\Phi_2+2(\overline{\Phi}_0\Phi\nu-\overline{\Phi}_1\Phi_1\lambda-\overline{\Phi}_0\Phi_2\gamma+\overline{\Phi}_1\Phi_2\alpha), \tag{3.11.38e}$$

§3.12 广义相对论 Dirac 方程

1. 旋量

张量和旋量之间以泡利矩阵 $\sigma^{\mu}_{AB'}$ 相联系：

$$
\begin{aligned}
&T^{AB'CD'}_{EF'}=\sigma^{AB'}_{\lambda}\sigma^{CD'}_{\mu}T^{\lambda\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}_{EF'},\\
&T^{\lambda\mu}_{\nu}=\sigma^{\lambda}_{AB'}\sigma^{\mu}_{CD'}T^{AB'CD'}\sigma^{EF'}_{\nu};
\end{aligned}
\qquad (3.12.1)
$$

$$g_{\mu\nu}\sigma^{\mu}_{AB'}\sigma^{\nu}_{CD'}=\epsilon_{AC}\epsilon_{B'D'}. \qquad (3.12.2)$$

式中 A，B'，C，D' 为旋量指标. 可见一个张量指标对应一对旋量指标. $\sigma^{AB'}_{\mu}$ 是 2×2 厄米矩阵，满足关系式

$$\sigma^{\mu}_{AB'}\sigma^{\nu AB'}=g^{\mu\nu},\quad \sigma^{\mu}_{AB'}\sigma^{AB'}_{\nu}=\delta^{\mu}_{\nu}. \qquad (3.12.3)$$

ϵ_{AB}是 Levi-Civita 符号：

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_{01}=\epsilon_{0'1'}=\epsilon^{01}=\epsilon^{0'1'}=1,\\
&\epsilon_{10}=\epsilon_{1'0'}=\epsilon^{1'0'}=\epsilon^{10}=-1,
\end{aligned}
\qquad (3.12.4)
$$

即
$$\epsilon_{AB}=\epsilon_{A'B'}=\epsilon^{AB}=\epsilon^{A'B'}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}. \qquad (3.12.5)$$

$\epsilon_{AC}\epsilon_{B'D'}$ 与 $g_{\mu\nu}$相当，于是 ϵ_{AC}和 $\epsilon_{B'D'}$ 可以看作旋量空间的度规，用来升降旋量的指标：

$$
\begin{aligned}
&\zeta^{A}=\epsilon^{AB}\zeta_{B},\ \zeta_{B}=\zeta^{A}\epsilon_{AB},\\
&\zeta^{A'}=\epsilon^{A'B'}\zeta_{B'},\ \zeta_{B'}=\zeta^{A'}\epsilon_{A'B'}.
\end{aligned}
\qquad (3.12.6)
$$

此处应注意在升指标时 ϵ 在左，而在降指标时 ϵ 在右.

取旋量的复共轭时，带撇的指标换成不带撇的，不带撇的指标换成带撇的. 例如

$$T^{AB'CD'}_{EF'}\to\overline{T}^{A'BC'D}_{E'F}. \qquad (3.12.7)$$

带撇的指标可以和不带撇的指标交换次序；但是两个带撇的指标不能交换次序，两个不带撇的指标也不能交换次序.

旋量的协变导数定义为

$$\zeta_{A;\mu}=\zeta_{A,\mu}-\zeta_{B}\Gamma^{B}_{A\mu}, \qquad (3.12.8)$$

式中 $\Gamma^{B}_{A\mu}$为仿射联络，和带撇指标对应的是 $\overline{\Gamma}^{B'}_{A'\mu}$.

这里应指出，$\Gamma^{B}_{A\mu}$不是唯一确定的. 通常为了确定它，令 $\sigma^{\mu}_{AB'}$，ϵ_{AB}和 $\epsilon_{A'B'}$ 的协变导数均为零.

如果张量 $T^{\mu\nu}_{\lambda}$ 是实的，对应的旋量应具有厄米性：

$$T^{AB'CD'}_{EF'}=\overline{T}^{BA'DC'}_{FE'}. \qquad (3.12.9)$$

2. 旋标架(旋基)

由(3.12.2)可知 $\sigma^{\mu}_{AB'}$ 具有正交性，这与零标架相同.但是为了确定 $\Gamma^{B}_{A\mu}$ 而令 $\sigma^{\mu}_{AB'}$ 的协变导数等于零，这又与零标架不同.我们引入旋标架(旋基)：

$$\zeta^{A}_{0}=O^{A},\ \zeta^{A}_{1}=\iota^{A},\ \bar{\zeta}^{A}_{0'}=\bar{O}^{A},\ \bar{\zeta}^{A}_{1'}=\bar{\iota}^{A}, \tag{3.12.10}$$

它们满足关系式

$$O_{A}\iota^{A}=\varepsilon_{AB}O^{A}\iota^{B}=-\iota_{A}O^{A}=1. \tag{3.12.11}$$

以及

$$l^{\mu}=\sigma^{\mu}_{AB}O^{A}\bar{O}^{B},\ n^{\mu}=\sigma^{\mu}_{AB}\iota^{A}\iota^{B}, \tag{3.12.12}$$

$$m^{\mu}=\sigma^{\mu}_{AB}o^{A}\bar{\iota}^{B},\ \bar{m}^{\mu}=\sigma^{\mu}_{BA}\iota^{B}\bar{O}^{A}=$$

$$\sigma^{\mu}_{BA}\bar{O}^{A}\iota^{B}=\sigma^{\mu}_{AB},\iota^{A}\bar{O}^{B},$$

即

$$l^{\mu}=\sigma^{\mu}_{00},\ n^{\mu}=\sigma^{\mu}_{11},\ m^{\mu}=\sigma^{\mu}_{01},\ \bar{m}^{\mu}=\sigma^{\mu}_{10}. \tag{3.12.13}$$

(3.12.13)式中的下标为旋标架指标 ab′，不是旋量指标 AB′.协变微分只作用于旋量指标(有相应的联络项)，不作用于旋基指标，故 σ^{μ}_{ab} 与零标架的协变导数相同，于是如(3.12.13)表明的那样，我们可以令二者相等.

在写出(3.12.12)式时用到了旋分量和旋基分量之间的关系：

$$\sigma^{\mu}_{ab}=\sigma^{\mu}_{AB}\xi^{A}_{a}\bar{\xi}^{B}_{b}. \tag{3.12.14}$$

一般情况下有

$$T_{ab\,c}=T_{AB\,C}\zeta^{A}_{a}\zeta^{B}_{b}\zeta^{C}_{c}. \tag{3.12.15}$$

通常取

$$\zeta^{A}_{a}=\delta^{A}_{a}. \tag{3.12.16}$$

在旋标架空间中，也可以引入联络：

$$\Gamma_{abcd}=\zeta_{aA\ \ ;\mu}\zeta^{A}_{b}\sigma^{\mu}_{cd}, \tag{3.12.17}$$

$$\Gamma_{abcd}=\Gamma_{bacd}.$$

定义

$$\varphi_{\ ,\mu}\sigma^{\mu}_{ab}\equiv\partial_{ab}\varphi, \tag{3.12.18}$$

可以将(3.11.13)中的方向导数算符写为

$$D=\partial_{00},\ \triangle=\partial_{11},\ \delta=\partial_{01},\ \bar{\delta}=\partial_{10}. \tag{3.12.19}$$

注意式(3.12.18)中的 δ 是旋量 φ^{A}.

旋标架联络 Γ_{abcd} 和 12 个旋系数的关系由下表给出：

$\Gamma_{abcd}=$

ab \ cd′	00	01 或 10	11
00′	κ	ε	π
10′	ρ	α	λ
01′	σ	β	μ
11′	τ	γ	ν

(3.12.20)

3.4 分量 Dirac 方程

众所周知，平直时空的 4 分量 Dirac 方程为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}+\frac{im_0}{\hbar}\beta\psi=0, \tag{3.12.21}$$

式中

$$\alpha^i=\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\sigma^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{3.12.22}$$

方程(3.12.20)也可以用 γ 矩阵表出：

$$\gamma^\mu\psi_{,\mu}+im_0\psi=0,\mu=0,1,2,3, \tag{3.12.23}$$

式中已取 $\hbar=c=1$. γ 矩阵

$$\gamma^0=\beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix},\ \gamma^k=\beta\alpha^k=\begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix}. \tag{3.12.24}$$

满足反对易关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2\eta^{\mu\nu}I. \tag{3.12.25}$$

取号差为(+−−−)时有

$$(\gamma^i)^2=-I,(\gamma^0)^2=I. \tag{3.12.26}$$

在广义相对论(弯曲时空)中，4 分量 Dirac 方程为

$$\gamma^\mu\psi_{;\mu}+im_0\psi=0. \tag{3.12.27}$$

旋量的协变导数为

$$\nabla_\mu\psi\equiv\psi_{;\mu}=\psi_{,\mu}-\Gamma_\mu\psi,$$

$$(\Gamma_\mu\equiv\Gamma^B_{A\mu})$$

$$\nabla_\mu\psi_A\equiv\psi_{A;\mu}=\psi_{A,\mu}-\Gamma^B_{A\mu}\psi_B,$$

$$\nabla_\mu \psi^A \equiv \psi^A_{;\mu} = \psi^A_{,\mu} + \Gamma^A_{B\mu}\psi^B. \tag{3.12.28}$$

γ 矩阵的反对易关系(3.12.25)代之以

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I. \tag{3.12.29}$$

广义相对论中的 γ 矩阵与平直时空中的 $\hat{\gamma}$矩阵之间存在关系

$$\gamma^\mu = h^\mu_{(i)}\hat{\gamma}^i, \tag{3.12.30}$$

式中 $h^\mu_{(i)}$为标架，μ 为黎曼指标，i 为标架指标.

令 $\quad \gamma_\mu \equiv \gamma^B_{A\mu}$，

且其协变导数为零：

$$\gamma^A_{\mu\beta;\lambda} = \gamma^A_{\mu\beta;\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\gamma^A_{\alpha B} - \Gamma^C_{B\lambda}\gamma^A_{\mu C} + \gamma^C_{\mu B}\Gamma^A_{C\lambda} = 0, \tag{3.12.31}$$

或 $\quad \gamma_{\mu;\lambda} = \gamma_{\mu,\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}\gamma_\alpha - \Gamma_\lambda\gamma_\mu + \gamma_\mu\Gamma_\gamma = 0.$

则 4 分量 Dirac 方程可写为

$$\gamma^\mu(\partial_\mu\psi - \Gamma_\mu\psi) + im_0\psi = 0, \tag{3.12.32}$$

式中

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}\gamma^\alpha(\gamma_{\alpha,\mu} - \gamma_\gamma\Gamma^\gamma_{\alpha\mu}). \tag{3.12.33}$$

4. Dirac 方程的 2 分量形式

我们把平直时空的泡利矩阵写为

$$\sigma^1_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma^2_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix},$$
$$\sigma^3_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix},\ \sigma^0_{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \tag{3.12.34}$$

$\sigma^i_{AB'}$ 中的指标 i 是标架指标. 此时平直时空的 $\hat{\gamma}$矩阵可写为

$$\hat{\gamma}^i = \sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i_{AB'}\\ \sigma^i_{AB'} & 0\end{pmatrix},\ i = 0,1,2,3;$$

$$A = 0,1;\ B' = 0',1';$$

$$\psi = \begin{pmatrix}u_A\\ \bar{v}^{B'}\end{pmatrix},\quad \bar{\psi} = (v^A,\ \bar{u}^{B'}). \tag{3.12.35}$$

则 Dirac 方程(3.12.27)可表示为

$$\sqrt{2}\,h^a_{(i)}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i_{AB'}\\ \sigma^{iAB'} & 0\end{pmatrix}\nabla_a\begin{pmatrix}u_A\\ \bar{v}^{B'}\end{pmatrix} + im_0\begin{pmatrix}u_A\\ \bar{v}^{B'}\end{pmatrix} = 0, \tag{3.12.36}$$

或者
$$\begin{cases}\sqrt{2}\,h^{a}_{(i)}\sigma^{i}_{AB'}\nabla_{a}\bar{v}^{B'}+im_0u_A=0,\\ \sqrt{2}\,h^{a}_{(i)}\sigma^{iAB'}\nabla_{a}u_A+im_0\,\bar{v}^{B'}=0.\end{cases}\tag{3.12.37}$$

令
$$\sigma^{aAB'}\equiv h_{(i)}\sigma^{iAB'},\quad \nabla^{AB'}\equiv\sigma^{aAB'}\nabla_{a},\tag{3.12.38}$$

式中 $\sigma^{aAB'}$ 是弯曲空间的量，$\sigma^{iAB'}$ 是标架空间的量；a 是黎曼指标，i 是标架指标. 方程(3.12.37)可改写为

$$\sqrt{2}\,\nabla_{AB'}\bar{v}^{B'}+im_0u_A=0,\tag{3.12.39}$$
$$\sqrt{2}\,\nabla^{AB'}u_A+im_0\,\bar{v}^{B'}=0.\tag{3.12.40}$$

对(3.12.39)中的旋指标取复共轭，注意此时 $\nabla_{AB'}\to\nabla_{BA'}$，将 A 换成 A'，B 换成 B'，得到

$$\sqrt{2}\,\nabla_{BA'}v^{B}+im_0\,\bar{u}_{A'}=0,\tag{3.12.41}$$

再交换傀标，得

$$\sqrt{2}\,\nabla_{AB'}v^{A}+im_0\bar{u}_{B'}=0.\tag{3.12.42}$$

在(3.12.40)中，代人

$$\nabla^{AB'}u_A=\delta^{C}_{A}\nabla^{AB'}u_C,$$

再交换傀标，得

$$\sqrt{2}\,\nabla_{AB'}v^{A}+im_0\bar{v}_{B'}=0.\tag{3.12.43}$$

于是得到 2 分量形式的 Dirac 方程：

$$\sqrt{2}\,\nabla_{AB'}u^{A}+im_0\bar{v}_{B'}=0,\tag{3.12.43'}$$
$$\sqrt{2}\,\nabla_{AB'}v^{A}+im_0\,\bar{u}_{B'}=0.\tag{3.12.42'}$$

按照 Chandrasekhar 的表示符号，$u\to p$，$v\to Q$，$B'\to\dot{B}$，上二式可写为

$$\begin{cases}\nabla_{A\dot{B}}P^{A}+im\,\bar{Q}_{\dot{B}}=0,\\ \nabla_{A\dot{B}}Q^{A}+im\,\bar{P}_{\dot{B}}=0,\end{cases}\tag{3.12.44}$$

式中 $m=m_0/\sqrt{2}$.

5. Dirac 方程的旋标架形式和零标架形式

注意到

$$\begin{aligned}&P_a=\zeta^{A}_{a}P_A,\quad \nabla_{a\dot{b}}P^{c}=\zeta^{A}_{a}\zeta^{B}_{\dot{b}}\zeta^{c}_{C}\nabla_{A\dot{B}}P^{C},\\ &\nabla_{a\dot{b}}P^{c}\equiv\partial_{a\dot{b}}P^{c}+\Gamma^{c}_{da\dot{b}}P^{d},\end{aligned}\tag{3.12.45}$$

可将方程(3.12.44)写成旋标架形式：

$$\begin{cases}\nabla_{a\dot{b}}P^a+im\,\overline{Q}_{\dot{b}}=0,\\ \nabla_{a\dot{b}}Q^a+im\,\overline{P}_{\dot{b}}=0,\end{cases} \tag{3.12.46}$$

或者展开为

$$\begin{cases}\partial_{a\dot{b}}P^a+\Gamma^a_{da\dot{b}}P^d+im\,\overline{Q}_{\dot{b}}=0, & (3.12.47)\\ \partial_{a\dot{b}}Q^a+\Gamma^a_{da\dot{b}}Q^d+im\,\overline{P}_{\dot{b}}=0, & (3.12.48)\end{cases}$$

取 $\dot{b}=\dot{0}$，注意到(3.12.19)，可将(3.12.47)化为

$$(D+\Gamma_{100\dot{0}}-\Gamma_{001\dot{0}})P^0+(\overline{\delta}+\Gamma_{110\dot{0}}-\Gamma_{011\dot{0}})P^1-im\,\overline{Q}^{\dot{1}}=0. \tag{3.12.49}$$

在上式中代入(3.11.9)，并应用旋系数与旋标架联络之间的关系(3.12.20)，可以得到

$$(D+\varepsilon-\rho)P^0+(\overline{\delta}+\pi-\alpha)P^1-im\overline{Q}^{\dot{1}}=0. \tag{3.12.50}$$

类似地，由(3.12.47～48)还可得到

$$(\delta+\beta-\tau)P^0+(\Delta+\mu-\gamma)P^1+im\,\overline{Q}^{\dot{0}}=0, \tag{3.12.51}$$

$$(D+\overline{\varepsilon}-\overline{\rho})\overline{Q}^{\dot{0}}+(\delta+\overline{\pi}-\overline{\alpha})\overline{Q}^{\dot{1}}+imP^1=0, \tag{3.12.52}$$

$$(\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\tau})\overline{Q}^{\dot{0}}+(\Delta+\overline{\mu}-\overline{\gamma})\overline{Q}^{\dot{1}}+imP^0=0. \tag{3.12.53}$$

令 $$F_1=P^0,F_2=P^1,G_1=\overline{Q}^{\dot{1}},G_2=-\overline{Q}^{\dot{0}}, \tag{3.12.54}$$

(3.12.50)～(3.12.53)可写为

$$(D+\varepsilon-\rho)F_1+(\overline{\delta}+\pi-\alpha)F_2=imG_1, \tag{3.12.55}$$

$$(\Delta+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=imG_2, \tag{3.12.56}$$

$$(\delta+\overline{\pi}-\overline{\alpha})G_1-(D+\overline{\varepsilon}-\overline{\rho})G_2=-imF_2, \tag{3.12.57}$$

$$(\Delta+\overline{\mu}-\overline{\gamma})G_1-(\overline{\delta}+\overline{\beta}-\overline{\tau})G_2=imF_1, \tag{3.12.58}$$

(3.12.55～58)就是用旋系数表示的弯曲时空的 Dirac 方程.

4 引力场的分类

场的分类问题与描述具体场的严格解有密切联系.通过场的分类可以对引力场的性质有更深入的理解.

§ 4.1 Petrov 分类

所谓 Petrov 分类，就是根据 Weyl 张量

$$C^{\rho\sigma}_{\mu\nu}=R^{\rho\sigma}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}(g^{\rho}_{\mu}R^{\sigma}_{\nu}-g^{\rho}_{\nu}R^{\sigma}_{\mu}+g^{\sigma}_{\nu}R^{\rho}_{\mu}-g^{\sigma}_{\mu}R^{\rho}_{\nu})-\frac{1}{6}(g^{\rho}_{\nu}g^{\sigma}_{\mu}\cdot g^{\sigma}_{\nu}g^{\rho}_{\mu}) \tag{4.1.1}$$

的代数性质对黎曼空-时(引力场)进行的分类.

要确定曲率张量的所有代数性质，只讨论共形 Weyl 张量是不够的.由引力场方程可知，所要了解的曲率张量的性质由 Ricci 张量或能量-动量张量给出.但是在真空场的情况下，Weyl 张量便与曲率张量完全一致.因此,Petrov 分类实际上是根据曲率张量的代数性质对真空引力场的分类.

张量场 $F_{\mu\nu}$的本征方程表示为

$$F_{\mu\nu}S^{\nu}=\lambda S_{\mu}. \tag{4.1.2}$$

式中 S_{μ} 为本征矢，λ 为本征值.如果张量场 $F_{\mu\nu}$是反对称的，则上式用 S^{μ} 缩并可以发现，要么本征值 $\lambda=0$，要么本征矢 S_{μ} 为零矢量.由 § 3.11 中引入的零标架矢量($l^{\mu},n^{\mu},m^{\mu},\overline{m}^{\mu}$)可以构成所有的二阶反对称张量(双矢).其中，零标架矢量的组合

$$M_{\mu\nu}\equiv 2l_{[\mu}n_{\nu]}+2\overline{m}_{[\mu}m_{\nu]},$$

$$V_{\mu\nu}\equiv 2l_{[\mu}\overline{m}_{\nu]},$$

$$U_{\mu\nu}\equiv 2n_{[\mu}m_{\nu]} \tag{4.1.3}$$

称为**自对偶双矢**. 在对偶变换下，上式中各双矢变为自身(只差一个因子 i)：

$$\widetilde{M}_{\mu\nu}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}M^{\alpha\beta}=iM_{\mu\nu},$$

$$\widetilde{V}_{\mu\nu}=iV_{\mu\nu},\qquad \widetilde{U}_{\mu\nu}=iU_{\mu\nu}. \tag{4.1.4}$$

式中符号～表示对偶.

由零标架性质可以证明

$$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}n^{\nu}m^{\alpha}\overline{m}^{\beta}=i. \tag{4.1.5}$$

根据定义(4.1.3)和零矢量的性质，可以得到自对偶双矢"标量积"的性质：

$$M_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=M_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=U_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=0,$$

$$M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=-4,\ V_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=2. \tag{4.1.6}$$

反对称实场张量 $F_{\mu\nu}$不是自对偶的，也不可能直接用自对偶双矢(4.1.3)展开. 但是我们可以用 $F_{\mu\nu}$构成一个复的场张量 $\Phi_{\mu\nu}$：

$$\Phi_{\mu\nu}\equiv F_{\mu\nu}-i\widetilde{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}-\frac{1}{2}i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{4.1.7}$$

注意到 $F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$，我们有

$$\widetilde{\Phi}_{\mu\nu}=\widetilde{F}_{\mu\nu}+iF_{\mu\nu}=i\Phi_{\mu\nu}. \tag{4.1.8}$$

这表明场张量 $\Phi_{\mu\nu}$是自对偶的. 将 $\Phi_{\mu\nu}$用(4.1.3)中的双矢展开：

$$\Phi_{\mu\nu}=\phi_0U_{\mu\nu}+\phi_1M_{\mu\nu}+\phi_2V_{\mu\nu}. \tag{4.1.9}$$

展开式系数 ϕ_i 可由原来的实场张量 $F_{\mu\nu}$表示出来：

$$\phi_0=\frac{1}{2}\Phi_{\mu\nu}V^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}V^{\mu\nu},$$

$$\phi_1=-\frac{1}{4}\Phi_{\mu\nu}M^{\mu\nu}=-\frac{1}{2}F_{\mu\nu}M^{\mu\nu},$$

$$\phi_2=\frac{1}{2}\Phi_{\mu\nu}U^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}U^{\mu\nu}. \tag{4.1.10}$$

对应于二阶反对称张量 $F_{\mu\nu}$的六个独立分量，上式给出三个独立的复系数.

下面首先讨论电磁场的分类，然后用形式上相同的方法讨论引力场的分类.

§ 4.2　电磁场的分类

设 $F_{\mu\nu}$ 表示 Maxwell 张量，则(4.1.10)具体表示为

$$\phi_0=B_y-E_x+i(E_y+B_x),$$
$$\phi_1=E_z-iB_z,$$
$$\phi_2=E_x+B_y+i(E_y-B_x). \qquad (4.2.1)$$

1. 第一种分类方案

把坐标系变至对称张量的主轴系时，对称张量的形式变得特别简单.反对称张量也类似.适当选择零标架矢量 l^μ 的方向，可使展开式(4.1.9)简化.

设 l^μ 转至 l'^μ 的变换表示为

$$l'^\mu=l^\mu-E^2n^\mu+Em^\mu+\overline{E}\overline{m}^\mu,$$
$$n'^\mu=n^\mu,\ m'^\mu=m^\mu-\overline{E}n^\mu. \qquad (4.2.2)$$

式中 E 为复参量.自对偶双矢的变换为

$$M'_{\mu\nu}=M_{\mu\nu}-2EU_{\mu\nu},$$
$$V'_{\mu\nu}=V_{\mu\nu}-EM_{\mu\nu}+E^2U_{\mu\nu},$$
$$U'_{\mu\nu}=U_{\mu\nu}. \qquad (4.2.3)$$

由上式可以得到展开式系数 ϕ_i 的变换关系：

$$\phi_0=\phi'_0-2E\phi'_1+E^2\phi'_2,$$
$$\phi_1=\phi'_1-E\phi'_2,\ \phi_2=\phi'_2. \qquad (4.2.4)$$

适当选择参量 E，即适当选择 l'^μ 的方向，可使 ϕ'_0 或 ϕ'_1 等于零，从而简化展开式(4.1.9).将带撇的量和不带撇的量对换，然后令

$$\phi_0-2E\phi_1+E^2\phi_2=0. \qquad (4.2.5)$$

把方程(4.2.5)看作关于 E 的二次代数方程，根据这一方程根的个数可以把电磁场分为两类.满足条件

$$\phi_1^2-\phi_2\phi_0\neq 0 \qquad (4.2.6)$$

的电磁场称为**非退化场**.这类场存在两个不同的 l'^μ 方向使 ϕ'_0

$=0$.

满足条件

$$\phi_1^2-\phi_2\phi_0=0 \tag{4.2.7}$$

的电磁场称为**退化场或零场**. 这类场只有一个 l'^μ 的方向使 $\phi'_0=0$.

由(4.1.6)和(4.1.9)可知,

$$\phi_1^2-\phi_2\phi_0=-4\Phi_{\mu\nu}\Phi^{\mu\nu}=-2(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-iF_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}). \tag{4.2.8}$$

表达式 $\phi_1^2-\phi_2\phi_0$ 只与电磁场张量有关. 由此可以清楚地看到, 上面的分类与零标架的选择无关, 与双矢展开式也无关. 式(4.2.8)使上述分类方案的表述更加简单:

电磁场是退化(或零场)的充分且必要条件是

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}=F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}=0. \tag{4.2.9}$$

2. 第二种分类方案

我们可以用本征方程和本征矢的语言来表述电磁场的分类. 由(4.1.9)和(4.1.3)可知, $\phi_0=0$ 等效于

$$\Phi_{\mu\nu}l^\nu=(F_{\mu\nu}-i\tilde{F}_{\mu\nu})l^\nu=\phi_1 l_\mu. \tag{4.2.10}$$

因此, 对于非退化场, 本征方程(4.2.9)或者

$$l_{[\mu}F_{\nu]\gamma}l^\gamma=l_{[\mu}\tilde{F}_{\nu]\gamma}l^\gamma=0 \tag{4.2.11}$$

有两个不同的零本征矢 l^μ.

退化场或零场($\phi_0=\phi_1=0$)则只有一个零本征矢. 退化场张量(4.1.9)具有简单的形式 $\Phi_{\mu\nu}=\phi_2 V_{\mu\nu}$, 即

$$F_{\mu\nu}=l_\mu P_\nu-l_\gamma P_\mu,\ P_\mu l^\mu=P_\mu n^\mu=0. \tag{4.2.12}$$

3. 物理意义

零电磁场最简单的例子是 Minkowski 空间的平面波

$$A_\mu=\mathrm{Re}[p_\mu\exp(ik_\sigma x^\sigma)],$$

$$F_{\mu\nu}=\mathrm{Re}[i(p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu)\exp(ik_\sigma x^\sigma)]. \tag{4.2.13}$$

式中 $\quad p_\mu k^\mu=k_\mu k^\mu=0$.

很容易证明上式满足零场的充分且必要条件(4.2.9).

在远离孤立荷电系统的地方，可将系统(源)发出的引力辐射看作平面波．此时四维势用源参量表示为推迟势($c=1$)：

$$A_\mu(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{j_\mu(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}d^3x'. \tag{4.2.14}$$

场张量按 r^{-1} 展开为

$$F_{\mu\nu}=F^{(1)}_{\mu\nu}r^{-1}+F^{(2)}_{\mu\nu}r^{-2}+\cdots, \tag{4.2.15}$$

由此可知 $F^{(1)}_{\mu\nu}$ 具有形式

$$F^{(1)}_{\mu\nu}=p_\mu k_\nu-p_\nu k_\mu. \tag{4.2.16}$$

式中 $$p_\mu=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int j_\mu(\boldsymbol{r}'t-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|)\mathrm{d}^3x',$$

$$k_\nu=-(t-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|),\ \nu=\left(\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|},\ -1\right)\approx(\hat{\boldsymbol{r}},\ -1),$$

$$k_\mu k^\mu=0,A^\mu_\mu\approx p^\mu k_\mu=0. \tag{4.2.17}$$

零场的能量-动量张量具有简单的形式：

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}F^\sigma_\mu F_{\sigma\nu}=\frac{1}{4\pi}p_\sigma p^\sigma k_\mu k_\nu. \tag{4.2.18}$$

在局部洛伦兹系中，能流密度 $S^i=T^{0i}$ 和能量密度 $w=T^{00}$ 之间的关系为 $|S|=w$. 可见零电磁场是纯辐射场.

零电磁场的场张量 $\Phi_{\mu\nu}=\phi_2V_{\mu\nu}$，场方程可化为

$$\Phi^{\mu\nu}_{;\nu}=[\phi_2(l^\mu\overline{m}^\nu-l^\nu\overline{m}^\mu)]_{;\nu}=$$

$$(\phi_2l^\mu)_{;\nu}\overline{m}^\nu+\phi_2l^\mu\overline{m}^\nu_{;\nu}-(\phi_2l^\nu)_{;\nu}\overline{m}^\mu-\phi_2l^\nu\overline{m}^\mu_{;\nu}=0. \tag{4.2.19}$$

用 l_μ 乘以上式，缩并，并注意到 $l^\mu l_{\mu;\nu}=0$，$l_\mu\overline{m}^\mu_{;\nu}=-l_{\mu;\nu}\overline{m}^\mu$，我们得到

$$l_{\mu;\nu}l^\nu\overline{m}^\mu=0, \tag{4.2.20}$$

即 $$l_{\mu;\nu}l^\nu=\lambda l_\mu. \tag{4.2.21}$$

由此可得 $$l_{[\mu}l_{\tau];\nu}l^\nu=0. \tag{4.2.22}$$

总能找到一个 λ 值，使下式成立：

$$(\lambda l_{\mu,\nu}-\lambda_\nu)l^\nu=0, \tag{4.2.23}$$

或写成 $$(\lambda l)_{\mu,\nu}(\lambda l)^\nu=0. \tag{4.2.24}$$

将上式与短程线方程

$$u_{\mu,\nu}u^{\nu}=0, u^{\mu}\equiv dx^{\mu}/ds$$

比较，可知 $u^{\mu}=\lambda l^{\mu}$. 这就是说，退化电磁场的零本征矢量场 l^{μ} 是短程线矢量场.

将(4.2.20)两边乘以$\overline{m}^{\mu}$缩并，得到

$$l_{\mu,\nu}\overline{m}^{\mu}\overline{m}^{\nu}=0. \tag{4.2.25}$$

由此可知**世界线汇的剪切度** σ **等于零**〔见(3.11.30)和(3.11.27)〕.

综上所述，零场(退化电磁场)是平面波的推广；它的零本征矢量场是无切的短程线矢量场.

§4.3 引力场的分类

跟构成复电磁场张量 $\Phi_{\mu\nu}$类似，可以用 Weyl 张量构成复引力场张量 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$：

$$\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}\equiv C_{\mu\nu\alpha\beta}-iC_{\widetilde{\mu\nu\alpha\beta}}\equiv C_{\mu\nu\alpha\beta}-\frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha\beta\tau\sigma}C_{\mu\nu}{}^{\tau\sigma}. \tag{4.3.1}$$

由此可得 $\Phi_{\widetilde{\mu\nu\alpha\beta}}\equiv\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\tau\lambda}\Phi_{\mu\nu}{}^{\tau\lambda}=i\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$, (4.3.2a)

即 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$关于后两个指标是自对偶的. 由 Weyl 张量的定义(4.1.1)得到 $C^{\mu\nu}{}_{\mu\lambda}=0$. 由此可以证明，

$$C_{\widetilde{\widetilde{\mu\nu\alpha\beta}}}\equiv\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\tau\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda\rho}C^{\tau\sigma\lambda\rho}=-C_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.3.2b}$$

此式表明张量 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$对于前两个指标也是自对偶的. 于是与(4.19)类似，可以将 $\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}$用自对偶双矢(4.1.3)展开：

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu\alpha\beta}=&\phi_1V_{\mu\nu}V_{\alpha\beta}+\phi_2(V_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}+V_{\alpha\beta}M_{\mu\nu})+\\&\phi_3(V_{\mu\nu}U_{\alpha\beta}+V_{\alpha\beta}U_{\mu\nu}+M_{\mu\nu}M_{\alpha\beta})+\\&\phi_4(U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta}+U_{\alpha\beta}M_{\mu\nu})+\phi_5U_{\mu\nu}M_{\alpha\beta},\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

此式含有 5 个复系数，张量 Φ 有 10 个独立分量.

1. 引力场的第一种分类方案

采用零标架和自对偶双矢，使展开式(4.3.3)简化，重复由(4.1.9)⟶(4.2.4)的过程，然后令 $\phi_5'=0$，即

$$\phi_5^* = \phi_5 - 4\phi_4 E + 6\phi_3 E^2 - 4\phi_2 E^3 + \phi_1 E^4 = 0. \tag{4.3.4}$$

这一四次代数方程的四个根对应于本征矢 l^μ 的四个方向，根据这四个根的重复情况，可将引力场(Rieman 空-时)分为 Petrov I 型-O 型.

Ⅰ型：4 个不同的根；

Ⅱ型：3 个不同的根，其中 1 个为二重根；

D 型：2 个不同的根，均为二重根；

Ⅲ型：2 个不同的根，其中 1 个为三重根；

N 型：1 个四重根；

O 型：Weyl 张量恒为零，全部 $\phi'_A = 0$. (4.3.5)

2. 引力场的第二种分类方案

采用(4.3.1)和(4.1.4)，可直接用 Weyl 张量和零标架矢量的乘积来表示系数 ϕ_A：

$$\phi_1 = \frac{1}{4} C_{\mu\nu\alpha\beta} U^{\tau\mu\nu} U^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu n^\nu m^\alpha m^\beta,$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{4} C_{\mu\nu\alpha\beta} U^{\mu\nu} M^{\alpha\beta} = -C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu m^\nu (l^\alpha n^\beta + \overline{m}^\alpha m^\beta),$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} U^{\tau\mu\nu} V^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta} n^\mu m^\nu l^\alpha \overline{m}^\beta,$$

$$\phi_4 = -\frac{1}{4} C_{\mu\nu\alpha\beta} V^{\mu\nu} M^{\alpha\beta} = -C_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu \overline{m}^\nu (l^\alpha n^\beta + \overline{m}^\alpha m^\beta),$$

$$\phi_5 = \frac{1}{2} C_{\mu\nu\alpha\beta} V^{\mu\nu} V^{\alpha\beta} = 2C_{\mu\nu\alpha\beta} l^\mu l^\nu \overline{m}^\alpha \overline{m}^\beta. \tag{4.3.6}$$

对于零本征矢 l^μ，$\phi_5 = 0$；由此可知实对称张量

$$S_{\mu\nu} \equiv C_{\mu\alpha\beta\nu} l^\alpha l^\beta \tag{4.3.7}$$

不含有 $m^\alpha m^\nu$ 和 $\overline{m}^\alpha \overline{m}^\nu$ 的项，再应用 Weyl 张量的对称性，可得

$$S_{\mu\nu} l^\nu = 0, S_\mu{}^\mu = C^\mu_{\nu\alpha\mu} l^\nu l^\alpha = -C_{\nu\alpha} l^\nu l^\alpha = 0. \tag{4.3.8}$$

由此可将 $S_{\mu\nu}$ 用零标架矢量表示出来：

$$S_{\mu\nu} = a l_\mu l_\nu + \mathrm{Re}[\beta(l_\mu \overline{m}_\nu + l_\nu \overline{m}_\mu)]. \tag{4.3.9}$$

所以，Weyl 张量的本征矢 l^μ 具有如下性质：

$$l_{[\mu} C_{\nu]\alpha\beta[\tau} l_{\sigma]} l^\alpha l^\beta = 0 \Longleftrightarrow \phi_5 = 0, \tag{4.3.10}$$

这时引力场为 I 型.

如果两个本征矢重合〔$E=0$ 是方程(4.3.4)的二重根〕，则必有 $\phi_5=\phi_4=0$. 此时由(4.3.6)可得

$$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^{\alpha}l^{\beta}=0 \Longleftrightarrow \phi_5=\phi_4=0, \tag{4.3.11}$$

这时引力场为 Ⅱ 型. 继续讨论可得到 D 型-O 型系数 ϕ_A 为零的个数和 Weyl 张量满足的条件. 按所得的结果，分类如下：

	不同零本征矢个数	为零系数	$C_{\mu\nu\alpha\beta}$满足条件
Ⅰ 型	4	ϕ_5	$l_{[\nu}C_{\nu]\alpha\beta[\tau}l_{\sigma]}l^{\alpha}l^{\beta}=0$
Ⅱ 型	3	ϕ_5，ϕ_4	$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^{\alpha}l^{\beta}=0$
D 型	2	ϕ_5，ϕ_4	
Ⅲ 型	2	ϕ_5，ϕ_4，ϕ_3	$l_{[\mu}C_{\nu]\alpha\beta\tau}l^{\alpha}=0$
N 型	1	ϕ_5，ϕ_4，ϕ_3，ϕ_2	$C_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\mu}=0$
O 型	0	全部 ϕ_A	$C_{\mu\nu\alpha\beta}=0$

(4.3.12)

Penrose 图给出了退化的情况：每个箭头表示一个附加的退化.

经过零标架旋转(l^{μ} 固定)：

$$\begin{aligned} l'^{\mu}&=Al^{\mu}, \\ n'^{\mu}&=A^{-1}n^{\mu}\text{-}AB\,\overline{B}l^{\mu}+Bm^{\mu}+\overline{B}\,\overline{m}^{\mu}, \\ m'^{\mu}&=\mathrm{e}^{iC}m^{\mu}-\mathrm{e}^{iC}A\,\overline{B}l^{\mu}. \end{aligned} \tag{4.3.13}$$

式中 $A>0$，C 是实的，B 是复的，适当选择 A，B，C，还可以使 Ⅰ 型的 $\phi_3=0$；使 D 型的 $\phi_1=\phi_2=0$；使 Ⅱ 型的 $\phi_2=0$，使 Ⅲ 型的 $\phi_1=0$.

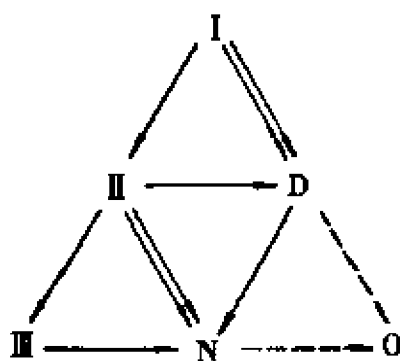


图 2-5

对于真空引力场，Weyl 张量和曲率张量相等，所以上面的讨论对曲率张量也成立.

退化真空引力场最简单的例子是平面引力波，与电磁场的情况相似. 由于 $R_{\mu\nu\alpha\beta}l^{\beta}=0$，$l^{\mu}l_{\mu}=0$，所以是 Petrov$N$ 型的.

由毕安基恒等式，可以导出退化场零本征矢 l^{μ} 的两个简单性质. 用上面对 Weyl 张量用过的符号，毕安基恒等式可写为

$$R^{\sim\alpha\beta}_{\mu\nu,\ \beta}=0 \text{ 和 } \Phi^{\mu\nu\alpha\beta}(R)_{,\beta}=0. \tag{4.3.14}$$

先讨论Ⅱ型和 D 型($\phi_5=\phi_4=0, \phi_3\neq0$)的情况. 由于

$$V_{\mu\nu,\alpha}M^{\mu\nu}=4l_{\mu,\alpha}\overline{m}^{\mu}, \tag{4.3.15}$$

代入(4.3.3)和(4.3.14), 得到

$$\begin{aligned}0=&\Phi^{\mu\nu\alpha\beta}_{\ \ \ \ ,\beta}V_{\mu\nu}=(\Phi^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\mu\nu})_{,\beta}-\Phi^{\mu\nu\alpha\beta}V_{\mu\nu,\beta}=\\&2(\phi_3V^{\alpha\beta})_{,\beta}-4\phi_2V^{\alpha\beta}l_{\mu,\beta}\overline{m}^{\mu}-\\&\phi_3U^{\mu\nu}V^{\alpha\beta}V_{\mu\nu,\beta}-4\phi_3M^{\alpha\beta}l_{\mu,\beta}\overline{m}^{\mu}.\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

用 l_α 乘以上式并缩并, 我们得到

$$V^{\alpha\beta}_{\ \ ,\beta}l_\alpha+2l_{\alpha,\beta}\overline{m}^{\alpha}\overline{m}^{\beta}=3l_{\alpha,\beta}\overline{m}^{\alpha}l^{\beta}=0, \tag{4.3.17}$$

此即(4.2.19)式. 所以, **退化场的零本征矢量场 l^μ 是短程线矢量场**. 用$\overline{m}_\alpha$ 乘以(4.3.16)并缩并, 得到

$$V^{\alpha\beta}_{\ \ ,\beta}\overline{m}_\alpha+2l_{\alpha,\beta}\overline{m}^{\alpha}\overline{m}^{\beta}=3l_{\alpha,\beta}\overline{m}^{\alpha}\overline{m}^{\beta}=0, \tag{4.3.18}$$

此即(4.2.25)式. 此式表明**零本征矢量场 l^μ 是**无切的($\sigma=0$).

我们对于 $\phi_5=\phi_4=0$(Ⅱ型和 D 型)退化真空引力场证明了定理: 退化真空引力场的零本征矢构成无切的短程线汇. 其他类型的退化场可用类似方法证明. 这一定理的逆定理(Goldberg-Sachs 定理)是: 如果有一个无切的短程线汇真空解(引力场), 则这个解一定是退化的, 且线汇是本征线汇.

5 参量化后牛顿表述

由于引力场方程是非线性的，因此获得严格解是十分艰难的事情. 而且即使获得了严格解，比如在球对称情况下获得的、在太阳系有明显观测意义的史瓦希解，实际上也不可能验证其全部预言. 以太阳系的观测实验为例，太阳系并不是静态的和各向同性的. 虽然由史瓦希解原则上可以提供对于行星引力场牛顿效应的一系列高阶修正，但是上述牛顿效应比广义相对论给出的一阶修正还要大一个数量级，当然完全淹没了一系列高阶修正.

这样，对于引力理论和引力效应说来，不仅需要寻找更多的严格解，而且需要发展某种系统的近似方法，以期在即使物理系统没有对称性的情况下也能近似地描述引力场，其描述的精确程度应能满足太阳系实验观测的要求. 人们把已经发展起来的这一方法叫做参量化后牛顿(PPN)表述，它适用于缓慢运动的质点系统(如太阳系)，还可用来区分各种不同的引力理论.

通常书中讨论的弱场近似，是描述引力场的另一种近似方法，它研究低阶近似下的引力场. 由于弱场近似不要求物质作非相对论运动，所以我们可以用它来处理引力辐射问题.

本章讨论后牛顿表述.

§5.1 PPN 形式

按照引力度规理论，牛顿引力理论可视为初级近似.

对于静态引力场中的瞬时静止试验物体，其加速度在静止坐标系中表示为

$$a^i = -\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{ik} g_{00,k}. \tag{5.1.1}$$

当观察点远离物质系统时，适当选择坐标系，度规应退化为闵可夫斯基度规：

$$g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}. \tag{5.1.2}$$

当引力场足够弱时，方程(5.1.1)可给出牛顿引力，此时有(以 U 表示牛顿势的绝对值)：

$$g^{ik} \approx \delta^{ik}, g_{00} \approx 1 - 2U. \tag{5.1.3}$$

可以证明，用这个近似和理想流体能量-动量张量表达式

$$T^{00} = \rho, T^{0i} = \rho v^i, T^{ik} = \rho v^i v^k + p\delta^{ik}$$

以及守恒定律

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \approx T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{00} = 0 \tag{5.1.4}$$

所给出的流体运动方程与牛顿力学中的欧拉(Euler)方程完全一致：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0, \qquad \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \rho \nabla U - \nabla p,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla. \tag{5.1.5}$$

式中 $\boldsymbol{v}$ 是场源元的速度，ρ 是元中物质的静止质量密度，p 是该元上的总压强(包括物质和辐射)，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$是沿场的时间导数. 这里所取的近似，只保留了 $v^2 \sim U \sim p/\rho$ 的一阶项，可称为牛顿极限.

当我们要求获得大于 10^{-5}的精确度时，比如要计算水星近日点的每周约 5×10^{-7}弧度的附加进动，牛顿极限就不够了. 因此，需要更准确的空-时度规近似，它的准确程度超过牛顿极限，因此称为后(Post)牛顿极限.

显然，近似理论的关键在于确定方程中各小量的数量级. 在太阳系中，牛顿引力势 U 在任何位置都不大于 10^{-5}(在自然单位制中 U 无量纲)，可认为典型势能量级为 $U \sim 10^{-5}$. 对于绕中心质量 M 作圆运动的质点，由牛顿力学可知其速度满足 $v^2 = \frac{GM}{r} = U$. 因此可认为典型速度的平方与典型牛顿引力势同数量级：

$$v^2 \sim U. \tag{5.1.6}$$

组成太阳和行星的物质的压强 p 与物质密度 ρ 之比在太阳系中数量级为 $p/\rho \sim 10^{-5}$(在地球中 $\sim 10^{-10}$)，因此有

$$p/\rho \sim U. \tag{5.1.7}$$

能量密度与静止质量密度之比 Π 在太阳系中具有数量级 $\Pi \sim 10^{-5}$(在地球中 $\sim 10^{-9}$)，故知

$$\Pi \sim U. \tag{5.1.8}$$

综合(5.1.6)～(5.1.8)，可知

$$U \sim v^2 \sim p/\rho \sim \Pi \sim O(2). \tag{5.1.9}$$

式中 $O(N)$ 表示与典型速度的 N 次方同数量级. 显然 v 的数量级是 $O(1)$，U^2 的数量级是 $O(4)$，Uv 的数量级是 $O(3)$，…

太阳的时间演化由它的组成所决定，因此有

$$\frac{\partial}{\partial t} \sim \boldsymbol{v} \cdot \nabla,$$

于是

$$\frac{|\partial/\partial t|}{|\partial/\partial x|} \sim O(1). \tag{5.1.10}$$

现在我们用上述符号(数量级)系统讨论后牛顿度规. 引力场中单个粒子的作用量可写为

$$\begin{aligned} I = I_0 = & -m_0 \int (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} \mathrm{d}t = \\ & -m_0 \int (g_{00} + 2g_{0i} v^i + g_{ik} v^i v^k)^{1/2} \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

令此式的变分为零将导致单个中性粒子的短程线方程. (5.1.11)右端的被积函数可以认为是引力场中单个中性粒子的拉格朗日. 由(5.1.3)可以证明，其牛顿极限对应于

$$L = (1 - 2U - v^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.1.12}$$

也就是说，牛顿力学由 L 的 $O(2)$ 近似给出. 可以想到，后牛顿近似要求 L 中含有最高阶为 $O(4)$ 的项.

我们分析一下 L 中含有数量级为 $O(1)$ 和 $O(3)$ 的项时将意味着什么. 这些项包含速度 v 的奇数次因子项或时间导数 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的奇数次因子项. 由于这些因子在时间反演($t \to -t$)下变号，所以这些项

表示能量的消耗或被系统吸收. 显然，静止质量守恒不允许 $O(1)$ 项存在；在牛顿极限中能量守恒不允许 $O(3)$ 项存在. 至于高于 $O(4)$ 的项，不同的引力理论可能有不同的预言. 例如在广义相对论中，后牛顿能量守恒禁止 $O(5)$ 项存在，但是却允许 $O(7)$ 项出现，它们表示引力辐射从系统中带走的能量.

为了使 L 的表达式精确到 $O(4)$，必须知道各度规分量该取到何种精确程度，我们把它们标在拉格朗日的表达式中：

$$L=\{1-2U-v^2+g_{00}[O(4)]+2g_{0i}[O(3)]v^i+ g_{ik}[O(2)]v^iv^k\}^{1/2}. \tag{5.1.13}$$

这样，引力度规理论的后牛顿极限要求

g_{00} 精确到 $O(4)$，

g_{0j} 精确到 $O(3)$，

g_{ik} 精确到 $O(2)$.

在后牛顿极限中可以由 L 的表达式获得光线传播的零短程线方程. 零短程线意味着 L 必须在形式上恒等于零. 这在牛顿极限中表示光沿直线传播，速度等于1(自然单位制)：

$$O=L=(1-v^2)^{\frac{1}{2}},\ v^2=1. \tag{5.1.14}$$

在后牛顿极限中，必须有

$$O=L=\{1-2U-v^2+g_{ik}[O(2)]v^iv^k\}^{1/2}. \tag{5.1.15}$$

这样，为了获得光线传播方程的后牛顿修正，必须在下面的精确度下知道 $g_{\mu\nu}$ 的表达式：

g_{00} 精确到 $O(2)$，

g_{ik} 精确到 $O(2)$. (5.1.16)

类似地可以证明，为了由后牛顿度规和守恒式 $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0$ 导出统一的流体动力学(后 Euler)方程，必须使理想流体的能-动张量

$$T^{\mu\nu}=(\rho+\rho\pi+p)u^\mu u^\nu+pg^{\mu\nu} \tag{5.1.17}$$

具有下面的精确度：

T^{00} 精确到 $\rho O(2)$，

T^{0i} 精确到 $\rho O(3)$，

T^{ik}精确到 $\rho O(4)$. (5.1.18)

在后牛顿极限中，人们选择相对于宇宙静止标架(在其中宇宙表现出各向同性)静止的坐标系. 设想在一个均匀各向同性宇宙中存在一个孤立的后牛顿系统，在后牛顿坐标系中，其外部度规应具有形式

$$ds^2 = dt^2 - \left[\frac{a(t)}{a_0}\right]^2 \left(1 - \frac{kr^2}{4a_0^2}\right)^{-1} \delta_{ij} dx^i dx^j - h_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{5.1.19}$$

式中右端头两项包含适用于各向同性宇宙模型的 Robertson-Walker 度规，第三项表示局部系引起的摄动，r 是从局部系到场点的距离，$a = a(t)$[$a_0 \equiv a(t_0)$]是宇宙标度因子，k 是曲率参数($k = 0, \pm 1$). 在给定半径 r_0 和特殊瞬时 t_0，可以变换到坐标系(x'^i, t')：

$$t' = t, x'^i = x^i(1 - kr_0^2/4a_0^2)^{-1}, \tag{5.1.20}$$

此时线元为

$$ds^2 = (\eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}) dx'^\mu dx'^\nu. \tag{5.1.21}$$

这里的 r_0 值须很大，因为只有 r_0 足够大，才能把 $\eta_{\mu\nu}$看作 $g_{\mu\nu}$的渐近形式，即使得 $h_{\mu\nu} \sim \frac{M}{r_0} \ll 1$. 式中 M(各向同性系统的质量)足够小，使 $r \ll r_0$ 时宇宙度规对 $\eta_{\mu\nu}$的偏离为二阶小量. 对 r_0 的上述要求可表示为$\left(\frac{M}{r_0}\right)^2 \sim \left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2$ 或 $M \ll r_0 \sim (Ma_0)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $a_0 \sim 10^{10}$光年，所以对于太阳系有 $r_0 \sim 10^{11}\text{km} \sim 10^3 a.u.$，对 $\eta_{\mu\nu}$的最大偏差 $\sim 10^{22}$. 这些值比影响太阳系实验的后牛顿偏差(10^{-16})小得多. 因此，在太阳系的外部范围($r > 10^3 a.u.$)我们可以把时-空度规看作渐近闵可夫斯基的. 在上面的讨论中忽略了宇宙标度因子 $a(t)$ 随时间的变化. 实际上这一变化不影响上述讨论，因为它发生的时标(10^{10}年)远大于太阳系的动力学时标(1 年).

我们构成的上述坐标系可称为"局部准笛卡儿坐标系". 在这个坐标系中空间矢量可作为笛卡儿矢量处理：$x^i = x_i$.

下面我们判断各度规分量应具有的形式

1. g_{ik}精确到$O(2)$：考虑到在空间转动下度规的修正项h_{ik}应作为三维张量变换，这些修正项应是

$$g_{ik}[O(2)]:\ U\delta_{ik},\ U_{ik},\tag{5.1.22}$$

其中

$$U_{ik}\equiv\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)(x-x')_i(x-x')_k}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x.\tag{5.1.23}$$

引入超势

$$\chi(\boldsymbol{r},t)\equiv-\int\rho(\boldsymbol{r}',t)|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}^3x',$$

$$\chi_{,ik}=-\delta_{ik}U+U_{ik},\nabla^2\chi=-2U,\tag{5.1.24}$$

则修正项可写为

$$g_{ik}[O(2)]:\ U\delta_{ik},\chi_{,ik}.\tag{5.1.25}$$

2. g_{0i}精确到$O(3)$：考虑到修正项h_{0i}在三维转动下应像矢量一样变换，可能具有形式

$$g_{0i}[O(3)]:\ V_i,W_i,\tag{5.1.26}$$

其中

$$V_i\equiv\int\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)v'_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3x',$$

$$W_i\equiv\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)\boldsymbol{v}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')(x-x')_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\mathrm{d}^3x'.\tag{5.1.27}$$

函数V_i,W_i和超势χ之间有关系式

$$\chi_{,0i}=V_i-W_i.\tag{5.1.28}$$

3. g_{00}精确到$O(4)$：考虑到h_{00}在空间转动下应是一个标量，可能具有形式

$$g_{00}[O(4)]:\ U^2,\ \Phi_w,\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4,\mathscr{A},\mathscr{R}.\tag{5.1.29}$$

其中

$$\Phi_w\equiv\int\rho'\rho''\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''|}-\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''|}\right)\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}^3x'',$$

$$\Phi_1\equiv\int\frac{\rho'v'^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3x',\qquad\Phi_2\equiv\int\frac{\rho'U'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3x',$$

$$\Phi_3 \equiv \int \frac{\rho' \pi'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 x', \quad \Phi_4 \equiv \int \frac{\rho'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 x',$$

$$\mathscr{A} \equiv \int \frac{\rho' [\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \mathrm{d}^3 x',$$

$$\mathscr{R} \equiv \int \frac{\rho'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}^3 x'. \tag{5.1.30}$$

我们始终假定太阳系物质可看作理想流体.这对于所有的太阳系实验都是符合的.由(5.1.5)可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho(\boldsymbol{r}', t) f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3 x' = \int \rho(\boldsymbol{r}', t) \boldsymbol{v}' \cdot \nabla' f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \mathrm{d}^3 x [1+O(2)], \tag{5.1.31}$$

反复利用上式，可以得到上述度规附加项所满足的一系列关系：

$$\nabla^2 V_i = -4\pi \rho v_i, \; V_{i,i} = -U_{,0},$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi \rho v^2, \; \nabla^2 \Phi_2 = -4\pi \rho U,$$

$$\nabla^2 \Phi_3 = -4\pi \rho \Pi, \; \nabla^2 \Phi_4 = -4\pi p,$$

$$\nabla^2 (\Phi_w + 2U^2 - 3\Phi_2) = 2\chi_{,ij} U_{,ij},$$

$$\chi_{,00} = \mathscr{A} + \mathscr{R} - \Phi_1. \tag{5.1.32}$$

§5.2 PPN 度规

我们可以作一适当的坐标变换，使后牛顿度规具有一标准形式.考虑一无限小坐标(规范)变换

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \tag{5.2.1}$$

将度规变为

$$\bar{g}_{\mu\nu}(\bar{x}) = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} = g_{\mu\nu}(\bar{x}) - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}. \tag{5.2.2}$$

我们要求保留 $g_{\mu\nu}$的后牛顿特性和坐标系的准狄卡儿特性，并且仍然在宇宙静止标架中.这就要求 $\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu}$是后牛顿函数，而且在远离系统时有

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} \to 0, \frac{|\xi^\mu|}{|x^\mu|} \to 0.$$

满足上述要求的最简单的函数是超势的梯度 $\chi_{,\mu}$.因此我们取

$$\xi_0=\lambda_1\chi_{,0},\xi_i=\lambda_2\chi_{,i}. \tag{5.2.3}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ik}&=g_{ik}-2\lambda_2\chi_{,ik},\\
\bar{g}_{0i}&=g_{0i}-(\lambda_1+\lambda_2)\chi_{,0i},\\
\bar{g}_{00}&=g_{00}-2\lambda_1\chi_{,00}+2\lambda_2\Gamma^i_{00}\chi_{,i}.
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

按后牛顿极限要求的精确度，Γ^i_{00}应等于$-U_{,i}$(由Γ^i_{00}的定义式直接可得). 上面附加项中含有的对源坐标x'的积分应换成对新的源坐标$\bar{x}'$的积分. 这一变换只影响函数g_{00}: $g_{00}=1-2U(\bar{x},\bar{t})$,其中含有

$$U(\bar{x},\bar{t})=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',\bar{t})}{|\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3x'.$$

量$\rho(\boldsymbol{r},t)$是不变量，它是局部随动洛仑兹系中测量的静止质量密度. 因此量$(-g)^{1/2}u^0d^3x$是不变量，可作为标量体元. 于是有

$$\mathrm{d}^3x'=\mathrm{d}^3\bar{x}'[(-\bar{g})^{1/2}\bar{u}^0/(-g)^{1/2}u^0]. \tag{5.2.5}$$

由(5.2.4)和$u^0=\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$，得到

$$\rho'\mathrm{d}^3x'=\bar{\rho}'\mathrm{d}^3\bar{x}'[1+2\lambda_2U(\bar{\boldsymbol{r}}',t)]. \tag{5.2.6}$$

注意到 $$\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{r}}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{|\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}'|}-\lambda_2\frac{(\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}')\cdot\bar{\nabla}'\chi(\bar{\boldsymbol{r}}',t)}{|\boldsymbol{r}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}, \tag{5.2.7}$$

有 $$U(\bar{\boldsymbol{r}},t)=\bar{U}(\bar{\boldsymbol{r}},\bar{t})+2\lambda_2\bar{\Phi}_2-\lambda_2\int\frac{\bar{\rho}'(\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}')\cdot\nabla'\bar{\chi}'}{|\bar{\boldsymbol{r}}-\bar{\boldsymbol{r}}'|^3}\mathrm{d}^3\bar{x}. \tag{5.2.8}$$

由(5.1.28)，(5.1.30)和(5.2.4)得到

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{ik}&=g_{ik}-2\lambda_2\chi_{,ik},\\
\bar{g}_{0i}&=g_{0i}-(\lambda_1+\lambda_2)(V_i-W_i),\\
\bar{g}_{00}&=g_{00}-2\lambda_2(U^L+\Phi_w-\Phi_2)-2\lambda_1(\mathscr{A}+\mathscr{R}-\Phi_1).
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

适当选择λ_1和λ_2，可以消去某些项，使得度规的空间部分是对角的、各向同性的(消去$\chi_{,ik}$)，且使g_{00}不含$\mathscr{R}$项. 这一坐标条件称为**标准后牛顿规范**.

至此，在静止于宇宙静止标架的局部准狄卡儿坐标系中，在

标准后牛顿规范下，我们有一个理想流体度规的普遍形式.不同的引力理论的区别仅在于普遍形式中各项的系数不同.把度规表达式中各项系数写成任意参量形式，称为**参量化后牛顿(PPN)度规**,这些参量称为**后牛顿(PPN)参量**.用这些参量来描述引力度规理论的后牛顿极限(参量取一些特殊值)，称为参量化后牛顿(PPN)形式.这一形式由 Eddington(1922),Robertson(1962)和 Schiff(1967)给出.太阳系作为一个球对称非旋转系统，行星作为太阳引力场(度规场)中的试验物体，沿短程线运动.太阳系度规的 PPN 形式为

$$g_{00}=1-\frac{2M}{r}+2\beta\left(\frac{M}{r}\right)^2,$$

$$g_{0i}=0,$$

$$g_{ik}=-\left(1+\frac{2\gamma M}{r}\right)\delta_{ik}. \tag{5.2.10}$$

式中 M 是太阳质量，β 和 γ 是 PPN 参量.这两个参量都具有物理意义.由定义可知，在后牛顿极限中，黎曼曲率张量的空间分量可写为

$$R_{ijkl}=\frac{3\gamma M}{r^3}(\hat{n}_j\hat{n}_k\delta_{il}+\hat{n}_i\hat{n}_l\delta_{jlk}-\hat{n}_i\hat{n}_k\delta_{jl}-\hat{n}_j\hat{n}_l\delta_{ik}-$$

$$\frac{2}{3}\delta_{il}\delta_{jk}+\frac{2}{3}\delta_{ik}\delta_{jl}).$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}$.由此可知参量 γ 用来量度太阳系的空间曲率.这一含义连同上式都不依赖于后牛顿规范的选择.参量 β 用来量度 g_{00}中的非线性部分.但是在后牛顿极限中从各向同性坐标变到史瓦希坐标时，g'_{00}中不再含$\left(\frac{M}{r}\right)^2$项，因此严格说来参量 β 不具有确定的物理意义.

Schiff(1960)和 Baierlein(1967)对原始的理想流体的 PPN 度规作了推广和发展工作，最后由 Will 和 Nordtvedt(1972,1973)建立了完美和统一的形式.在 PPN 度规中，含有 10 个参量，它们是 γ，β，α_1，α_2，α_3，ζ_1，ζ_2，ζ_3，ζ_4 和 ζ_w.PPN 度规具有形式

$$
\begin{aligned}
g_{00}=&1-2U+2\beta U^2+2\zeta_w\Phi_w-\\
&(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1-2\zeta_w)\Phi_1-\\
&2(3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+\zeta_w)\Phi_2+2(1+\zeta_3)\Phi_3-\\
&2(3\gamma+3\zeta_4-2\zeta_w)\Phi_4+(\zeta_1-2\zeta_w)\mathscr{A},\\
g_{0i}=&\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\zeta_w)V_i+\\
&\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)W_i,\\
g_{ik}=&-(1+2\gamma U)\delta_{ik}.
\end{aligned}
\tag{5.2.11}
$$

在上式中采用了一些 PPN 参量的线性组合，这是为了使参量 α_1，α_2，α_3，ζ_1，ζ_2，ζ_3 和 ζ_4 具有特殊的物理意义.

前面讨论的 PPN 度规是在一个静止于宇宙静止标架中的坐标系里表述的. 当计算各种不同引力理论的后牛顿度规时，采用这一坐标系是很方便的. 但是对于系统中可观测的后牛顿效应的计算，这一坐标系就不方便了. 比如研究太阳系中的一些可观测效应，太阳系相对于宇宙静止标架是运动的，最好将坐标系建立在太阳系的质量中心，即在所选取的坐标系中可认为物理系统的质心是近似静止的，这时研究起来会方便得多. 当然，这只是为了便于效应的表述，实验观测结果是不随坐标系的选择而改变的. 在一般情况下，我们要考虑一个从原来的 PPN 坐标系向以速度 $\boldsymbol{w}$ 相对于它运动的新坐标系的变换. 为了保持后牛顿特性，假设 $|\boldsymbol{w}|$ 是小量，$|\boldsymbol{w}|\sim O(1)$. 这个变换 $(\boldsymbol{r}, t)\longrightarrow(\boldsymbol{\xi}, \tau)$ 可以按小量 $|\boldsymbol{w}|$ 的幂次展开到要求的量级. 这一洛伦兹变换的近似形式有时叫做后伽利略变换，它的形式是

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{\xi}+\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)\boldsymbol{w}\tau+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{w}+O(4)\cdot\boldsymbol{\xi},\\
t&=\tau\left(1+\frac{1}{2}w^2+\frac{3}{8}w^4\right)+\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{w}+O(5)\cdot\tau.
\end{aligned}
\tag{5.2.12}
$$

式中 $\boldsymbol{w}\tau$ 假定精确到 $O(0)$.

由于 ρ，Π 和 p 是在随动局部洛伦兹系中测量的，所以在坐

标变换时这些量保持不变：

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\rho(\boldsymbol{\xi},\tau),$$
$$\Pi(\boldsymbol{r},t)=\Pi(\boldsymbol{\xi},\tau),$$
$$p(\boldsymbol{r},t)=p(\boldsymbol{\xi},\tau). \tag{5.2.13}$$

分别用$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$和$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi},\tau)$表示物质元在两个坐标系中的速度，则有

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}+O(3). \tag{5.2.14}$$

两体元d^3x'和$\mathrm{d}^3\xi'$间的关系由变换式(5・2・5)决定：

$$\mathrm{d}^3x'=\{[-g(\xi'^{\mu})]^{1/2}u'^{\tau}/[-g(x'^{\mu})]^{1/2}u'^{0}\}\mathrm{d}^3\xi'=$$
$$\left[1-\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{w}-\frac{1}{2}w^2+O(4)\right]\mathrm{d}^3\xi'. \tag{5.2.15}$$

在后牛顿势中出现的量$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}'(t)$按下式变换：

$$\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{r}'(t')=$$
$$\boldsymbol{\xi}(\tau)-\boldsymbol{\xi}'(\tau')+\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)\boldsymbol{w}(\tau-\tau')+$$
$$\frac{1}{2}[\boldsymbol{\xi}(\tau)-\boldsymbol{\xi}'(\tau')]\cdot\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}+O(4),$$
$$(\tau-\tau')\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)+[\boldsymbol{\xi}(\tau)-\boldsymbol{\xi}(\tau')]\cdot\boldsymbol{w}+O(3)=0. \tag{5.2.16}$$

在坐标系$(\boldsymbol{\xi},\tau)$中，量$\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}'$必须在同一时间$\tau$计算，因此必须考虑到

$$\boldsymbol{\xi}'(\tau')=\boldsymbol{\xi}(\tau)+\boldsymbol{v}(\tau'-\tau)+O(\tau'-\tau)^2. \tag{5.2.17}$$

由(5.2.16)和(5.2.17)得到

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}=\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}'|}\left\{1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}')^2+\right.$$
$$\left.(\boldsymbol{w},\hat{\boldsymbol{n}}')(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}')+O(4)\right\}. \tag{5.2.18}$$

式中
$$\hat{\boldsymbol{n}}'\equiv\frac{\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}'}{|\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{\xi}'|}. \tag{5.2.19}$$

由式(5.2.13)～(5.2.15)和(5.2.18)，考虑到度规函数的定义以及(5.1.27)和(5.1.30)，得到

$$U(\boldsymbol{r},t)=\left(1-\frac{1}{2}w^2\right)U(\boldsymbol{\xi},\tau)-w^iV_i(\boldsymbol{\xi},\tau)+$$

$$w^i(\boldsymbol{\xi}, \tau)+\frac{1}{2}w^i w^k U_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(6),$$

$$\Phi_w(\boldsymbol{r}, t)=\Phi_w(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(6),$$

$$\Phi_1(\boldsymbol{r}, t)=\Phi_1(\boldsymbol{\xi}, \tau)+2w^i V_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)+w^2 U(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(6),$$

$$\Phi_p(\boldsymbol{r}, t)=\Phi_p(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(6),\ p=2, 3, 4,$$

$$V_i(\boldsymbol{r}, t)=V_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)+w_i U(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(5),$$

$$W_i(\boldsymbol{r}, t)=W_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)+w^k U_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(5),$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{r}, t)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}, \tau)+2w^i W_i(\boldsymbol{\xi}, \tau)+ w^i w^k U_{ik}(\boldsymbol{\xi}, \tau)+O(6). \tag{5.2.20}$$

注意到普遍的变换式

$$g_{\mu\nu}(\boldsymbol{\xi}, \tau)=\frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\nu}g_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t}), \tag{5.2.21}$$

由(5.2.12)，(5.2.11)和(5.2.20)得到运动坐标系(ξ, τ)中的后牛顿度规：

$$\begin{aligned} g_{00}=&1-2U+2\beta U^2+2\zeta_w\Phi_w-\\ &(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1-2\zeta_w)\Phi_1-\\ &2(3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+\zeta_w)\Phi_2-2(1+\zeta_3)\Phi_3-\\ &2(3\gamma+3\zeta_4-2\zeta_w)\Phi_4+(\zeta_1-2\zeta_w)\mathscr{A}-\\ &(2\alpha_3-\alpha_1)w^i V_i+(1-\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)w^i\chi_{,0i}+\\ &(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2 U+\alpha_2 w^i w^k U_{ik},\\ g_{0i}=&\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\zeta_w)V_i+\\ &\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)W_i+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^i U+\\ &\alpha_2 w^k U_{ik}+\frac{1}{2}(1-\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)w^k\chi_{,ik},\\ g_{ik}=&-[1+2\gamma U]\delta_{ik}. \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

将后牛顿度规(5.2.22)代入能-动张量式(5.1.17)，得到(ξ, τ)系中$T^{\mu\nu}$的后牛顿表达式：

$$T^{00}=\rho(1+\Pi+v^2+2U),$$

$$T^{0i}=\rho(1+v^2+\Pi+2U+p/\rho)v^i,$$

$$T^{ij}=\rho v^i v^j(1+v^2+\Pi+2U+p/\rho)+p\delta^{ij}(1-2\gamma U).$$
(5.2.23)

将(5.2.22)代入 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$的定义式得到 $\Gamma^{\mu}_{\nu\tau}$的后牛顿表达式：

$$\Gamma^{o}_{oo}=-U_{,o},\ \Gamma^{o}_{oi}=-U_{,i},$$

$$\Gamma^{o}_{ij}=\gamma\delta_{ij}U_{,o}+\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2-\zeta_1-2\zeta_w)V_{(i,j)}+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)W_{(i,j)}+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w_{(i}U_{,j)}+\alpha_2 w^k U_{k(i,j)},$$

$$\Gamma^{i}_{oo}=-U_{,i}+\frac{\partial}{\partial x^i}\Big[(\beta+\gamma)U^2+\zeta_w\Phi_w-\Phi+\frac{1}{2}(\zeta_1-2\zeta_w)\mathscr{A}+\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2U+\frac{1}{2}\alpha_2 w^j w^k U_{jk}-\frac{1}{2}(2\alpha_3-\alpha_1)w^jV_j\Big]-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\zeta_w)V_i+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)W_i+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^iU+\alpha_2 w^jU_{ij}\right],$$

$$\Gamma^{i}_{oj}=\gamma\delta_{ij}U_{,o}-\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V_{[i,j]}-\frac{1}{2}\alpha_1 w_{[i}U_{,j]},$$

$$\Gamma^{i}_{jk}=\gamma(\delta_{ij}U_{,k}+\delta_{ik}U_{,j}-\delta_{jk}U_{,i}).\tag{5.2.24}$$

式中 $\Phi=\frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1-\zeta_w)\Phi_1+(3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+\zeta_w)\Phi_2+(1+\zeta_3)\Phi_3+(3\gamma+3\zeta_4-2\zeta_w)\Phi_4.$

由于度规(5.2.22)中增加了一个后牛顿变量 $\boldsymbol{w}$，所以增加了一个规范自由度. 借助于规范变换

$$\bar{\tau}=\tau+\frac{1}{2}(1-\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)w^j\chi_{,j},\bar{\xi}^i=\xi^i,\tag{5.2.25}$$

可将$(1-\alpha_2-\zeta_1+2\zeta_w)w^j\chi_{,oj}$一项从 g_{oo}中消掉，将$\frac{1}{2}(1-\alpha_2-\zeta_1+$

$2\zeta_w)w^i\chi_{,ik}$一项从 g_{oi} 中消掉. 这一规范可称为在以速度 $\boldsymbol{w}$ 相对于宇宙静止标架运动的坐标系中的部分标准 PPN 规范. 在这一规范中 g_{ik} 是对角的，g_{oo} 中不含有项 $\mathscr{R}$ 和 $w^i\chi_{,oi}$. 可以证明，再进行后伽利略变换时只能改变坐标系速度 $\boldsymbol{w}$ 的值，不改变 PPN 度规的形式.

任何物理测量的结果都不会依赖于速度 $\boldsymbol{w}$(广义协变原理). 对于像太阳和行星这样的系统，物理上可以测量的速度只有物质之间的相对速度，系统质心的速度和质心相对于宇宙静止标架的速度 $\boldsymbol{w}_0$(在宇宙微波背景辐射中用多普勒频移测量这一速度). 因此，PPN 所预言的任何物理效应都只依赖于这些相对速度和 $\boldsymbol{w}_0$，而不依赖于 $\boldsymbol{w}$. 如果参量 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$，则在任一坐标系的度规中都不含有 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{w}_0$，不存在依赖于 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{w}_0$ 的效应；如果参量组 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 中的任何一个不等于零，就将存在依赖于 $\boldsymbol{w}_0$ 的可观察效应. 这样，参量 α_1，α_2 和 α_3 的值表征因相对于宇宙“优越”(或“从优”)静止标架的运动而产生的后牛顿效应的大小，故称为“优越标架参量”. 如果三个参量都是零，就没有这样的效应出现，即有无限多个平权的标架，不存在优越标架.

§5.3 守恒定律

在牛顿引力理论中，一个孤立的引力系统有质量守恒，能量守恒，动量守恒和角动量守恒等守恒定律. 对于一些引力度规理论，上述守恒定律不都成立，在后牛顿近似下有些守恒定律不成立. 下面我们用 PPN 形式来讨论这些情况.

首先讨论局部守恒定律. 这些定律在任一局部洛伦兹系中成立，它们不依赖于引力度规理论，而依赖于物质结构.

重子数守恒是最基本的物理定律之一，有引力存在时当然应该保持. 这一定律可表示为重子数密度 n 的连续性方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta A)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\delta V)=0, \qquad (5.3.1)$$

或 $$\frac{\partial n}{\partial t}+\nabla\cdot(n\boldsymbol{V})=0. \tag{5.3.2}$$

式中 δA 表示重子数，$\boldsymbol{V}$ 是随动局部洛伦兹系中重子速度(注意在随动系中虽然 $\boldsymbol{V}=0$ 但 $\nabla\cdot\boldsymbol{V}\neq 0$)．将上式写成洛伦兹协变形式：

$$(nu^{\mu})_{,\mu}=0. \tag{5.3.3}$$

式中 $u^{\mu}=\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}$ 是重子的四维速度矢量．将上式中的逗号换为分号，便推广到弯曲空-时中的任一标架：

$$(nu^{\mu})_{;\mu}=0. \tag{5.3.4}$$

假设物质是均匀的且由不活泼的化学元素组成，则重子数密度和静止质量密度成正比：

$$\rho=\mu n. \tag{5.3.5}$$

式中 μ 是流体元中每个重子的平均质量($\mu=$const)．这里我们未计反重子数．类似于上面的讨论，可得到静止质量守恒定律：

$$(\rho u^{\mu})_{;\mu}=0. \tag{5.3.6}$$

由(5.3.6)和运动方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$，可以得到

$$u_{\mu}T^{\mu\nu}_{;\nu}=0. \tag{5.3.7}$$

此式给出第三个局部守恒定律——局部能量守恒定律，此式也可称为等熵流动定律．由(5.3.7)和(5.1.17)可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho-\rho\Pi)+\nabla\cdot(\rho+\rho\Pi+p)\boldsymbol{V}=0, \tag{5.3.8}$$

或 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(\rho+\rho\Pi)\delta V]+p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta V)=0. \tag{5.3.9}$$

此式表明，在随动系中流体元总能量的增加等于外界对它作的功，恰为局部能量守恒定律．又由热力学第一定律可将(5.3.9)写为

$$\mathrm{d}E+p\mathrm{d}V=\mathrm{d}Q=T\mathrm{d}S=0, \tag{5.3.10}$$

所以，(5.3.7)也可表述为等熵流动定律．我们始终没考虑热传递．如果允许有热传递，应在 $T^{\mu\nu}$ 中增加一项 $T^{\mu\nu}_{Q}=2\mu^{(\mu}q^{\nu)}$，其中 q^{ν} 是"热流四维矢量"(Ehlers，1971)．

由于静质量守恒，$\rho\delta V=$const，方程(5.3.9)可写为

$$\rho\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}-\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=0, \tag{5.3.11}$$

在随动系中可写为

$$u^{\mu}\left[\Pi_{;\mu}+p\left(\frac{1}{\rho}\right)_{;\mu}\right]=0. \tag{5.3.12}$$

下面我们导出一个有用的静质量守恒(或重子数守恒)定律的表达式. 在矢量协变散度的普遍式

$$A^{\mu}_{;\mu}=(-g)^{-1/2}[(-g)^{1/2}A^{\mu}]_{,\mu} \tag{5.3.13}$$

中代入 $A^{\mu}=\rho u^{\mu}$, 得到

$$(-g)^{-1/2}[(-g)^{1/2}\rho u^{\mu}]_{,\mu}=0. \tag{5.3.14}$$

注意到 $u^{i}=u^{0}v^{i}$, 上式可写为

$$[\rho(-g)^{1/2}u^{0}]_{,0}+[\rho(-g)^{1/2}u^{0}v^{i}]_{,i}=0. \tag{5.3.15}$$

定义一个"**守恒密度**"$\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho}\equiv\rho(-g)^{1/2}u^{0}, \tag{5.3.16}$$

则(5.3.15)可改写为连续性方程的形式:

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}+\nabla\cdot\tilde{\rho}\boldsymbol{v}=0. \tag{5.3.17}$$

由于包围物质的任意体积 V 中定义的函数 $f(\boldsymbol{r},t)$都满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{V}\tilde{\rho}\,f\mathrm{d}^{3}x=\int_{V}\tilde{\rho}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}^{3}x, \tag{5.3.18}$$

所以这个守恒密度 $\tilde{\rho}$是一个很有用的量.

容易看出, 上式中包含有

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=0,\ m\equiv\int_{V}\tilde{\rho}\,\mathrm{d}^{3}x. \tag{5.3.19a}$$

式中 m 是体积 V 中粒子的总静质量. 由(5.3.16)可以得到

$$m=\int_{V}[\rho u^{0}(-g)^{1/2}]\mathrm{d}^{3}x. \tag{5.3.19b}$$

前面讨论的守恒定律是局部守恒定律, 忽略了相对论效应和引力效应, 仅依赖于局部随动洛伦兹系中测得的物质特性. 现在我们讨论整体(积分)守恒定律. 虽然(5.3.18)也算是积分守恒定律, 但是实际上它表明重子数守恒, 没有更多的内容.

我们希望建立一个普遍的积分守恒定律，比如总能量守恒，总动量守恒和总角动量守恒．但是由于协变导数中存在克里斯托菲符号 $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$，无法直接从有压物质的运动方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 得到积分守恒定律．于是只好扩展量 $T^{\mu\nu}$，以新的量 $H^{\mu\nu}$ 代替它．量 $H^{\mu\nu}$ 在所选定的坐标系中应满足条件

$$H^{\mu\nu}_{,\nu}=0, \tag{5.3.20}$$

且在平直空-时中退化为 $T^{\mu\nu}$．我们发现，只要 $H^{\mu\nu}$ 是对称的，量

$$P^{\mu}\equiv\int_S H^{\mu\nu}\mathrm{d}^3S_{\nu} \text{ 和 } J^{\mu\nu}\equiv 2\int_S x^{[\mu}H^{\nu]\sigma}\mathrm{d}^3S_{\sigma} \tag{5.3.21}$$

就在闭合三维超表面上等于零．选择一坐标系($\boldsymbol{r}$，t)，使超表面 S 是 $t=\mathrm{const}$，沿所有空间方向伸展到无限远．这样，只要 $H^{\mu\nu}$ 随 $\bar{r}$（从物质算起）的增大而足够快地减小，就能保证 P_{μ} 和 $J^{\mu\nu}$ 不随时间变化．此时(5.3.21)可写为

$$P_{\mu}=\int H^{\mu0}\mathrm{d}^3x,\ J^{\mu\nu}=2\int x^{[\mu}H^{\nu]0}\mathrm{d}^3x. \tag{5.3.22}$$

可认为 P^0 表示总能量，P^i 为总动量，J^{ij} 为总角动量，J^{0i} 确定物质系统质心的运动．

在后牛顿极限中，形如(5.3.20)的守恒定律的存在要求 PPN 参量满足一定的条件．我们尝试构造 $H^{\mu\nu}$ 的形式：

$$H^{\mu\nu}=(1-aU)(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}), \tag{5.3.23}$$

式中 a 是常数，$t^{\mu\nu}$ 是场 U，U_{ij}，Φ_w，V_i，W_i，…它们的导数以及 $\boldsymbol{w}$ 的函数，也可包含物质变量 ρ，Π，p 和 $\boldsymbol{V}$．在 $H^{\mu\nu}$ 的表达式中不应含有项

$$v^2T^{\mu\nu},\ \Pi T^{\mu\nu},\ \frac{p}{\rho}T^{\mu\nu},\ w^2T^{\mu\nu},$$

因为当忽略引力场时这些项不退化零．

在后牛顿近似下，由方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 和(5.3.20)，(5.3.23)，得到 $t^{\mu\nu}$ 满足的方程

$$t^{\mu\nu}_{,\nu}-aU_{,\nu}t^{\mu\nu}=\Gamma^{\mu}_{\lambda\sigma}T^{\lambda\sigma}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\lambda}T^{\mu\nu}+aU_{,\nu}T^{\mu\nu}. \tag{5.3.24}$$

为了积分(5.3.24)，我们要用到两个恒等式．引入记号

$$\Gamma_{ij}(f)=U_{,(i}f_{,j)}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\nabla U\cdot\nabla f, \tag{5.3.25}$$

则有

$$4\pi\rho f_{,i}=-2\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma_{ij}(f)+U_{,i}\nabla^2 f, \tag{5.3.26}$$

式中 f 是任意函数. 另一个恒等式是

$$\begin{aligned}\rho\Phi_{w,i}=&\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big[-2\Gamma_{ij}\Big(\Phi_w+\frac{3}{4}U^2-\nabla\chi\cdot\nabla U-\\&\psi_{k,k}\chi_{,ij}-\chi\psi_{k,kij}+\delta_{ij}(\chi\psi_{k,kl})_{,l}+\\&8\pi\rho\chi_{,(i}U_{,j)}-\delta_{ij}(U_{,0})^2\Big]+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}(U_{,i}U_{,0})+\\&U_{,i}\Big[\frac{1}{4\pi}\nabla^2\mathscr{A}+\rho v^2+2p-\frac{1}{8\pi}|\nabla U|^2\Big].\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

式中 ψ_i 是方程

$$\nabla^2\psi_i=-4\pi\rho U_{,i} \tag{5.3.28}$$

的解. 由(5.2.23)、(5.2.24)、(5.1.32)和(5.3.26)、(5.3.27), 可将(5.3.24)改写为

$$\begin{aligned}4\pi t^{0\nu}_{,\nu}=4\pi(t^{00}_{,0}+t^{0i}_{,i})=&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(6\gamma+2\alpha-5)|\nabla U|^2-\\&\frac{\partial}{\partial x^j}[2(3\gamma+\alpha-3)U_{,i}V_{[j,i]}+(3\gamma+\alpha-2)U_{,j}U_{,0}],\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

$$\begin{aligned}4\pi t^{i\nu}_{,\nu}=4\pi(t^{i0}_{,0}+t^{ij}_{,j})=&\frac{\partial}{\partial t}\Big[(4\gamma+4+\alpha_1)U_{,j}V_{[j,i]}+\\&\frac{1}{2}(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2+2\zeta_1)U_{,i}U_{,0}-(5\gamma+\alpha-\\&1)U\nabla^2V_i+\frac{1}{2}\alpha_1 w_i U\nabla^2 U+\alpha_2 U_{,i}(\boldsymbol{w}\cdot\nabla U)\Big]+\\&\frac{\partial}{\partial x^j}\Big\{\Big[1-(\zeta_2+4\zeta_w-\alpha)U+\frac{1}{2}(\alpha_3-\alpha_1)w^2\Big]\cdot\\&\Gamma_{ij}(U)-2\zeta_w\Gamma_{ij}(\Phi_w)+2\zeta_w\Gamma_{ij}(\nabla\chi\cdot\nabla U)-\\&(\zeta_1-2\zeta_w)\Gamma_{ij}(\mathscr{A})+2\Gamma_{ij}(\Phi)+(2\alpha_3-\alpha_1)\cdot\\&\Gamma_{ij}(w_k V_k)-\alpha_2\Gamma_{ij}(w^k w^l\chi_{,kl})-(1+\alpha_2-\zeta_1+\\&2\zeta_w)\Gamma_{ij}(\chi_{,00})+2\alpha_2\Gamma_{ij}(w_k\chi_{,k0})-\end{aligned}$$

$$2(4\gamma+4+\alpha_1)(V_{[i,l]}V_{[j,l]}-\frac{1}{4}\delta_{ij}V_{[k,l]}V_{[k,l]})+$$
$$(4\gamma+4+\alpha_1)(U_{,(i}V_{j),0}-\frac{1}{2}\delta_{ij}U_{,k}V_{k,0})+$$
$$\zeta_w[8\pi\rho\chi_{,(i}U_{,j)}+\delta_{ij}(\chi\psi_{k,kl})_{,l}-\psi_{k,k}\chi_{,ij}-$$
$$\chi\psi_{k,kij}]-\frac{1}{4}(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2+2\zeta_1)\delta_{ij}(U_{,0})^2+$$
$$\alpha_2\delta_{ij}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{w}\cdot\nabla U)^2-U_{,0}\boldsymbol{w}\cdot\nabla U\right]+$$
$$(5\gamma+\alpha-1)U(\rho v^i v^j+p\delta^{ij})+\tau^{ij}\}+4\pi Q^i.$$
(5.3.30)

式中 $$\Phi=\frac{1}{2}(2\gamma-2+\alpha_3+\zeta_1-2\zeta_w)\Phi_1+(3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+$$
$$\zeta_w)\Phi_2+(1+\zeta_3)\Phi_3+(3\gamma+3\zeta_4-2\zeta_w)\Phi_4,$$
$$\tau^{ij}=\frac{1}{2}\alpha_1 w_i U\nabla^2 V_j+\alpha_2 w_j U_{,i}U_{,0}-\alpha_2 w_j U_{,i}(\boldsymbol{w}\cdot\nabla U),$$
$$Q^i=U_{,i}\left[\frac{1}{2}(\alpha_3+\zeta_1)\rho v^2+\frac{1}{8\pi}\zeta_2|\nabla U|^2+\zeta_3\rho\Pi+\right.$$
$$\left.3\zeta_4 p+\frac{1}{8\pi}\zeta_1\nabla^2\mathscr{A}+\alpha_3\rho\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{w}\right]. \quad (5.3.31)$$

可以看出，Q^i 不可能写成物质变量和场变量的时间导数和梯度，因此(5.3.29)和(5.3.30)的可积性要求

$$\alpha_3=\zeta_1\equiv\zeta_2\equiv\zeta_3\equiv\zeta_4\equiv0. \quad (5.3.32)$$

任何引力度规理论都要满足条件(5.3.32)，否则就不能保证守恒定律(5.3.20)成立.

注意到(5.3.32)，将(5.3.29)和(5.3.30)代入(5.3.23)及(5.3.22)，得到守恒的能量和动量的表达式：

$$P^0=\int\tilde{\rho}\left(1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi\right)\mathrm{d}^3x, \quad (5.3.33)$$
$$P^i=\int\tilde{\rho}\left\{v^i\left[1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi+\frac{p}{\rho}\right]-\right.$$
$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2)W_i-\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2)(V_i+w_iU)-$$
$$\left.\frac{1}{2}\alpha_2 w_j U_{ij}\right\}\mathrm{d}^3x. \quad (5.3.34)$$

式中 $\tilde{\rho}$是守恒密度(5.3.16)的 PPN 形式：

$$\tilde{\rho}=\rho\left[1+\frac{1}{2}v^2+3\gamma U+O(4)\right]. \tag{5.3.35}$$

在 P^0 的表达式中，第一项是场中粒子的总静止质量，其他各项分别是场中的总动能，引力能和内能. 精确到 $O(2)$，即使条件(5.3.32)不满足，P^0 也是守恒的. 但是当(5.3.32)不成立时，精确到 $O(4)$，P^0 可能不守恒.

在给出式(5.3.21)时我们曾要求 $H^{\mu\nu}$是对称的. 如果 $H^{\mu\nu}$存在而不对称，则不能保证 $J^{\mu\nu}$守恒. 由(5.3.22)可得

$$\frac{\mathrm{d}J^{\mu\nu}}{\mathrm{d}t}=-2\int H^{[\mu\nu]}\mathrm{d}^3x. \tag{5.3.36}$$

由此可以看出，若 $H^{\mu\nu}$不对称，则 $J^{\mu\nu}$不守恒. 这就是说，为了保证角动量守恒，$t^{\mu\nu}$必须是对称的. 为了使 $t^{0i}=t^{i0}$，必须使它们的表达式不含 $U\nabla^2U_{,j}$的项，这要求 $H^{\mu\nu}$中所有依赖于 α 的项都必须消掉. 结果得到

$$2t^{[0i]}=-\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)U_{,0}U_{,i}-\alpha_1U_{,j}V_{[i,j]}-\frac{1}{2}\alpha_1w_iU\nabla^2U-\alpha_2U_{,i}\boldsymbol{w}\cdot\nabla U, \tag{5.3.37}$$

$$2t^{[ij]}=2\tau^{[ij]}=\alpha_1Uw_{[i}\nabla^2V_{j]}-2\alpha_2U_{,0}w_{[i}U_{,j]}+2\alpha_2w_{[i}U_{,j]}\boldsymbol{w}\cdot\nabla U. \tag{5.3.38}$$

由(5.3.37)和(5.3.38)可知，要使 $t^{\mu\nu}$是对称的，必须有

$$\alpha_1\equiv\alpha_2\equiv0. \tag{5.3.39}$$

(5.3.32)和(5.3.39)同时满足的理论称为**完全守恒理论**. 即在此理论中有

$$\alpha_1\equiv\alpha_2\equiv\alpha_3\equiv\zeta_1\equiv\zeta_2\equiv\zeta_3\equiv\zeta_4\equiv0; \tag{5.3.40}$$

有全部后牛顿守恒定律：能量、动量、角动量及质心运动守恒定律. 因为有 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$，不存在优越标架，所以完全守恒理论不可能是后牛顿量级的优越标架理论. 在这一理论中，对应于不同的引力度规理论，只有三个后牛顿参量 γ，β 和 ζ_w 可以取不同的值. $H^{\mu\nu}$和 $t^{\mu\nu}$具有形式

$$H^{\mu\nu}=[1+(5\gamma-1)U](T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}),$$

$$t^{00}=-\frac{1}{8\pi}(4\gamma+3)|\nabla U|^2,$$

$$t^{0i}=t^{i0}=\frac{1}{4\pi}[(2\gamma+1)U_{,i}U_{,0}+4(\gamma+1)U_{,j}V_{[i,j]}],$$

$$\begin{aligned}t^{ij}=&[1-(5\gamma+4\zeta_w-1)U]\Gamma^{ij}(U)-2\zeta_w\Gamma_{ij}(\Phi_w)+\\&2\zeta_w\Gamma_{ij}(\nabla\chi\cdot\nabla U)+2\zeta_w\Gamma_{ij}(\mathscr{A})+2\Gamma_{ij}(\Phi)-\\&(1+2\zeta_w)\Gamma_{ij}(\chi_{,00})-8(\gamma+1)(V_{[i,l]}V_{[j,l]}-\\&\frac{1}{4}\delta_{ij}V_{[k,l]}V_{[k,l]})+4(\gamma+1)\cdot\\&\left(U_{,(i}V_{j),0}-\frac{1}{2}\delta_{ij}U_{,k}V_{k,0}\right)+\\&\zeta_w[8\pi\rho\chi_{,(i}U_{,j)}+\delta_{ij}(\chi\psi_{k,kl})_{,l}-\psi_{k,k}\chi_{,ij}-\chi\psi_{k,kij}]-\\&\frac{1}{2}(2\gamma+1)\delta_{ij}(U_{,0})^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi=&\frac{1}{2}(2\gamma+2-2\zeta_w)\Phi_1+(3\gamma-2\beta+1+\zeta_w)\Phi_2+\\&\Phi_3+(3\gamma-2\zeta_w)\Phi_4,\end{aligned}\qquad(5.3.41)$$

守恒量具有形式

$$\begin{aligned}P^0=&\int\tilde{\rho}\left(1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi\right)\mathrm{d}^3x,\\P^i=&\int\tilde{\rho}\left[v^i\left(1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi+\frac{p}{\rho}\right)-\frac{1}{2}W^i\right]\mathrm{d}^3x,\\J^{ij}=&2\int\tilde{\rho}\,x^{[i}\left\{v^{j]}\left[1+\frac{1}{2}v^2+(2\gamma+1)U+\Pi+\frac{p}{\rho}\right]-\right.\\&\left.\frac{1}{2}(4\gamma+3)V^{j]}-\frac{1}{2}W^{j]}\right\}\mathrm{d}^3x,\\J^{0i}=&\int\tilde{\rho}\,x^i\left(1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi\right)\mathrm{d}^3x-P^it;\end{aligned}$$

(5.3.42)

质心的定义是

$$X^i=\frac{\int\tilde{\rho}\,x^i\left(1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi\right)\mathrm{d}^3x}{\int\tilde{\rho}\left(1+\frac{1}{2}v^2-\frac{1}{2}U+\Pi\right)\mathrm{d}^3x}.\qquad(5.3.43)$$

由$\frac{\mathrm{d}J^{0i}}{\mathrm{d}t}=0$和(5.3.42)可得

$$\frac{\mathrm{d}X^i}{\mathrm{d}t}=\frac{P^i}{P^0}, \tag{5.3.44}$$

即质心以速度$\frac{P^i}{P^0}$作匀速运动.

在有些引力理论中，只满足条件(5.3.32)，不满足(5.3.39). 如前所述，此时只有能量和动量守恒定律. 这类引力理论称为**半守恒理论**. 它们的守恒量 P^μ 如(5.3.33)和(5.3.34)所示；非守恒量 $J^{\mu\nu}$可由(5.3.21)和(5.3.29)，(5.3.30)得到. 半守恒理论的特征是在宇宙静止标架中($\boldsymbol{w}=0$)，不管 α_1 和 α_2 取何值 $t^{\mu\nu}$总是对称的. 这是因为当 $w=0$ 时 $\tau^{ij}=0$，所以在这个标架中空间角动量 J^{ij}守恒(表明这个标架不是一个动标架). 但是对于任一 $\boldsymbol{w}$ 有 $\tau^{0i}\neq\tau^{i0}$，所以在任意标架中分量 J^{0i}不守恒. 为了说明上述当 $\boldsymbol{w}=0$ 时 J^{ij}守恒而当 $\boldsymbol{w}$ 取任何值时 J^{0i}不守恒的情况，我们进行一次坐标变换. 将变换(5.2.12)用于 P^μ 和 $J^{\mu\nu}$的表达式，得到

$$\begin{aligned}
P'^0&=P^0\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{p},\\
\boldsymbol{p}'&=\boldsymbol{p}-\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)\boldsymbol{w}P^0+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{p}),\\
J'^{ij}&=J^{ij}-J^{k[i}w^{j]}w^k+2\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)J^{0[i}w^{j]},\\
J'^{i0}&=J^{i0}\left(1+\frac{1}{2}w^2\right)-w^jJ^{ij}-\frac{1}{2}w^iw^jJ^{j0}.
\end{aligned} \tag{5.3.45}$$

将(5.3.45)中第三式对时间求微商，注意$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J^{ik}=0$得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J'^{ij}=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J^{0[i}w^{j]}[1+O(w^2)]. \tag{5.3.46}$$

此式给出了质心运动不守恒$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J^{0i}\neq0\right)$和角动量不守恒$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}J'^{ij}\neq0\right)$之间的关系.

每一个由拉格朗日出发建立的引力理论至少是半守恒的.

不具有守恒定律(P^0 守恒除外)的引力理论称为**非守恒理论**.

它们的后牛顿参量$\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \alpha_3\}$不全为零.

§5.4 推导 PPN 度规的一般方法

在第 6 篇中我们将要讨论几种不同的引力度规理论. 为了将它们与实验观测结果进行比较，从而鉴别其优劣，采用后牛顿形式是很方便的. 尽管不同的引力度规理论在结构上有很大差别，但后牛顿极限的推导程序基本上是相同的. 本节讨论推导 PPN 度规的一般方法.

1. 确定各小量的量级

在各种引力理论中出现的表达式

$$
\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}^{(0)}+h_{\mu\nu},\\
&\phi=\phi_0+\varphi,\\
&K_\mu=(K+k_0,\ k_1,\ k_2,\ k_3),\\
&B_{\mu\nu}=B_{\mu\nu}^{(0)}+b_{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{5.4.1}
$$

中，所含各小量的后牛顿量级为：

$$
\begin{aligned}
&h_{00}\sim O(2)+O(4),\qquad h_{0i}\sim O(3),\\
&h_{ij}\sim O(2),\qquad \varphi\sim O(2)+O(4),\\
&k_0\sim O(2)+O(4),\ k_i\sim O(3),\\
&b_{00}\sim O(2)+O(4),\ b_{0i}\sim O(3),\\
&b_{ij}\sim O(2).
\end{aligned}
\tag{5.4.2}
$$

2. 代入引力场方程

将上面的表达式代入引力场方程，只保留对 $h_{\mu\nu}$ 阶数一致的项(使所获得的后牛顿解符合 §5.2 中近似程度的要求). 对于物质源，代入理想流体能-动张量 $T^{\mu\nu}$ 和相关的流体变量. $T^{\mu\nu}$ 的精确程度按(5.1.18)的要求.

3. 解 h_{00} 精确到 $O(2)$

此时只需要最低后牛顿量级的方程. 假定远离系统 $h_{00}\to 0$，可得

$$h_{00}=-2\alpha U. \tag{5.4.3}$$

式中 U 是牛顿引力势. α 是宇宙参量和引力常数 G 的函数. 因

此，在牛顿近似下，度规张量可表示为

$$g_{00}=C_0-2\alpha U,\ g_{0i}=0,\ g_{ij}=-\delta_{ij}C_1. \tag{5.4.4}$$

为了使这个度规张量在局部准笛卡儿坐标系中具有通常的牛顿和后牛顿形式，我们改变一下坐标刻度：

$$\bar{x}^0=C_0^{1/2}x^0,\ \bar{x}^i=C_1^{1/2}x^i. \tag{5.4.5}$$

此时有 $\bar{g}_{00}=C_0^{-1}g_{00},\ \bar{g}_{0i}=(C_0C_1)^{-1/2}g_{0i},$

$$\bar{g}_{ij}=C_1^{-1}g_{ij},\ \bar{U}=C_1U. \tag{5.4.6}$$

代入(5.4.4)，去掉一横，得到

$$g_{00}=1-\frac{2\alpha}{C_0C_1}U,\ g_{0i}=0,\ \bar{g}_{ij}=-\delta_{ij}. \tag{5.4.7}$$

在自然单位制中有 $G=1$，即

$$G\equiv\frac{\alpha}{C_0C_1}=1. \tag{5.4.8}$$

4. 解 h_{ij} 和 h_{0i} 分别精确到 $O(2)$ 和 $O(3)$

这些解可以由场方程的线性变换获得. 有些引力理论的场方程有一规范自由度，选择规范条件自然要使方程的解简化，这样选择的规范就不一定是标准 PPN 规范. 此时在获得全部解以后，需要再变换到标准 PPN 规范(5.2.3)和(5.2.4).

5. 解 h_{00} 精确到 $O(4)$

这是最困难的一步，涉及到场方程的非线性. 能-动张量 $T^{\mu\nu}$ 也要精确到后牛顿量级. 由(5.1.17)，(5.2.6)和(5.2.10)，得到

$$\begin{aligned}
&T^{00}=C_0^{-1}\rho[1+\Pi+2C_1U+C_0^{-1}C_1v^2+O(4)],\\
&T^{0i}=C_0^{-1}\rho[v^i+O(3)],\\
&T^{ij}=C_0^{-1}\rho v^iv^j+C_1^{-1}p\delta^{ij}+\rho O(4).
\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

6. 变换到局部准狄卡儿坐标系(5.4.5)和标准 PPN 规范(5.2.3)～(5.2.4). 将最后形式的 $g_{\mu\nu}$ 与(5.2.11)比较，定出 PPN 参量的数值

在获得后牛顿解的过程中，经常用到式(5.1.24)，(5.1.28)，(5.1.31)和(5.1.32). 也经常用到式

$$|\nabla U|^2=\nabla^2\left(\frac{1}{2}U^2-\Phi_2\right). \tag{5.4.10}$$

以广义相对论为例．场方程可写为

$$R_{\mu\nu}=8\pi\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right). \tag{5.4.11}$$

对于 $h_{\mu\nu}$ 中所要求的量级，$R_{\mu\nu}$ 具有形式：

$$R_{00}=\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}+\frac{1}{2}(h_{ii,00}-2h_{i0,i0})-\frac{1}{2}h_{00,i}\left(h_{ik,k}-\frac{1}{2}h_{kk,i}\right)+\frac{1}{4}|\nabla h_{00}|^2-\frac{1}{2}h_{ik}h_{00,ik},$$

$$R_{0i}=\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{0i}-h_{k0,ik}+h_{kk,0i}-h_{ki,0k}),$$

$$R_{ij}=\frac{1}{2}(\nabla^2 h_{ij}-h_{00,ij}+h_{kk,ij}-h_{ki,kj}-h_{kj,ki}). \tag{5.4.12}$$

（a）解 h_{00} 精确到 $O(2)$：对于相应的量级有：

$$R_{00}=\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00},\ T_{00}=\rho,\ g_{00}=1. \tag{5.4.13}$$

于是场方程为

$$\nabla^2 h_{00}=8\pi\rho,$$

解之得

$$h_{00}=-2U. \tag{5.4.14}$$

（b）解 h_{ij} 精确到 $O(2)$：引入规范条件

$$h^{\mu}_{i,\mu}=\frac{1}{2}h^{\mu}_{\mu,i}\ (h^{\mu}_{\alpha}\equiv\eta^{\mu\beta}h_{\beta\alpha}). \tag{5.4.15}$$

方程(5.4.11)的(ij)分量为

$$\nabla^2 h_{ij}=8\pi\rho\delta_{ij}, \tag{5.4.16}$$

解之得

$$h_{ij}=-2U\delta_{ij}. \tag{5.4.17}$$

（c）解 h_{0i} 精确到 $O(3)$：再引入规范条件

$$h^{\mu}_{0,\mu}=\frac{1}{2}h^{\mu}_{\mu,0}-\frac{1}{2}h_{00,0}, \tag{5.4.18}$$

场方程(5.4.11)成为

$$\nabla^2 h_{0i}+U_{,0i}=16\pi\rho v_i. \tag{5.4.19}$$

由(5.1.24)，(5.1.27)和(5.1.28)，得到

$$h_{0i}=4V_i-\frac{1}{2}\chi_{,0i}=\frac{7}{2}V_i+\frac{1}{2}W_i. \tag{5.4.20}$$

(d) 解 h_{00}精确到 $O(4)$：根据 h_{00}的最低级近似确定 R_{00}的形式：

$$R_{00}=\frac{1}{2}\nabla^2(h_{00}+2U^2-8\Phi_2). \tag{5.4.21}$$

按要求的量级能-动张量应取为

$$T_{00}-\frac{1}{2}g_{00}T=\frac{1}{2}\rho\left[1+2\left(v^2-U+\frac{1}{2}\Pi+\frac{3}{2}\frac{p}{\rho}\right)\right]. \tag{5.4.22}$$

代入场方程，解之得

$$h_{00}=-2U+2U^2-4\Phi_1-4\Phi_2-2\Phi_3-6\Phi_4. \tag{5.4.23}$$

(e) 确定 PPN 度规和 PPN 参量：将上面诸结果代入度规式中得到：

$$\begin{aligned}
&g_{00}=1-2U+2U^2-4\Phi_1-4\Phi_2-2\Phi_3-6\Phi_4,\\
&g_{0i}=\frac{7}{2}V_i+\frac{1}{2}W_i,\\
&g_{ij}=-(1+2U)\delta_{ij}.
\end{aligned} \tag{5.4.24}$$

将此式与(5.2.11)比较，得到 PPN 参量的值：

$$\begin{aligned}
&\gamma=\beta=1,\ \zeta_w=0,\\
&\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=0.
\end{aligned} \tag{5.4.25}$$

三个优越标架参量$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$均为零，这表明在广义相对论中没有优越标架效应. (5.4.25)还表明，广义相对论是完全守恒的引力理论.

6 PPN 运动方程

引力度规理论的主要结果之一是把物质(和非引力的场)与度规结合起来，由守恒定律得到运动方程：

$$T^{\mu\nu}_{;\nu}=0 \text{（物质和非引力的场）} \tag{6.0.1}$$

$$u^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}=0 \text{（中性试验物体：短程线）} \tag{6.0.2}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=4\pi J^{\mu} \text{（电磁场）} \tag{6.0.3}$$

$$k^{\nu}k^{\mu}_{;\nu}=0, \text{（光：零短程线）} \tag{6.0.4}$$

前面我们还利用后牛顿方法得到了作为物质变量和 10 个 PPN 参量的函数的一般时空度规. 如果把度规代入运动方程，则可得到用物质和非引力场变量给出的运动方程. 在特殊情况下，可以用标准方法解这些方程，从而预言物质的行为，再把这些预言与实验观测结果进行对照. 本章的目的是把以上运动方程化为可以直接用于特殊情况和与实验对照的形式.

§6.1 光子的运动方程

在几何光学极限下，由麦克斯威方程组可以得到短程线方程

$$k^{\nu}k^{\mu}_{;\nu}=0. \tag{6.1.1}$$

式中 k^{μ} 是与光子轨迹相切的波矢量，它满足

$$k^{\mu}k_{\mu}=0. \tag{6.1.2}$$

取 $k^{\mu}=\mathrm{d}x^{\mu}/\mathrm{d}\sigma$(这里 σ 是沿轨迹的“仿射”参量)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2}+\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\sigma}\frac{\mathrm{d}x^{\lambda}}{\mathrm{d}\sigma}=0. \tag{6.1.3}$$

也可用 PPN 坐标时 $t=x^0$ 作为仿射参量写出式(6.1.3)，注意到

$$\frac{d^2 t}{d\sigma^2}+\Gamma^0_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\sigma}\frac{dx^\lambda}{d\sigma}=0. \tag{6.1.4}$$

这样，空间分量具有形式

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2}+\left(\Gamma^j_{\mu\nu}-\Gamma^0_{\mu\nu}\frac{dx^j}{dt}\right)\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0. \tag{6.1.5}$$

方程(6.1.2)可以写为

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}=0. \tag{6.1.6}$$

科里斯托夫符号 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ 的表示式在附表中给出，于是在后牛顿近似下，(6.1.5)和(6.1.6)可写为

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2}=U_{,j}\left(1+\gamma\left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right|^2\right)-2\frac{dx^j}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\nabla U\right)(1+\gamma),$$

$$0=1-2U-|d\boldsymbol{x}/dt|^2(1+2\gamma U). \tag{6.1.7}$$

这些方程的牛顿解(零级近似解)为

$$x^j_N=\hat{n}^j(t-t_0),\quad |\hat{n}|=1, \tag{6.1.8}$$

即光线以恒定速度 $|dx_v/dt|=1$ 沿直线传播. 把 x^j 写为

$$x^j\equiv\hat{n}^j(t-t_0)+x^j_p, \tag{6.1.9}$$

表

$$\Gamma^0_{00}=-U_{,0}\qquad \Gamma^0_{0j}=-U_{,j}$$

$$\Gamma^0_{ij}=\gamma\delta_{ij}U_{,0}+\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\xi)V_{(i,j)}+$$

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\xi)W_{(i,j)}+\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w_{(i}U_{,j)}+\alpha_2 w^k U_{k(i,j)}$$

$$\Gamma^j_{00}=-U_{,j}+\partial/\partial x^j\left[(\beta-\gamma)U^2+\xi\Phi_w-\Phi+\frac{1}{2}(\zeta_1-2\xi)\mathscr{A}+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)w^2U+\frac{1}{2}\alpha_2 w^j w^k U_{,jk}-\frac{1}{2}(2\alpha_3-\alpha_1)w^j V_j\right]-$$

$$\partial/\partial t\left[\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\zeta)V_j+\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\xi)W_j+\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}(\alpha_1-2\alpha_2)w^jU+\alpha_2 w^i U_{,ij}\right]$$

$$\Gamma^j_{0i}=\gamma\delta_{ij}U_{,0}-\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V_{[i,j]}-\frac{1}{2}\alpha_1 w_{[i}U_{,j]}$$

$$\Gamma^i_{jk}=\gamma(\delta_{ij}U_{,k}+\delta_{ik}U_{,j}-\delta_{jk}U_{,i})$$

$$\Phi=\frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1-2\xi)\Phi_1+(3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+\xi)\Phi_2+(1+\zeta_3)\Phi_3+$$

$$(3\gamma+3\zeta_4-2\xi)\Phi_4$$

并代入(6.1.7)，得到偏离匀速直线运动的光子轨道方程：

$$\frac{d^2 x_p}{dt^2} = (1+\gamma)[\nabla U - 2\hat{n}(\hat{n} \cdot \nabla U)], \tag{6.1.10}$$

$$\hat{n} \cdot \frac{dx_p}{dt} = -(1+\gamma)U. \tag{6.1.11}$$

这组方程用于计算光线的引力偏转和时间延迟效应是很方便的.

§6.2 重质量物体的运动方程

得到重质量物体运动方程的一个方法是，假设每个物体沿时空中试验粒子的短程线运动，而 PPN 度规是由系统中其他物体及其本身所产生的. 用这一方法得到的运动方程不能用于重质量自引力物体，如行星，恒星或太阳，因为这些物体并不沿 PPN 度规的短程线运动. 它们的运动与其内部结构有关. 这一点首先是由 Nordtvedt 证明的(1968).

因此，为了得到重质量物体的运动方程，必须把每个物体看作有一质量中心的，且具有有限自引力的物质块，解方程(6.0.1)，对于太阳系的实验和观测，可以认为构成每个天体的物质都是理想流体[37].

在牛顿引力理论中，这一过程是直接的. 对于每个物体，定义惯性质量和质量中心：

$$m_a = \int_{a\text{th body}} \rho d^3 x,$$

$$\boldsymbol{x}_a = m_a{}^{-1} \int_a \rho \boldsymbol{x} d^3 x. \tag{6.2.1}$$

由牛顿连续性方程可以证明

$$dm_a/dt = 0,$$

$$\boldsymbol{v}_a \equiv d\boldsymbol{x}_a/dt = m_a{}^{-1} \int_a \rho \boldsymbol{v} d^3 x,$$

$$\boldsymbol{a}_a \equiv d\boldsymbol{v}_a/dt = m_a{}^{-1} \int_a \rho (d\boldsymbol{v}/dt) d^3 x. \tag{6.2.2}$$

根据理想流体的牛顿运动方程，得到

$$\boldsymbol{a}_a = \nabla U,$$

$$U=\sum_{b\neq a}\left[\frac{m_b}{r_{ab}}+\frac{1}{2}Q_b^{ij}\frac{x_{ab}^i x_{ab}^j}{r_{ab}^5}+O(r_{ab}^{-5})\right],\qquad(6.2.3)$$

式中 m_b 是第 b 个物体的惯性质量，Q_b^{ij} 是四极矩，其定义是

$$Q_b^{ij}\equiv\int_b\rho(3\bar{x}^i\bar{x}^j-|\bar{x}|^2\delta^{ij})\mathrm{d}^3\boldsymbol{x},\ \bar{\boldsymbol{x}}\equiv\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_b,\qquad(6.2.4)$$

$$\text{式中}\quad \boldsymbol{x}_{ab}\equiv\boldsymbol{x}_a-\boldsymbol{x}_b,\qquad r_{ab}\equiv|\boldsymbol{x}_{ab}|.\qquad(6.2.5)$$

下面我们利用 PPN 形式把这些方程推广到后牛顿近似. 由于在后牛顿极限中，存在许多不同的"质量密度"，如重子的静止质量密度 ρ，质量-能量密度 $\rho(1+\pi)$，"守恒"密度 ρ^*，等等，所以对于惯性质量和质量中心有多种不同的定义. 我们下面采用的定义，使得运动方程具有最简单的封闭形式. 结果只要在每个物体的几个固有动力学时间尺度上对运动方程求平均，最后得到的运动方程和惯性质量及质量中心的精确形式关系不大.

定义第 a 个物体的惯性质量为

$$m_a\equiv\int_a\rho^*\left(1+\frac{1}{2}\bar{v}^2-\frac{1}{2}\bar{U}+\Pi\right)\mathrm{d}^3x,\qquad(6.2.6)$$

式中 ρ^* 是守恒密度，$\bar{\boldsymbol{v}}\equiv\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{a(0)}$，而

$$\boldsymbol{v}_{a(0)}\equiv\int_a\rho^*\boldsymbol{v}\mathrm{d}^3x,\qquad(6.2.7)$$

$$\bar{U}=\int_a\rho(\boldsymbol{x}',t)|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^{-1}\mathrm{d}^3x'.\qquad(6.2.8)$$

可以认为 m_a 是在局部随动近似为惯性系中观测者测得的物体总质量能量(包括粒子的静止质量，动能，引力能和内能). 只要忽略作用于第 a 个物体上的潮汐力，在后牛顿近似下，m_a 即是守恒量，

$$\frac{\mathrm{d}m_a}{\mathrm{d}t}=0,\qquad(6.2.9)$$

利用(6.2.6)，(6.2.7)和(6.2.8)，经过严格计算，便可以证明这一点. 定义惯性质量中心为

$$\boldsymbol{x}_a\equiv m_a{}^{-1}\int_a\rho^*\left(1+\frac{1}{2}\bar{v}^2-\frac{1}{2}\bar{U}+\Pi\right)\boldsymbol{x}\mathrm{d}^3x.\qquad(6.2.10)$$

利用 ρ^* 的连续性方程和后牛顿近似下的牛顿运动方程，我们得到

$$\boldsymbol{v}_a \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{x}_a/\mathrm{d}t = m_a^{-1}\int_a \left[\rho^*\left(1+\frac{1}{2}\bar{v}^2-\frac{1}{2}\bar{U}+\Pi\right)\boldsymbol{v}+\right.$$

$$\left.\rho\bar{\boldsymbol{v}}-\frac{1}{2}\rho^*\overline{W}\right]\mathrm{d}^3x, \tag{6.2.11}$$

式中 $$\overline{W}_j=\int_a \rho' \frac{\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3x'. \tag{6.2.12}$$

从而得到加速度

$$\boldsymbol{a}_a \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{v}_a/\mathrm{d}t =$$

$$m_a^{-1}\left\{\int_a \rho^*\left(1+\frac{1}{2}\bar{v}^2-\frac{1}{2}\bar{U}+\Pi\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t)\mathrm{d}^3x+\right.$$

$$v_a^j\int_a p_{,j}\bar{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}^3x+\int_a[p_{,0}\boldsymbol{v}\bar{\boldsymbol{v}}-(p/\rho^*)\nabla p]\mathrm{d}^3x-$$

$$\left.\frac{1}{2}(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\int_a \rho^*\overline{\boldsymbol{W}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\mathscr{J}_a-\frac{1}{2}\mathscr{J}_a^*+\mathscr{P}_a\right\}, \tag{6.2.13}$$

式中 $\mathscr{J}_a$、$\mathscr{J}_a^*$ 和 $\mathscr{P}_a$ 仅由第 a 个物体的内部结构决定. 它们以及其他"内部"项由附表给出.

现在利用 PPN 理想流体的运动方程来计算式(6.2.13)中的第一个积分. 把 $T^{\mu\nu}$ 和 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$的后牛顿表示式代入运动方程(6.0.1), 重新用守恒密度 ρ^* 写出来, 形式为

表

矢量积分

$$\Omega_a^j=\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}\rho^{*\prime\prime}(x-x')^j}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}^3x''$$

$$\Omega_a^{*j}=\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}\rho^{*\prime\prime}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')(x-x')^j}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|^3|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}^3x''$$

$$t_a^j=\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}\bar{v}'^2(x-x')^j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x',$$

$$\mathscr{J}_a^j=\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}\bar{v}'^j\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'$$

$$\mathscr{J}_a^{*j}=\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}\bar{v}'^j\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'$$

$$\mathscr{J}_a^{**j}=\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}[\bar{\boldsymbol{v}}'\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]^2(x-x')^j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^5}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x'$$

续表

$$\mathscr{D}_a^j = \int_a \frac{\rho^* \rho'(x - x')^j}{|x - x'|^3} d^3x d^3x'$$

$$\mathscr{E}_a^j = \int_a \frac{\rho^* \rho^{*\prime} \Pi'(x - x')^j}{|x - x'|^3} d^3x d^3x'$$

张量和标量积分

$$\mathfrak{T}_a^{ij} = \frac{1}{2}\int_a \rho^* \bar{v}^i \bar{v}^j d^3x \qquad \mathfrak{T}_a = \frac{1}{2}\int_a \rho^* \bar{v}^2 d^3x$$

$$\Omega_a^{ij} = -\frac{1}{2}\int_a \frac{\rho^* \rho^{*\prime}(x - x')^i (x - x')^j}{|x - x'|^3} d^3x d^3x'$$

$$\Omega_a = -\frac{1}{2}\int_a \frac{\rho^* \rho^{*\prime}}{|x - x'|^3} d^3x d^3x'$$

$$I_a^{ij} = \int_a \rho^* (x - x_a)^i (x - x_a)^j d^3x, \quad I_a = \int_a \rho^* |x - x_a|^2 d^3x$$

$$P_a = \int_a p d^3x, \qquad E_a = \int_a \rho^* \Pi d^3x$$

$$H_a^{ij} = \int_a \frac{\rho^* \rho^{*\prime} \bar{v}^{\prime i}(x - x')^j}{|x - x'|^3} d^3x d^3x',$$

$$K_a^{ij} = \int_a \frac{\rho^* \rho^{*\prime} \bar{v}' \cdot (x - x')(x - x')^i (x - x')^j}{|x - x'|^5} d^3x d^3x'$$

$$\rho^* dv^j/dt = \rho^* U_{,j} - [p(1+3\gamma U)]_{,j} +$$

$$p_{,j}\left(\frac{1}{2}v^2 + \Pi + p/\rho^*\right) -$$

$$\rho^*(d/dt)\Big[(2\gamma+2)Uv^j - \frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)V^j -$$

$$\frac{1}{2}\alpha_1 U w^j\Big] + v^j(\rho^* U_{,0} - p_{,0}) -$$

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\xi)\rho^*(V^j - W^j)_{,0} -$$

$$\frac{1}{2}\rho^*[(4\gamma+4+\alpha_1)v^k + (\alpha_1 - 2\alpha_3)w^k]V_{k,j} +$$

$$\rho^*(\partial/\partial x^j)\Big[\Phi - \xi\Phi_w - \frac{1}{2}(\zeta_1 - 2\xi)\mathscr{A} -$$

$$\frac{1}{2}\alpha_2 w^i w^k U_{ik} + \alpha_2 w^k (V_k - W_k)\Big] +$$

$$\rho^* U_{,j}\Big[\gamma v^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)w^2 -$$

$$(2\beta-2)U+3\gamma p/\rho^{*}\Big]. \tag{6.2.14}$$

把上式代入(2.2.13)求积分. 如果对于每个物体的几个固有动力学时间尺度求平均，则得到的方程相当简单. 而所有固有量对时间的导数均可取为零. 这一近似对于太阳系是合理的，因为太阳或行星结构的变化是相当缓慢的. 这样，我们可以用几个牛顿关系式来简化后牛顿表示式. 利用每个物体的牛顿运动方程

$$
\begin{aligned}
&2\mathfrak{T}^{ij}+\Omega^{ij}+\delta^{ij}P=\langle \ddot{I}^{ij}\rangle=0,\\
&2\mathfrak{T}+\Omega+3P=\langle \ddot{I}\rangle=0,\\
&H^{(ij)}-\int \bar{v}_{(i}p_{,j)}\mathrm{d}^3x=\langle \dot{\mathfrak{T}}^{ij}\rangle=0,\\
&H^{(ij)}-3K^{ij}=\langle \dot{\Omega}^{ij}\rangle=0,\\
&H^{ii}=-\langle \dot{\Omega}\rangle=0,\\
&\int p_{,0}\mathrm{d}^3x=\langle \dot{P}\rangle=0,\\
&-t^{j}-\mathscr{J}^{j}+\mathscr{J}^{*j}+3\mathscr{J}^{**j}-\Omega^{*j}-\mathscr{D}^{j}=\\
&\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho^{*}\overline{W}^{j}\mathrm{d}^3x\right\rangle=0,\\
&\mathscr{J}^{j}+\mathscr{J}^{*j}+\Omega^{j}+\mathscr{D}^{j}=\left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho^{*}\overline{V}^{j}\mathrm{d}^3x\right\rangle=0,
\end{aligned}
\tag{6.2.15}
$$

可以导出运动方程，其最后形式为

$$a_a=(a_a)_{\mathrm{self}}+(a_a)_{\mathrm{Newt}}+(a_a)_{\mathrm{nbody}}, \tag{6.2.16}$$

式中

$$
\begin{aligned}
(a_a^j)_{\mathrm{self}}=-m_a^{-1}\Big[&\frac{1}{2}(\alpha_3+\zeta_1)t_a^j+\zeta_1\Big(\mathscr{J}_a^j-\frac{3}{2}\mathscr{J}_a^{**j}\Big)+\\
&\zeta_2\Omega_a^j+\zeta_3\mathscr{E}_a^j+3\zeta_4\mathscr{D}_a^j\Big]-m_a^{-1}\alpha_3(w+v_a)^kH_a^{kj},
\end{aligned}
\tag{6.2.17}
$$

$$(a_a{}^j)_{\mathrm{Newt}}=m_a{}^{-1}(m_p)_a^{jk}\mathscr{U}_{,k}, \tag{6.2.18}$$

$$(a_a^j)_{\mathrm{nbody}}=\sum_{b\neq a}\frac{m_bx_{ab}^j}{r_{ab}^3}\Big\{(2\gamma+2\beta)\frac{m_b}{r_{ab}}+$$

$$
\left(2\gamma + 2\beta + 1 + \frac{1}{2}\alpha_1 - \zeta_2\right)\frac{m_a}{r_{ab}} +
$$

$$
(2\beta - 1 - 2\xi - \zeta_2)\sum_{c\neq ab}\frac{m_c}{r_{bc}} +
$$

$$
(2\gamma + 2\beta - 2\xi)\sum_{c\neq ab}\frac{m_c}{r_{ac}} -
$$

$$
\frac{1}{2}(1 + 2\xi + \alpha_2 - \zeta_1)\sum_{c\neq ab} m_c \frac{\mathbf{x}_{ab}\cdot\mathbf{x}_{bc}}{r_{bc}^3} -
$$

$$
\zeta\sum_{c\neq ab} m_c \frac{\mathbf{x}_{bc}\cdot\mathbf{x}_{ac}}{r_{ac}^3} - \gamma v_a^2 + \frac{1}{2}(4\gamma + 4 + \alpha_1) v_a\cdot v_b -
$$

$$
\frac{1}{2}(2\gamma + 2 + \alpha_2 + \alpha_3) v_b^2 +
$$

$$
\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 + \frac{1}{2}\alpha_1 w\cdot v_a +
$$

$$
\frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3) w\cdot v_b + \frac{3}{2}(1 + \alpha_2)(v_b\cdot\hat{n}_{ab})^2 +
$$

$$
\left.\frac{3}{2}\alpha_2(w\cdot\hat{n}_{ab})^2 + 3\alpha_2(w\cdot\hat{n}_{ab})(v_b\cdot\hat{n}_{ab})\right\} -
$$

$$
\frac{1}{2}(4\gamma + 3 - 2\xi + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1)\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}}\sum_{c\neq ab}\frac{m_c x_{bc}^j}{r_{bc}^3} -
$$

$$
\zeta\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}(\delta_{jk} - 3\hat{n}_{ab}^j\hat{n}_{ab}^k)\sum_{c\neq ba} m_c\left(\frac{x_{ac}^k}{r_{ac}} - \frac{x_{bc}^k}{r_{bc}}\right) +
$$

$$
\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}\mathbf{x}_{ab}\cdot[(2\gamma + 2)v_a - (2\gamma + 1)v_b]v_a^j -
$$

$$
\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}\mathbf{x}_{ab}\cdot[(4\gamma + 4 + \alpha_1)v_a
$$

$$
- (4\gamma + 2 + \alpha_1 - 2\alpha_2)v_b + 2\alpha_2 w]v_b^j -
$$

$$
\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}\mathbf{x}_{ab}\cdot[\alpha_1 v_a - (\alpha_1 - 2\alpha_2)v_b + 2\alpha_2 w]w^j,
$$

(6.2.19)

$\hat{n}_{ab} = \mathbf{x}_{ab}/r_{ab}$.

在(6.2.17)中，前 6 项包含仅决定于第 a 个物体内部结构的项，如 t_a^j，$\mathscr{T}_a^j$ 等等，因而表示质量中心的“自加速度”. 自加速度

与总动量守恒的失效有关，这是因为它们取决于几个 PPN 守恒定律参数. 在各个半经典引力理论中，这几个参数都等于零：

$$\alpha_3 \equiv \zeta_1 \equiv \zeta_2 \equiv \zeta_3 \equiv \zeta_4 \equiv 0, \tag{6.2.20}$$

此时自加速度为零. 还有球对称物体，其引力加速度也等于零，这是因为它们的项 t_a^j，$\mathscr{T}_a^j$，$\mathscr{J}_a^{**j}$，Ω_a^j，$\mathscr{E}_a^j$ 和 $\mathscr{P}_a^j$ 恒为零. 近似为圆轨道上的两个物体构成的系统，当自引力加速度取轨道周期平均值时也如此. 因此，在太阳系中无法检验这些项的存在. 但是对于脉冲双星，当轨道偏心率很大时就可以检验这些项的存在.

方程(6.2.17)中的另一项，$-m_a^{-1}\alpha_3(w+v_a)^k H_a^{kj}$，是包含物体相对于宇宙静止参考系运动的自加速度. 它决定于守恒定律/优越参考系参数 α_3，在各种半守恒引力理论中它均为零. 对于任意静止物体 $\bar{v}=0$，因而 $H_a^{kj}=0$；但对于以匀角速 ω 转动的物体，

$$\bar{v}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_a) \tag{6.2.21}$$

$$H_a^{kj}=\epsilon^{klm}\omega^l\int_a \frac{\rho^*\rho^{*\prime}(x'-x_a)^m(x-x')^j}{|x-x'|^3}\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3x' = \epsilon^{klm}\omega^l(\Omega_a)^{jm}. \tag{6.2.22}$$

对于接近球形的物体，Ω^{jm} 的各向同性部分是对(6.2.22)的主要贡献：

$$(\Omega_a)^{jm}\simeq\frac{1}{3}\delta^{jm}\Omega_a, \quad H_a^{kj}\simeq\frac{1}{3}\epsilon^{jkl}\omega^l\Omega_a. \tag{6.2.23}$$

这时(6.2.17)中的加速项成为

$$-\frac{1}{3}\alpha_3(\Omega_a/m_a)(w+v_a)\times\boldsymbol{\omega}. \tag{6.2.24}$$

在[45]中我们论述过，如果 α_3 不为零，在太阳系中 这一项产生足够大的可观测效应.

式(6.2.16)中的 $(a_a)_{\mathrm{Newt}}$ 是重质量物体的准牛顿加速度. 其中的 $(m_p)_a^{jk}$ 是“被动引力质量张量”，形式为

$$(m_p)_a^{jk}=m_a\{\delta^{jk}[1+(4\beta-\gamma-3-3\xi-\alpha_1+\alpha_2-\zeta_1)\Omega_a/m_a-3\xi\hat{n}_{ab}^l\hat{n}_{ab}^m\Omega_a^{lm}/m_a]+(2\zeta-\alpha_2+\zeta_1-\zeta_2)\Omega_a^{jk}/m_a\}, \tag{6.2.25}$$

$U(x_a)$ 是准牛顿势，形式为

$$\Pi(x_a) = \sum_{b\neq a} \frac{[m_A(\hat{n}_{ab})]_b}{r_{ab}}, \tag{6.2.26}$$

其中$[m_A(\hat{n}_{ab})]_b$是第b个物体的"主动引力质量"，表示为

$$[m_A(\hat{n}_{ab})]_b = m_b\Big\{1+(4\beta-\gamma-3-3\xi-\frac{1}{2}\alpha_3- \frac{1}{2}\zeta_1-2\zeta_2)\Omega_b/m_b+\zeta_3 E_b/m_b-\Big(\frac{3}{2}\alpha_3+\zeta_1-3\zeta_4\Big) P_b/m_b+\frac{1}{2}(\zeta_1-2\zeta)\hat{n}^j_{ab}\hat{n}^k_{ab}\Omega^{jk}_b/m_b\Big\}. \tag{6.2.27}$$

这里应注意，主动和被动引力质量张量可以是关于其他物体方向$\hat{n}_{ab}$的函数. 用包含与位置无关的惯性、主动和被动质量张量以及引力势来重新写出准牛顿加速度，形式如下：

$$(\widetilde{m}_I^{jk})_a(a_a)^k_{\text{Newt}} = (\widetilde{m}_P)^{lm}_a \Pi^{lm}_{,j},$$
$$\Pi^{lm} = \sum_{b\neq a}(\widetilde{m}_A)^{mq}_b \hat{n}^q_{ab}\hat{n}^l_{ab} r_{ab}^{1}, \tag{6.2.28}$$

式中

$$(\widetilde{m}_I)^{jk}_a = m_a\{\delta^{jk}[1+(\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1)\Omega_a/m_a]+ (\alpha_2-\zeta_1+\zeta_2)\Omega^{jk}_a/m_a\},$$
$$(\widetilde{m}_P)^{lm}_a = m_a\{\delta^{lm}[1+(4\beta-\gamma-3-3\zeta)\Omega_a/m_a]- \zeta\Omega^{lm}_a/m_a\},$$
$$(\widetilde{m}_A)^{mq}_b = m_b\Big\{\delta^{mq}\Big[1+\Big(4\beta-\gamma-3-3\zeta-\frac{1}{2}\alpha_3- \frac{1}{2}\zeta_1-2\zeta_2\Big)\Omega_b/m_b+\zeta_3 E_v/mb- \Big(\frac{3}{2}\alpha_3+\zeta_1-3\zeta_4\Big)P_b/m_b\Big]- \Big(\zeta-\frac{1}{2}\zeta_1\Big)\Omega^{mq}_b/m_b\Big\}. \tag{6.2.29}$$

在牛顿引力理论中、动引力质量、被动引力质量和惯性质量是相同的. 所以，每个物体的加速度与其质量的种类或结构无关. 但是由式(6.2.29)可以发现，在给定的引力度规理论中，并不要求被动引力质量等于惯性质量；其差别取决于几个PPN参数和物体的引力自能(Ω和Ω^{jk}). 在引力的弱等效原理中，这一点是不成

立的，并被称为 Nordtvedt 效应 Dicke 首先注意到这种效应的可能性；我们在[45]中讨论了这一效应及其可观测的结果. 它的存在并不违背 Eötvös 实验.

由式(6.2.29)可知，被动物体的主动引力质量可以和惯性质量、被动引力质量不同. 在牛顿引力理论中，孤立体系的质量中心的匀速直线运动是"作用与反作用"定律的结果，即"主动引力质量等于被动引力质量"定律的结果. 在 PPN 形式中，我们仍然采用这样的牛顿语言来描述准牛顿加速度. 前面我们已经指出，质量中心的匀速直线运动是完全守恒引力理论的一种性质，该理论的参数满足

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=0. \tag{6.2.30}$$

把这些值代入式(6.2.29)，我们得到，对于完全守恒引力理论，惯性质量等于 m_a，主动引力质量张量和被动引力质量张量相等：

$$(\widetilde{m}_P)_a^{jk}=(\widetilde{m}_A)_a^{jk}=m_a\{\delta^{jk}[1+(4\beta-\gamma-3-3\zeta)\Omega_a/m_a]-\zeta\Omega_a^{jk}/m_a\}. \tag{6.2.31}$$

类似地有

$$(a_a^j)_{\text{Newt}}=-\sum_{b\neq a}m_b\left\{\left[1+(4\beta-\gamma-3-3\xi)\left(\frac{\Omega_a}{m_a}+\frac{\Omega_b}{m_b}\right)\right]\frac{x_{ab}^j}{r_{ab}^3}+\xi\left(\frac{\Omega_a^{kl}}{m_a}+\frac{\Omega_b^{kl}}{m_b}\right)\left(\frac{2\delta^{j(k}x_{ab}^{l)}}{r_{ab}^3}-\frac{3x_{ab}^j\hat{n}_{ab}^k\hat{n}_{ab}^l}{r_{ab}^3}\right)\right\}. \tag{6.2.32}$$

显然，大括号中的项关于 a，b 反对称，所以作用等于反作用. 在广义相对论中，式(6.2.29)中的质量张量是各向同性的，且等于惯性质量，即

$$\widetilde{m}_I=\widetilde{m}_P=\widetilde{m}_A=\widetilde{m}_a. \tag{6.2.33}$$

于是，在广义相对论中不存在 Nordtvedt 效应. 在标量-张量引力理论中，由于

$$\widetilde{m}_I=m_a,$$

$$\widetilde{m}_P=\widetilde{m}_A=m_a\{1+[(2+\omega)^{-1}+4\Lambda]\Omega_a/m_a\}. \tag{6.2.34}$$

所以一般地存在 Nordtvedt 效应. 对于大多数实际情况，可以设

方程中的物体是球对称的，从而用 $\Omega_a^{jk}\approx\frac{1}{3}\delta^{jk}\Omega_a$ 来简化质量张量，我们有

$$
\begin{aligned}
(a_a)^j_{\mathrm{Newt}} &= m_a^{-1}(m_p)_a U_{,j},\\
U &= \sum_{b\neq a}(m_A)_b/r_{ab},
\end{aligned}
\tag{6.2.35}
$$

式中[已把$(\tilde{m}_I^{jk})^{-1}$和 $\tilde{m}_P^{lm}$ 放入 m_p 中]

$$
\begin{aligned}
(m_p)_a/m_a &= 1+\Big(4\beta-\gamma-3-\frac{10}{3}\xi-\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\\
&\quad \frac{2}{3}\zeta_1-\frac{1}{3}\zeta_2\Big)\Omega_a/m_a,\\
(m_A)_b/m_b &= 1+\Big(4\beta-\gamma-3-\frac{10}{3}\xi-\frac{1}{2}\alpha_3-\frac{1}{3}\zeta_1-2\zeta_2\Big)\cdot\\
&\quad \Omega_b/m_b+\zeta_3E_b/m_b-\Big(\frac{3}{2}\alpha_3+\zeta_1-3\zeta_4\Big)P_b/m_b.
\end{aligned}
\tag{6.2.36}
$$

式(6.2.16)中的$(a_a)_{\mathrm{nbody}}$称为 n 体项. 它含有对牛顿运动方程的后牛顿修正，也考虑了由物体本身引力场产生的一些后牛顿项. 这里所说的“质点”牛顿运动方程是把每个物体作为沿所有其他物体产生的 PPN 度规的短程线运动的质点.

§6.3 引力常数的局部测定

本节我们导出一些方程，它们虽然不是真正的运动方程，但却是 PPN 形式的基本结果. 前面我们已指出，一些引力的度规理论可以预言 Nordtvedt 效应，而这些效应代表了强等效原理的偏离. 局部引力实验中优越参考系的存在和优越位置的存在也代表了强等效原理的偏离. 卡文狄希(Cavendish)实验就是这样的局部引力实验. 在一组理想的卡文狄希实验中，人们测量作为两物体质量和距离的函数的相对加速度. 距离和时间是用静止于实验室中的标准尺和原子钟进行测量的. 引力常数 G 与两个物体的牛顿引力定律中出现的值相等. 这个量称为局部测定的引力常数 G_L.

这个实验过程的分析如下：一个质量为 m_1 的物体(作为源)

在时空中自由下落；另一个质量可忽略的试验物体通过该空间，在四维加速度的作用下使其与源保持着固定的距离 r_p. 两质量的连线相对于渐近平直的惯性空间没有旋转. 一个不变的径向单位矢 E_r 从试验物体指向源. 这样，根据牛顿引力定律，试验粒子四维加速度的径向分量为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r\equiv -G_L m_1/r_p^2, \tag{6.3.1}$$

式中 r_p 小于外部引力场的非均匀性尺度. 由于上式左端是不变的，所以可在一个适当的PPN坐标系中计算出来，然后代入上式求得 G_L. 在源是瞬时静止的PPN坐标系中进行计算最为简单. 我们希望 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r$ 含有对(6.3.1)的修正(后牛顿精度)，修正形式为

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r:\frac{m_1}{r_p^2}\frac{m_1}{r_p},\ \frac{m_1}{r_p^2}\frac{m_a}{r_{1a}},\ \frac{m_1}{r_p}\frac{m_a}{r_{1a}^2},\ \frac{m_1}{r_p^2}(w_1^2), \tag{6.3.2}$$

式中 $r_{1a}=|x_1-x_a|$. 在得到这个形式时，我们忽略了 r_p 处外部引力势的变化，这种变化产生形式为

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r)_{\text{tidal}}:\frac{m_a}{r_{1a}^3}r_p \tag{6.3.3}$$

的牛顿潮汐力和对这一力的后牛顿修正. 式(6.3.2)中的第一项代表关于试验物体和源的二体运动的修正，第三项代表由外引力场梯度引起的效应；为了决定 G_L 值，如果使 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r$ 按 r_p^{-2} 变化，这一项不产生影响(在大多数情况下可以忽略不计). 在整个分析过程中，都去掉了这第一项和第三项.

我们用 W_1 表示场源相对于宇宙静止参考系的速度，用脚标 $a=0$ 标定试验物体；用 $a=1$ 标定场源，其余物体用 $a=2,3,\cdots$ 标定. 初始时刻场源和试验物体都是静止的，即

$$v_1(t=0)=v_0(t=0)=0.$$

把场源产生的牛顿引力势和系统中其他物体产生的引力势区分开：

$$U(X)=U_1(r_1)+\sum_{a\neq 1}m_a/r_a, \tag{6.3.4}$$

式中 $r_1=|X-X_1|$、$r_a=|X-X_a|$，并设 U_1 是球对称的. 场源和试验物体之间的固有距离为

$$r_p = \int_0^1 [1 + \gamma U(X(\lambda)) + O(4)] |\mathrm{d}X/\mathrm{d}\lambda| \mathrm{d}\lambda. \tag{6.3.5}$$

为了足够精确，我们可以选择直的坐标线

$$X(\lambda) = X_0(1-\lambda) + X_1\lambda, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{6.3.6}$$

连接这两点. 于是有

$$r_p = r_{01}\int_0^1 \left\{1 + \gamma U_1[(1-\lambda)r_{01}] + \gamma \sum_{a\neq 1} \frac{m_a}{|X(\lambda) - X_a|}\right\} \mathrm{d}\lambda. \tag{6.3.7}$$

忽略 r_{01} 外部引力势的变化，得到

$$r_p = r_{01}\left(1 + \gamma \sum_{a\neq 1} \frac{m_a}{r_{1a}}\right) + \gamma \int_0^{r01} U_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \tag{6.3.8}$$

在四维加速度作用下 r_p 保持为常数，因此有

$$\mathrm{d}r_p/\mathrm{d}t \equiv \mathrm{d}^2 r_p/\mathrm{d}t^2 \equiv 0, \tag{6.3.9}$$

$$\frac{X_{10}}{r_{10}} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 0, \tag{6.3.10}$$

式中用到了 $t=0$ 处 $v_1 = v_0 = 0$，并忽略了外部引力势的时间导数. 由分析可知，可以去掉(6.3.8)中的最后一项，并把 r_{01} 的系数当作常数. 这样

$$r_p = r_{01}\left(1 + \gamma \sum_{a\neq 1} \frac{m_a}{r_{1a}}\right). \tag{6.3.11}$$

假设源沿着短程线运动，试验粒子的四维加速度为 $\boldsymbol{A}$，则有

$$u^v_{\text{source}} u^\mu_{\text{source};v} = 0,$$

$$u^v_{\text{test}} u^\mu_{\text{test};v} = A^\mu, \quad u^\mu_{\text{test}} A_\mu = 0. \tag{6.3.12}$$

在 PPN 坐标中，$t=0$ 时，式(6.3.2)可写为

$$\frac{\mathrm{d}v_1^j}{\mathrm{d}t} + \Gamma^j_{00}(X_1) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}v_0^j}{\mathrm{d}t} + \Gamma^j_{00}(X_0) = \left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 A^j,$$

$$A^0 = 0, \tag{6.3.13}$$

对于试验物体，

$$\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 1 - 2U_1(X_2) - 2\sum_{a\neq 1} m_a/r_{1a} + O(4), \tag{6.3.14}$$

这里在用 X_1 代替 X_0 的计算中，又忽略了外部势的变化. 对于外部的点质量，代入

$$\rho = \rho^* \left(1 - \frac{1}{2}v^2 - 3\gamma U\right), \int_a \rho^* \mathrm{d}^3x = m_a,$$

利用 PPN 克里斯托菲符号和牛顿运动方程来简化任一后牛顿项，仅保留上面讨论的项(也保留潮汐力). 把(6.3.13)代入(6.3.10)，得到

$$\frac{A \cdot X_{10}}{r_{10}} = \sum_{a\neq 1} \frac{m_a r_{10} \hat{e}^j \hat{e}^k (3\hat{n}^j_{1a}\hat{n}^k_{1a} - \delta^{jk})}{r^3_{1a}} -$$
$$\frac{X_{10}}{r_{10}} \cdot \nabla U_1^*(X_0)\Big[1 - (4\beta + 2\gamma - 3 - 3\xi - \zeta_2)$$
$$\sum_{a\neq 1} \frac{m_a}{r_{1a}} - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w_1^2\Big] +$$
$$\frac{X_{10}}{r_{10}} \cdot \nabla U_1^{*kl}(X_0)\left[\frac{1}{2}\alpha_2 w_1^k w_1^l - \xi \sum_{a\neq 1} \frac{m_a \hat{n}^k_{1a}\hat{n}^l_{1a}}{r_{1a}}\right],$$

(6.3.15)

式中 $\hat{e} = X_{10}/r_{10}$, $\hat{n}_{1a} = X_{1a}/r_{1a}$,

$$U_1^*(X_0) = \int_1 \frac{\rho^*(X', t)\mathrm{d}^3x'}{|X_0 - X'|},$$

$$U_1^{*jk}(X_0) = \int_1 \frac{\rho^*(X', t)(x_0 - x')^j (x_0 - x')^k \mathrm{d}^3x'}{|X_0 - X'|^3}.$$

(6.3.16)

对于球对称源，可以直接证明

$$\nabla_j U_1^*(x_0) = m_1 x^j_{10}/r^3_{10} + O(6),$$
$$\nabla_j U_1^{*kl}(x_0) = (m_1/r^3_{10})(3x^j_{10}\hat{e}^k\hat{e}^l - 2x^{(k}_{10}\delta^{l)j}) -$$
$$(I_1/r^5_{10})(5x^j_{10}\hat{e}^k\hat{e}^l - 2x^{(k}_{10}\delta^{l)j} - x^j_{10}\delta^{kl}) + O(4), \quad (6.3.17)$$

式中 m_1 和 I_1 是源的静止质量和球惯性矩，定义为

$$m_1 = \int_1 \rho^* \mathrm{d}^3x, \; I_1 = \int_1 \rho^* r^2 \mathrm{d}^3x. \quad (6.3.18)$$

现在计算不变的径向单位 4 矢量 $\boldsymbol{E}_r$. 在 $\boldsymbol{X}_0$ 处，其分量就是连接两物体的曲线切矢量的分量，

$$E^j_r = \alpha \mathrm{d}x^j(\lambda)/\mathrm{d}\lambda = -\alpha x^j_{01}, \; E^0_r = 0. \quad (6.3.19)$$

式中的 α 由

$$E_{rv}E_r^v \equiv 1 = \alpha^2|X_{01}|^2\left(1 + 2\gamma\sum_{a\neq 1}\frac{m_a}{r_{1a}}\right) \tag{6.3.20}$$

得到，这里我们仅保留了必要的项. 于是有

$$E_r^l = -\frac{x_{01}^l}{r_{01}}\left(1 - \gamma\sum_{a\neq 1}\frac{m_a}{r_{1a}}\right). \tag{6.3.21}$$

由此得到不变 4 加速度的径向分量

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r = A\cdot\frac{x_{10}}{r_{10}}\left(1+\gamma\sum_{a\neq 1}\frac{m_a}{r_{1a}}\right). \tag{6.3.22}$$

最后的结果是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}_r = &\sum_{a\neq 1}m_a r_{10}[3(n_{1a}\cdot e)^2 - 1]r_{1a}^{-3} - \\ &\frac{m_1}{r_p^2}\Big\{1 - (4\beta - \gamma - 3 - 3\xi - \zeta_2)\sum_{a\neq 1}\frac{m_a}{r_{1a}} - \\ &\frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)w_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_2(w_1\cdot\hat{e})^2 + \\ &\xi\sum_{a\neq 1}\frac{m_a}{r_{1a}}(\hat{n}_{1a}\cdot\hat{e})^2 + \\ &\frac{I_1}{m_1 r_p^2}(3\hat{e}^k\hat{e}^l - \delta^{kl})\left[\frac{1}{2}\alpha_2 w_1^k w_1^l - \xi\sum_{a\neq 1}\frac{m_a}{r_{1a}}\hat{n}_{1a}^k\hat{n}_{1a}^l\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{6.3.23}$$

式中第一项是牛顿潮汐加速度；由第二项可以得到局部引力常数：

$$\begin{aligned}G_L = 1 - &\left[4\beta - \gamma - 3 - \zeta_2 - \xi\left(3 + \frac{I_1}{m_1 r_p^2}\right)\right]U_{ext} - \\ &\frac{1}{2}\left[\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2\left(1 - \frac{I_1}{m_1 r_p^2}\right)\right]w_1^2 - \\ &\frac{1}{2}\alpha_2\left(1 - \frac{3I_1}{m_1 r_p^2}\right)(w_1\cdot\hat{e})^2 + \xi\left(1 - \frac{3I_1}{m_1 r_p^2}\right)U_{ext}^{jk}\hat{e}^j\hat{e}^k,\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

式中 $$U_{ext}^{jk} \equiv \sum_{a\neq 1}m_a\hat{n}_{1a}^j\hat{n}_{1a}^k/r_{1a},\ U_{ext} \equiv U_{ext}^{jj}. \tag{6.3.25}$$

这里，我们由局部卡文狄希实验中的优越参考系或优越位置效应，看到了一个强等效原理可能被偏离的例子. 优越参考系效应决定于场源相对于宇宙静止参考系的速度 w_1，只要 PPN 优越

参考系参数 α_1，α_2 和 α_3 不为零，就存在这个效应. 优越位置效应取决于邻近物体的引力势 U_{ext} 和 U_{ext}^{jk}，只要 PPN 参数不满足

$$\xi \equiv (4\beta - \gamma - 3 - \zeta_2) \equiv 0,$$

就存在这个效应. 下一节，我们将对半守恒引力理论的特殊情况，建立能量守恒公式，它可以给出局部洛仑兹偏离和卡文狄希实验中的位置不变性，以及引力弱等效原理偏离之间的直接联系.

应注意，在广义相对论中，

$$G_L \equiv 1. \tag{6.3.26}$$

§6.4　N 体的拉格朗日函数，能量守恒及强等效原理

前两节已指出，一些引力度规理论可以预言关于引力实验的 GWEP 偏离，LLI 偏离和 LPI 偏离. 在具有能量动量守恒的半守恒引力理论中，可导出这些偏离之间的直接联系. 方法是以准牛顿形式给出一个复合系统的能量守恒表达式，由此得到惯性质量和被动引力质量的变化 δm_I^{ij} 和 δm_P^{ij}. 上述三种偏离都取决于质量张量的变化.

这些偏离产生的原因是只考虑半守恒引力理论（因此 $\alpha_3 \equiv \zeta_2 \equiv \zeta_3 \equiv \zeta_4 \equiv 0$）和把系统中物体当做了质点，然后由共同的引力场中的质点组构造一个复合体，并且选取了一个相对宇宙静止参考系静止的 PPN 坐标系. 这样，物体的运动方程包含了牛顿加速度和后牛顿 n 体加速度，式(6.2.19)中 $W=0$，且含有半守恒参数

$$a_a^j = -\sum_{b\neq a} \frac{m_b x_{ab}^j}{r_{ab}^3}\Big[1-(2\gamma+2\beta)\frac{m_b}{r_{ab}}-$$

$$\left(2\gamma+2\beta+1+\frac{1}{2}\alpha_1\right)\frac{m_a}{r_{ab}}-(2\beta-1-2\xi)\sum_{c\neq ab}\frac{m_c}{r_{bc}}-$$

$$(2\gamma+2\beta-2\xi)\sum_{c\neq ab}\frac{m_c}{r_{ac}}+\frac{1}{2}(1+2\xi+\alpha_2)\sum_{c\neq ab}\frac{m_c X_{ab}\cdot X_{bc}}{r_{bc}^3}$$

$$+$$

$$\xi\sum_{c\neq ab}\frac{m_c X_{bc}\cdot X_{ac}}{r_{ac}^3}+\gamma v_a^2-\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)v_a\cdot$$

$$v_b+\frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_2)v_b^2-\frac{3}{2}(1+\alpha_2)(v_b\cdot\hat{n}_{ab})^2\Big]-$$

$$\frac{1}{2}(4\gamma+3-2\zeta+\alpha_1-\alpha_2)\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}}\sum_{c\neq ab}\frac{m_c x_{bc}^j}{r_{bc}^3}-$$

$$\xi\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}(\delta_{jk}-3\hat{n}_{ab}^j\hat{n}_{ab}^k)\sum_{c\neq ba}m_c\left(\frac{x_{ac}^k}{r_{ac}}-\frac{x_{bc}^k}{r_{bc}}\right)+$$

$$\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}X_{ab}\cdot[(2\gamma+2)v_a-(2\gamma+1)v_b]v_a^j-$$

$$\frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{r_{ab}^3}X_{ab}\cdot[(4\gamma+4+\alpha_1)v_a-(4\gamma+2+$$

$$\alpha_1-2\alpha_2)v_b]v_b^j. \tag{6.4.1}$$

对作用量

$$I_{\text{nbody}}\equiv\int L\mathrm{d}t, \tag{6.4.2}$$

$$L=-\sum_a m_a\left(1-\frac{1}{2}v_a^2-\frac{1}{8}v_a^4\right)+\frac{1}{2}\sum_{\substack{ab\\a\neq b}}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}$$

$$\Big[1+(2\gamma+1)v_a^2-(2\beta-1)\sum_{c\neq a}\frac{m_c}{r_{ac}}-$$

$$\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2)v_a\cdot v_b-$$

$$\frac{1}{2}(1+\alpha_2)(\hat{v}_a\cdot\hat{n}_{ab})(\hat{v})_b\cdot\hat{n}_{ab})-$$

$$\xi\frac{x_{ab}}{r_{ab}^2}\cdot\sum_{c\neq ab}m_c\left(\frac{x_{bc}}{r_{ac}}-\frac{x_{ac}}{r_{bc}}\right)\Big]. \tag{6.4.3}$$

取关于第 q 个粒子轨迹的变分，便可直接导出这些运动方程.

考虑由一个质量 m_0 的物体和多个质量为 m_a 构成的复合物体组成的系统. 设 $m_0\gg\sum_a m_a$，m_0 静止于原点，和复合物体相距 $|\boldsymbol{X}|$(x 大于复合体的尺度). 由于 m_0 很大，可认为是静止的，从而为复合体提供了一个外部场(忽略物体与外部非均匀的耦合). 在 L 中作变量代换：

$$X\equiv m^{-1}\sum_a m_a x_a,\quad m\equiv\sum_a m_a,$$

$$\bar{x}_a\equiv x_a-X, \tag{6.4.4}$$

我们还已知

$$\bar{v}_a = \mathrm{d}\bar{x}_a/\mathrm{d}t,\ V = \mathrm{d}X/\mathrm{d}t. \tag{6.4.5}$$

用标准方法由 L 得到哈米顿：

$$P^j \equiv \partial L/\partial V^j,\ p_a^j \equiv \partial L/\partial \bar{v}_a^j,$$

$$H \equiv P^j V^j + \sum_a p_a^j \bar{v}_a^j - L. \tag{6.4.6}$$

计算结果为

$$\begin{aligned} H = {} & m + \frac{P^2}{2m} - \frac{mm_0}{R} + \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{1}{2}\sum_{ab}\frac{m_a m_b}{\bar{r}_{ab}} - \\ & \left(1 - 2\beta + \frac{3}{2}\xi\right)\frac{m_0}{R}\sum_{ab}\frac{m_a m_b}{\bar{r}_{ab}} - \frac{1}{2}\xi\frac{m_0}{R}\sum_{ab}\frac{m_a m_b}{\bar{r}_{ab}} \\ & (\hat{n}_{ab}\cdot\hat{n})^2 + \frac{1}{4}(1 + \alpha_1 - \alpha_2)\frac{P^2}{m^2}\sum_{ab}\frac{m_a m_b}{\bar{r}_{ab}} + \\ & \frac{1}{4}(1 + \alpha_2)\sum_{ab}\frac{m_a m_b}{m^2 \bar{r}_{ab}}(\hat{n}_{ab}\cdot P)^2 - \frac{1}{2}(2\gamma + 1) \\ & \frac{m_0}{R}\sum_a\frac{p_a^2}{m_a} - \frac{1}{4m^2}\sum_a\frac{1}{m_a}[p_a^2 P^2 + 2(p_a\cdot P)^2] - \\ & \frac{1}{2m}\sum_a\frac{1}{m_a^2}p_a^2 P\cdot p_a + \frac{1}{2}(1 + \alpha_1 - \alpha_2)\frac{1}{m}\sum_{ab}\frac{m_b}{\bar{r}_{ab}} \\ & (P\cdot p_a) + \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)\frac{1}{m}\sum_{ab}\frac{m_b}{\bar{r}_{ab}}(\hat{n}_{ab}\cdot P)(\hat{n}_{ab}\cdot p_a) + \\ & O(p^4) + O(P^4), \end{aligned} \tag{6.4.7}$$

式中　　$R = |X|,\ \hat{n} = X/R,\ \hat{n}_{ab} = \bar{x}_{ab}/\bar{r}_{ab}.$

我们忽略了与惯性运动和复合系统质心运动无耦合的后牛顿项 $O(p^4)$ 和 $O(P^4)$. 在复合系统内部运动的时间尺度上对 H 求平均，并利用维里定理.

$$\left\langle \sum_a m_a^{-1} p_a^i p_a^j \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\sum_{ab} m_a m_b \bar{x}_{ab}^i \bar{x}_{ab}^j r_{ab}^{-3} + mO(4) \right\rangle. \tag{6.4.8}$$

尽管上式中的后牛顿项取决于 $\boldsymbol{P}$ 或 $\boldsymbol{X}$，但是这种依赖性并不影响 H 的形式. 最后的平均哈米顿用 $V = \partial\langle H\rangle/\partial P$ 的项表出. 对于守恒的能量函数，结果为

$$E_c = M + \frac{1}{2}\{M\delta^{ij} + [(\alpha_1 - \alpha_2)\Omega\delta^{ij} + \alpha_2\Omega^{ij}]\}V^iV^j -$$
$$\{M\delta^{ij} + [(4\beta - \gamma - 3 - 3\xi)\Omega\delta^{ij} - \xi\Omega^{ij}]\}m_0\hat{n}^i\hat{n}^j/R, \tag{6.4.9}$$

式中 $$M \equiv m + \left\langle \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} - \frac{1}{2}\sum_{ab}\frac{m_a m_b}{\bar{r}_{ab}} \right\rangle,$$

$$\Omega^{ij} \equiv \left\langle -\frac{1}{2}\sum_{ab}\frac{m_a m_b \hat{n}_{ab}^i \hat{n}_{ab}^j}{\bar{r}_{ab}} \right\rangle. \tag{6.4.10}$$

由以上结果可以得到质量张量的变化

$$\delta m_I^{ij} = (\alpha_1 - \alpha_2)\Omega\delta^{ij} + \alpha_2\Omega^{ij},$$
$$\delta m_P^{ij} = (4\beta - \gamma - 3 - 3\xi)\Omega\delta^{ij} - \xi\Omega^{ij}. \tag{6.4.11}$$

从而得到

$$\delta a^k = M^{-1}[(4\beta - \gamma - 3 - 3\xi)\Omega\delta^{ij} - \xi\Omega^{ij}]$$
$$(\partial/\partial X^k)(m_0\hat{n}^i\hat{n}^j/R) +$$
$$M^{-1}[(\alpha_1 - \alpha_2)\Omega\delta^{kj} + \alpha_2\Omega^{kj}]m_0 x^j/R^3. \tag{6.4.12}$$

如果代人 PPN 参量的半守恒值，并注意孤立分布的点质量产生的势

$$\text{П}^{lm} = m_0 n^l n^m/R, \tag{6.4.13}$$

则(6.4.12)和式(6.2.25)、(6.2.28)、(6.2.29)以及 a^k_{Newt} 中的弱等效原理偏离项完全一致.

为了确定复合物体内部结构对质心运动的影响，我们令其结构不变而考查 H 对 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的依赖性. 现在，为了研究物体运动对它内部结构的影响，从而得到 G_L 的表示式，必须固定质心运动 $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{X})$，而着重考查 H 与 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 的关系. 利用(6.4.8)简化 H 中的后牛顿项，得到守恒的能量函数

$$E_c = M + \frac{1}{2}\{M\delta^{ij} - [(\alpha_1 - \alpha_2)\Omega\delta^{ij} + \alpha_2\Omega^{ij}]\}P^iP^j/M^2 -$$
$$\{M\delta^{ij} + [(4\beta - \gamma - 3 - 3\xi)\Omega\delta^{ij} - \xi\Omega^{ij}]\}m_0\hat{n}^i\hat{n}^j/R. \tag{6.4.14}$$

式中的 M 和 Ω^{ij} 由式(6.4.10)给出；方括号中的量是(6.4.11)定义的 δm_I^{ij} 和 δm_P^{ij}，但是 δm_I^{ij} 的符号与(6.4.9)中的相反.

为了简单，在局部卡文狄希实验中，设复合物体是由两个点质量构成的. 这时，用以上给出的 E_t 可直接证明，两个物体之间的有效力为

$$F = -(\nabla E_t)_{p,\ x\ \text{fixed}}, \tag{6.4.15}$$

于是有效局部引力常数是

$$G_L = r_{12}^2 F \cdot \hat{e}/m_1 m_2 =$$

$$1 - \frac{1}{2}[(\alpha_1 - \alpha_2)\delta^{ij} + \alpha_2 e^i \hat{e}^j] p^i p^j / M^2 -$$

$$[(4\beta - \gamma - 3 - 3\xi)\delta^{ij} - \xi \hat{e}^i \hat{e}^j] m_0 \hat{n}^i \hat{n}^j / R, \tag{6.4.16}$$

式中　$\hat{e} = x_{12}/r_{12}$，$\Omega^{ij} = -m_1 m_2 \hat{e}^i \hat{e}^j / r_{12}$.

在式(6.3.24)中代入

$$P/M \equiv w_1,\ m_0 \hat{n}^i \hat{n}^j / R \equiv U_{\text{ext}}^{ij},\ I_1 = 0,$$

便得到(6.4.16). 对于半守恒引力理论的情况，我们又一次得到了 GWEP 偏离和 LLI、LPI 偏离之间的联系.

§6.5　旋转物体的运动方程

把旋转物体(陀螺，行星，基本粒子)在弯曲空间中的运动作为专门课题进行研究已有多年历史了. 这类研究的目的在于发现：

(i)一个物体的固有角动量是怎样改变其轨迹的(偏离短程线运动)；

(ii)在弯曲时空中物体的运动是怎样改变其自旋的.

除了近似解和在特殊时空中的解以外，第一个问题至今未得到严格的解. 困难在于弯曲时空中旋转物体的质心没有严格定义. Mathisson 等人取得了最成功的解. 这些计算的结论是，一个物体的固有自旋 $S^{\mu\nu}$ 对短程线引起的偏离为

$$m\delta a^{\mu} \sim S^{\nu\lambda} \mu^{\tau} R^{\mu}_{\nu\tau\lambda}. \tag{6.5.1}$$

式中 u^{τ} 是物体的 4 速度，$R^{\mu}_{\nu\tau\lambda}$ 是黎曼曲率张量. 但是这些计算还未详尽. 对于在牛顿引力势 $U \sim M/r$ 中以速度 v 运动的旋转物体，这些偏离的量级为

$$\delta a \sim (|S^{jk}|/m)|V|(M/r^3) \sim (b^2\lambda/r)(M/r)^{1/2} a_{\text{Newt}}, \tag{6.5.2}$$

式中 b 为物体半径，λ 为旋转角速度. 对于以接近分裂速度($\lambda^2 \sim m/b^2$)旋转的行星，我们有

$$\delta a \lesssim (m/b)^{1/2}(M/r)^{1/2}(b/r)a_{\text{Newt}} \lesssim 10^{-12} a_{\text{Newt}}. \tag{6.5.3}$$

一个绕地球运行的半径为 4cm 的陀螺(频率为 200rps)，则有

$$\delta a \lesssim 10^{-20} a_{\text{Newt}}. \tag{6.5.4}$$

因此，在绝大多数情况下，太阳系中自旋引起的短程线偏离可以忽略不计. 在重质量物体运动方程的偏离中，我们忽略了潮汐力的作用，因此运动方程(6.2.16)中没有包含自旋效应.

即使迅速旋转的中子星，如 $b \sim 10\text{km}$，$\lambda \sim 10^2\text{Hz}$，$m \sim 1m_\odot$，$r \sim 10^6\text{km}$，

$$\delta a \lesssim 10^{-10} a_{\text{Newt}}, \tag{6.5.5}$$

自旋的影响仍可忽略不计.

对于问题(ii)中的物体运动对自旋的影响，人们已了解得很多. 只要作用在旋转物体上的潮汐引力可以忽略，自旋 $\boldsymbol{s}$ 就沿该物体的世界线作 Fermi-Walker 移动. 4-矢量 $\boldsymbol{s}$ 具有分量

$$S^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda\tau}u_\nu S_{\lambda\tau}, \quad u^\mu S_\mu = 0. \tag{6.5.6}$$

这样，*F-W* 移动方程为

$$u^\nu S^\mu_{;\nu} = u^\mu (a^\nu S_\nu). \tag{6.5.7}$$

式中的 a^μ 是该物体的 4-加速度，具有形式

$$a^\mu = u^\nu u^\mu_{;\nu}. \tag{6.5.8}$$

在瞬时随动局部洛仑兹系中分析(6.5.7)很方便. 这个坐标系中的基矢量与 PPN 坐标系中基矢量的关系由洛仑兹变换加上归一化得到，

$$e^\mu_{\hat{0}} = u^\mu,$$
$$e^0_{\hat{j}} = v_j + O(3),$$
$$e^k_{\hat{j}} = (1-\gamma U)\delta^k_j + \frac{1}{2}v_j v_k + O(4), \tag{6.5.9}$$

式中所有量都假设沿物体的世界线求得. 这样，根据式(6.5.6)，

自旋就是在这个坐标系中的纯空间矢量，即

$$S_{\hat{0}} \equiv e_{\hat{0}}^{\mu} S_{\mu} = u^{\mu} S_{\mu} = 0. \tag{6.5.10}$$

现在我们求自旋 $S_{\hat{j}}$ 的空间分量的进动. 由于 $e_{\hat{j}}^{\mu} u_{\mu} = 0$，由(6.5.7)得到

$$0 = e_{\hat{j}}^{\mu} u^{\nu} S_{\mu;\nu} = u^{\nu} S_{\hat{j};\nu} - S_{\mu} u^{\nu} e_{\hat{j};\nu}^{\mu}, \tag{6.5.11}$$

又由于 $S_{\hat{j}}$ 是标量，于是有

$$u^{\nu} S_{\hat{j};\nu} = u^{\nu} S_{\hat{j},\nu} = \mathrm{d}S_{\hat{j}}/\mathrm{d}\tau. \tag{6.5.12}$$

式(6.5.11)的右端第二项很容易在 PPN 坐标系中求得. 首先，利用(6.5.9)得到 S_{μ} 和 $S_{\hat{\mu}}$ 之间的关系：

$$S_{0} = -v_{j} S_{\hat{j}} + O(3) S_{\hat{j}},$$

$$S_{j} = S_{\hat{j}} + O(2) S_{\hat{j}}. \tag{6.5.13}$$

作某些简化之后，精确到后牛顿量级，得到

$$\mathrm{d}S_{\hat{j}}/\mathrm{d}\tau = S_{\hat{k}} [v_{[j} a_{k]} + g_{0[k,j]} - (2_{p}+1) v_{[j} U_{,k]}]. \tag{6.5.14}$$

用了维矢量符号，上式可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}/\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{S},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} - \frac{1}{2} \nabla \times \boldsymbol{g} + \left(\gamma + \frac{1}{2}\right) \boldsymbol{v} \times \nabla U,$$

$$\boldsymbol{g} = g_{0j} \boldsymbol{e}_{j}. \tag{6.5.15}$$

在上式中，我们没有指出 $\boldsymbol{\Omega}$ 中的矢量是 PPN 坐标系或随动系中的量，这是因为它们空间分量的差别仅为 $O(2)$. 我们计算了自旋相对于随动坐标系的进动，而随动系绕 PPN 坐标系转动，PPN 坐标轴相对于远距星系静止.



经典实验

有了 PPN 形式和运动方程，就可以把广义相对论的理论预言和太阳系中的实验结果进行比较[37]．本章着重讨论广义相对论的 3 个经典实验，即(i)光线的引力偏转；(ii)光传播时间的延迟；(iii)水星近日点的进动．

“经典实验”这一术语不再只含有传统的内容．按照传统的观点，经典实验只包括引力红移，光线偏转和水星近日点的进动．这些都是爱因斯坦算出的广义相对论可观测效应．后面我们将看到，引力红移实际上不是广义相对论的实验，而是关于广义相对论和每个引力度规理论的基础——爱因斯坦等效原理的实验．因此，每个引力度规理论都预言了相同的红移．它只能验证等效原理，不能验证引力理论的核心——引力场方程．由于这个原因，一些学者认为不应再把红移作为经典实验．但是可以用一个重要的实验——光的时间延迟代替它．正如所预料的，由于在麦克斯威方程中光线弯曲的物理机制都可以产生这种延迟，所以，光的时间延迟效应与光线偏转效应密切相关．事实上，这正是爱因斯坦没有发现这个效应的原因．这个效应是 Shapiro 发现的．最简单的解释是，Shapiro 已经了解了 60 年代和 70 年代的空间技术，使在预料的精度下(对于传到火星的信号为 200μs)，延迟的测量可以实现．而爱因斯坦在当时还不知道这些事实，他只知道水星近日点每世纪进动量为 43 秒和测量太阳光线偏转的可能性．总之，爱因斯坦导出的引力红移，是当时实验勉强能进行测量的，其他一些广义相对论效应方面的工作(如 Lense，Thirring 和 de Sitter 等)在当时还没有能测量的条件．后来人们

才认识到，"经典实验"中应包括时间延迟效应，因为它是至今最精确的广义相对论实验之一.

本章首先讨论光线的引力偏转，然后讨论时间延迟，最后讨论水星近日点的进动.

§7.1 光线的引力偏转

利用 PPN 光子运动方程(6.1.10)和(6.1.11)，可以直接得到光线偏转的表达式. 考虑当 PPN 坐标为 t_e 时，在 $\boldsymbol{x}_e$ 处发射一光信号，其初始方向用单位矢 $\hat{n}$ 表示($\hat{n}\cdot\hat{n}=1$). 考虑到后牛顿修正 $\boldsymbol{x}_p$，光子轨迹为

$$x^0(t)=t,$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_e-\hat{\boldsymbol{n}}(t-t_e)+\boldsymbol{x}_p(t), \tag{7.1.1}$$

式中已经用到了边界条件 $\boldsymbol{x}_p(t_e)=0$. 把 $\boldsymbol{x}_p$ 分解为未受扰动的轨道的平行和垂直的分量：

$$x_p(t)_{\parallel}=\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}_p(t),$$

$$\boldsymbol{x}_p(t)_{\perp}=\boldsymbol{x}_p(t)-\hat{\boldsymbol{n}}[\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{x}_p(t)]. \tag{7.1.2}$$

式(6.1.10)和(6.1.11)导致

$$\frac{\mathrm{d}x_{p\parallel}}{\mathrm{d}t}=-(1+\gamma)U, \tag{7.1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^j_{p\perp}}{\mathrm{d}t^2}=(1+\gamma)[U_{,j}-\hat{n}^j(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\nabla U)]. \tag{7.1.4}$$

为了简单，我们设牛顿引力势 U 是由原点处质量为 m 的静态球产生的，即

$$U=m/r. \tag{7.1.5}$$

沿着未受扰动的光子轨迹，U 为

$$U=\frac{m}{r(t)}=\frac{m}{|\boldsymbol{x}_e+\hat{\boldsymbol{n}}(t-t_e)|}. \tag{7.1.6}$$

精确到后牛顿量级，利用方程(7.1.6)，可以沿着未受扰动的光子轨迹积分(7.1.4)，结果为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}_p(t)_{-}=-(1+\gamma)\frac{m\boldsymbol{d}}{d^2}\left(\frac{\boldsymbol{x}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r(t)}-\frac{\boldsymbol{X}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right), \quad (7.1.7)$$

式中 $\boldsymbol{d}\equiv\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{X}_e\times\hat{\boldsymbol{n}})$ (7.1.8)

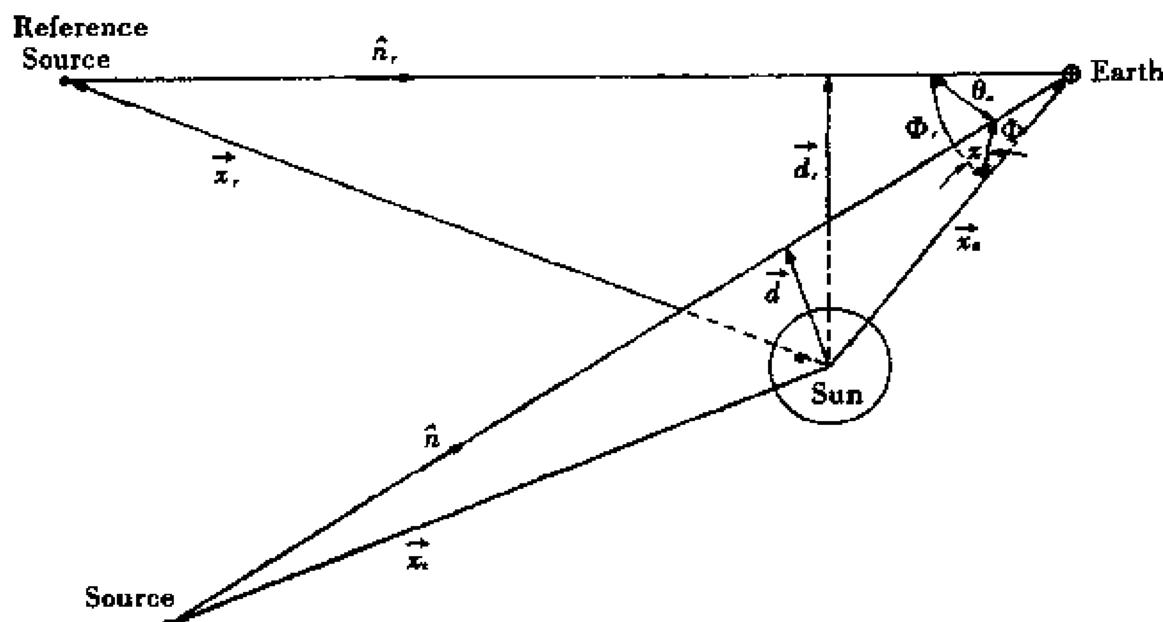


图 2-6

是连接物体中心和最接近的未受扰动光线上的点的矢量(如图 2-6). 式(7.1.7)表示光子轨道方向的变化指向太阳(沿$-\boldsymbol{d}$方向). 于是得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{X}_p(t)=-(1+\gamma)U\hat{\boldsymbol{n}}-(1+\gamma)\frac{m\boldsymbol{d}}{d^2}\left(\frac{\boldsymbol{x}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r(t)}-\frac{\boldsymbol{x}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right). \quad (7.1.9)$$

考虑地球上的观测者接收到从源发出的光子和从位置 $\boldsymbol{x}_r$ 的参考源发出的光子. 两个光子入射线之间的夹角 θ 是可测定的量, 并可给出不变的数学表达式. 利用投影算子

$$P_\mu^v\equiv\delta_\mu^v+u_\mu u_v, \quad (7.1.10)$$

把两个入射光子的轨迹 $x^\mu(t)$ 和 $x_r^\mu(t)$ 的切矢量 $k^\mu\equiv\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ 和 $k_{(r)}^\mu\equiv\mathrm{d}x_r^\mu/\mathrm{d}t$ 投影到与观测者 4-速度 u^μ 正交的超曲面上. 得到的二矢量的内积与 θ 的关系是

$$\cos\theta\equiv\frac{\kappa^\lambda P_\lambda^\mu\kappa_{(r)}^v p_{v\mu}}{|\kappa^\lambda P_\lambda^\mu|\,|\kappa_{(r)}^v P_{v\mu}|}=1+\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_{(r)}}{(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k})(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}_{(r)})}. \quad (7.1.11)$$

如果忽略只产生光程差的地球速度，上式简化为

$$\cos\theta = 1-(g_{00})^{-1}g_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}_{(r)}. \tag{7.1.12}$$

将(7.1.1)和(7.1.9)代入(7.1.12)，精确到后牛顿量级，得到

$$\cos\theta = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_r-(1+\gamma)\left\{\frac{m}{d}\left(\frac{\boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r}{d}\right)\left(\frac{\boldsymbol{x}_{\oplus}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_{\oplus}}-\frac{\boldsymbol{x}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right)+\frac{m}{d_r}\left(\frac{\boldsymbol{d}_r\cdot\boldsymbol{n}}{d_r}\right)\left(\frac{\boldsymbol{x}_{\oplus}\cdot\boldsymbol{n}_r}{r_{\oplus}}-\frac{\boldsymbol{x}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r}{r_r}\right)\right\}, \tag{7.1.13}$$

式中 $\boldsymbol{d}_r\equiv\hat{\boldsymbol{n}}_r\times(\boldsymbol{x}_r\times\hat{\boldsymbol{n}}_r)$. (7.1.14)

在(7.1.13)中，为了满足后牛顿精度，记住下式是很有用的：

$$\boldsymbol{d}=\hat{\boldsymbol{n}}\times(\boldsymbol{x}_{\oplus}\times\boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{d}_r=\hat{\boldsymbol{n}}_r\times(\boldsymbol{x}_{\oplus}\times\hat{\boldsymbol{n}}_r). \tag{7.1.15}$$

我们定义 θ_0 是未受扰动轨道之间的夹角，即

$$\cos\theta_0\equiv\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r, \tag{7.1.16}$$

又定义测量得到的角度与 θ_0 的偏差为

$$\delta\theta\equiv\theta-\theta_0. \tag{7.1.17}$$

下面讨论两种情况：第一种是导出简单公式的理想情况. 假设太阳本身为参考源，于是 $d_r=0$，式(7.1.13)大括号中第二项为零，

$$\boldsymbol{d}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r/d=\sin\theta_0, \tag{7.1.18}$$

$$\delta\theta=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{2m}{d}\left(\frac{\boldsymbol{x}_{\oplus}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_{\oplus}}-\frac{\boldsymbol{x}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e}\right). \tag{7.1.19}$$

对于从遥远恒星和星系发出的光子，

$$r_e\gg r_{\oplus},\ \boldsymbol{x}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}/r_e\simeq-1, \tag{7.1.20}$$

而且具有足够的精度，

$$\boldsymbol{x}_{\oplus}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}/r_{\oplus}\simeq\hat{\boldsymbol{n}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=\cos\theta_0, \tag{7.1.21}$$

于是有 $\delta_\theta=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\frac{4m}{d}\left(\frac{1+\cos\theta_0}{2}\right)$. (7.1.22)

对于广义相对论，$\gamma=1$，这与 Shapiro(1967)和 Wald(1970)得到的结果一致.

有趣的是，仅用等效原理和光的微观理论得到的光线偏转在(7.1.22)中$(4m/d)(1+\cos\theta_0)/2$ 项前出现系数 1/2. 这并不表明这种计算不正确. 就我们讨论的情况来说，这些计算的结果是光线相对于局部直线的偏离；而太阳附近的时空是弯曲的(由 PPN 参数 γ 决定)，局部直线相对于远离太阳的渐近直线是弯曲的，

恰好又产生$(\gamma/2)$的因子. 第一个 1/2 的因子包含于任意度规理论，第二个$(\gamma/2)$的因子则因不同的引力理论不同. 因此，仅用等效原理给出全部偏离的计算是不正确的.

掠过太阳的光线偏转值最大，即当 $\theta_0\approx 0$，$d\approx R_\odot\approx 6.96\times 10^5\mathrm{km}$，$m=m_\odot=1.476\mathrm{km}$. 在这种情况下，

$$\delta\theta_{\max}=\frac{1}{2}(1+\gamma)1.75''. \tag{7.1.23}$$

我们要讨论的第二种情况与用射电波干涉技术来测量光线偏离的实际方法有密切的联系. 选择一个接近观测源的参考源. 如果定义 Φ 和 Φ_r 是地球-太阳方向和从两个源发出的光线之间的夹角(如图 2-6 所示)，则有

$$\cos\Phi=\boldsymbol{x}_\oplus\cdot\hat{\boldsymbol{n}}/r_\oplus,\ \cos\Phi_r=\boldsymbol{x}_\oplus\cdot\hat{\boldsymbol{n}}_r/r_\oplus. \tag{7.1.24}$$

又假设两个源相距很远，则有

$$\delta\theta=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\left[\frac{4m}{d}\left(\frac{\cos\Phi_r-\cos\Phi\cos\theta_0}{\sin\Phi\sin\theta_0}\right)\left(\frac{1+\cos\Phi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{4m}{d_r}\left(\frac{\cos\Phi_r\cos\theta_0-\cos\Phi}{\sin\Phi_r\sin\theta_0}\right)\left(\frac{1+\cos\Phi_r}{2}\right)\right]. \tag{7.1.25}$$

如果观测源的方向非常接近太阳，而参考源仍保持较大的角度，从而有 $\Phi\ll\Phi_r$，于是

$$\theta_0\simeq\Phi_r-\Phi\cos\chi+O(\Phi^2/\Phi_r). \tag{7.1.26}$$

式中 χ 是投影到天空平面的太阳-源和太阳-参考源方向之间的夹角. 得到的偏转角为

$$\delta\theta=\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\left[-\frac{4m}{d}\cos\chi+\frac{4m}{d_r}\left(\frac{1+\cos\Phi_r}{2}\right)\right]. \tag{7.1.27}$$

这个结果相当清楚地表明，两个源之间夹角如何随着它们之一掠过太阳的光线而改变($d\sim R_\odot$，$d_r\gg d$，χ 为变量).

光线被太阳引力场弯曲是爱因斯坦广义相对论最成功的预言之一. 第一次世界大战后的第一次日全食期间，为了证明爱因斯坦的预言，Eddington 等观测了星光的弯曲. 不过这一小组的实验只有 30%的准确度，而相继的实验精度并未提高多少，结果在理论预言值的 1/2 和 2 倍之间摆动. 1973 年 6 月 30 日的日全食

期间的实验观测值为

$$\frac{1}{2}(1+\gamma)=0.95\pm0.11. \qquad (7.1.28)$$

观测的精度受能见度的限制(如由日食前的尘爆，云层等引起). 能见度低则大大减少了可测量的星的数目. 此外，还有日食和比较场方位刻度的变化. 现在的光电和天文测量技术已经可以在不出现日食时进行测量.

长基线射电干涉的发展改变了这种情况. 长基线和超长基线干涉技术，可以测定 3×10^{-4}弧秒的分开角度或角度变化. 与此相关的还有一系列天体现象：每年都有许多强类星体射电源从很接近太阳(从地球上看)处通过，其中包括 3C273，3C279 和 3C48，以及类星体 0111+02，0119+11 和 0116+08. 每一个类星体的方位角决定一个射电干涉仪的相位. 相位的差别决定一对类星体之间分开的角度. 由于地球在绕太阳的轨道上运动，类星体视线的变化与太阳有关. $\delta\theta$ 的变化也导致相位差的变化. 利用关于地球和类星体初始方向的精确星历表，可以确定(7.1.25)中 d，d_r，Φ 和 Φ_r 的时间变量，而得到的相位差是时间函数的预言，又是测定最小类星体相位差的基础. 近年来的大量测量给出了 $\frac{1}{2}(1+\gamma)$的准确值. 实验观测结果和广义相对论的预言一致.

§7.2 光信号传播时间的延迟

光信号在重质量物体的引力场中传播、所需要的时间(对于一给定的距离)，比牛顿理论预言的要长. 由式(7.1.3)可以容易地得到这个时间延迟的表达式. 利用(7.1.6)，积分得到

$$x_p(t) = -(1+\gamma)m\ln\left[\frac{r(t)+\boldsymbol{x}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e+\boldsymbol{x}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}\right]. \qquad (7.2.1)$$

由(7.1.1)，从发射点到点 $\boldsymbol{x}$，光信号花费的坐标时为

$$t-t_e=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_e|+(1+\gamma)m\ln\left[\frac{r(t)+\boldsymbol{x}(t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r_e+\boldsymbol{x}_e\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}\right]. \qquad (7.2.2)$$

一信号由地球发出，经 $\boldsymbol{x}_p$ 处的行星反射再回到地球，整个过程所需坐标时为

$$\Delta t = 2|x_{\oplus} - x_p| + 2(1+\gamma)m\ln\left[\frac{(r_{\oplus} + \boldsymbol{x}_{\oplus}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(r_p - \boldsymbol{x}_p\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{d^2}\right]. \quad (7.2.3)$$

式中 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 是返回时光的方向．这里忽略了地球运动和行星运动的影响．为完全起见，所需时间应该用固有时间表示，即由地球上的标准钟(如铯原子钟)测定．这样做并没引进新的效应，因此我们不需要这样做．由式(7.2.3)第二项产生的附加延迟 δt，当行星在远离地球的太阳另一侧时最大，即当

$$\boldsymbol{x}_{\oplus}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \simeq r_{\oplus},\ \boldsymbol{x}_p\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \simeq -r_p,\ d \simeq R_{\odot} \quad (7.2.4)$$

时
$$\delta t = 2(1+\gamma)m\ln(4r_{\oplus}r_p/d^2) = \frac{1}{2}(1+\gamma)\left[240\mu s - 20\mu s\ln\left(\frac{d}{R_{\odot}}\right)^2\left(\frac{a}{r_p}\right)\right]. \quad (7.2.5)$$

式中 $R_{\odot}$ 是太阳半径，a 是天文单位．

在用雷达信号所做的实验观测中，曾用三种反射体．第一种是行星(如水星和金星)．主要的困难之一是对行星的地形不了解，地形的变化会引起 5μs 的误差．为了克服这一困难，人们已进行了一些努力．

第二种反射体是人造卫星(如水手 6 号和 7 号)，反射体的形状已不成问题，而飞船上的脉冲转发器可以做到精确确定飞船的位置．但是飞船要受到多种原因引起的不规则加速力的作用，包括由太阳风和太阳辐射压引起的不规则加速度，以及飞行姿态控制器的力的作用．这些不规则的加速度会使飞船轨迹与预定轨迹有 50m(或 0.1μs)的误差，人们已经用范围数据分析方法来消除这种影响(Anderson，1974)．

第三种是试图把宇宙飞船的脉冲发射器与不受扰动的行星运动结合起来作为反射体．如火星轨道上的水手 9 号和海盗号．

在所有这些情况中，同用无线电波反射进行测量一样，存在日冕引起测量的误差，可以用双频率技术减少这些误差．

从光线偏转和时间延迟实验，得到$\frac{1}{2}(1+\gamma)$的误差都在0.2%之内.《引力理论和引力效应》中给出的大多数引力理论，可以利用调整适当的参数值或宇宙边界条件来满足这种限制. 例如，为了误差在0.1%之内，标量度规理论的参量$\omega>500$；而要在0.2%之内，则$\omega>250$.

§7.3 水星近日点的进动

对水星近日点不规则进动的解释是广义相对论的另一重大成就. 而在1967年到1974年之间，由于出现了可引起进动的太阳四极矩，引起了近日点进动是证实了还是否定了广义相对论的争论. 尽管这些争论已减少，但太阳四极矩问题仍需有最后的答案.

从PPN运动方程，可得到对近日点进动的预言. 考虑惯性质量为m_1和m_2，自引力能为Ω_1和Ω_2的两个系统. 第一个物体具有很小的四极矩Q^{ij}. 假设整个系统相对于宇宙静止参考系是静止的($\omega=0$)，且在系统附近没有其他引力物体. 我们取系统质量中心静止于原点的PPN坐标系.

由于每个物体近似为球体，$\Omega_a^{jk}\simeq\frac{1}{3}\delta^{jk}\Omega_a$，根据(6.2.16)得到每个物体的加速度

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1=&(m_p/m_1)(\nabla U)_1-\frac{m_2\boldsymbol{x}}{r^3}\Big[(2\gamma+2\beta)\frac{m^2}{r}+\\&\left(2\gamma+2\beta+1+\frac{1}{2}\alpha_1-\zeta_2\right)\frac{m_1}{r}-\gamma v_1^2+\\&\frac{1}{2}(4\gamma+4+\alpha_1)\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2-\frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_2+\alpha_3)v_2^2+\\&\frac{3}{2}(1+\alpha_2)(\boldsymbol{v}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\Big]-\frac{m^2\boldsymbol{x}}{r^3}\cdot[(2\gamma+2)\boldsymbol{v}_1-\\&(2\gamma+1)\boldsymbol{v}_2]\boldsymbol{v}_1+\frac{1}{2}\frac{m_2\boldsymbol{x}}{r^3}\cdot[(4\gamma+4+\alpha_1)\boldsymbol{v}_1-\end{aligned}$$

$$(4\gamma+2+\alpha_1-2\alpha_2)\boldsymbol{v}_2]\boldsymbol{v}_2,$$

$$\boldsymbol{a}_2=\{1\leftrightarrow 2;\ \boldsymbol{x}\to-\boldsymbol{x}\}. \tag{7.3.1}$$

式中 $\boldsymbol{x}\equiv x_{21}$，$\hat{\boldsymbol{n}}\equiv\boldsymbol{x}/r$. 考虑到由物体 1 产生的准牛顿势中的四极矩的 Newton 贡献，我们得到

$$(U_{,j})_1=(m_A)_2\frac{x^j}{r^3},$$

$$(U_{,j})_2=-(m_A)_1\frac{x^j}{r^3}-\frac{1}{2}\frac{Q_1^{kl}}{r^4}(5\hat{n}^k\hat{n}^l\hat{n}^j-2\delta^{jk}\hat{n}^l). \tag{7.3.2}$$

式中$(m_A)_1$ 和$(m_A)_2$ 是由式(6.2.36)给出的主动引力质量. 一个对 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 方向具有轴对称的物体，可证 Q_1^{jk} 的形式是

$$Q_1^{jk}=m_1R_1^2J_{2(1)}(\delta^{jk}-3\hat{e}^j\hat{e}^k). \tag{7.3.3}$$

式中 J_2 是四极矩的大小，其定义为

$$J_2=(C-A)/mR^2. \tag{7.3.4}$$

式中　　$C=$[关于对称轴的惯性矩]，

$A=$[关于赤道轴的惯性矩]，

$R=$[半径]. (7.3.5)

由于系统的质量中心是静止的，对(7.3.1)的后牛顿项取足够的精度，我们可用

$$\boldsymbol{v}_1=-(m_2/m)\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}_2=(m_1/m)\boldsymbol{v} \tag{7.3.6}$$

代替 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_2$. 式中

$$\boldsymbol{v}\equiv\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1,\ m\equiv m_1+m_2, \tag{7.3.7}$$

定义折合质量

$$\mu=m_1m_2/m, \tag{7.3.8}$$

于是，相对加速度 $a_1-a_2\equiv a$ 为

$$\boldsymbol{a}=-\frac{m^*\boldsymbol{x}}{r^3}+\frac{1}{2}\frac{m_1R_1^2J_{2(1)}}{r^4}[15(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\hat{\boldsymbol{n}}-6(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\hat{\boldsymbol{e}}-3\hat{\boldsymbol{n}}]+\frac{m\boldsymbol{x}}{r^3}\Big[(2\gamma+2\beta)\frac{m}{r}-\gamma v^2+(2+\alpha_1-2\zeta_2)\frac{\mu}{r}-\frac{1}{2}(6+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{\mu}{m}v^2+\frac{3}{2}(1+\alpha_2)\frac{\mu}{m}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\Big]+\frac{m(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{r^3}\Big[(2\gamma+2)-\frac{\mu}{m}(2-\alpha_1+\alpha_2)\Big]. \tag{7.3.9}$$

式中 $m^* \equiv (m_p/m)_2(m_A)_1+(m_p/m)_1(m_A)_2=$

$$m(1+[\text{物体 1 和 2 的自能项}]). \tag{7.3.10}$$

上式中出现的自能项对于太阳至多为$\sim 10^{-5}$，并且是一常量．所以 m^* 与 m 的差别是不可测量的，可把(7.3.9)中的(*)去掉.

考虑具有下述瞬时轨道参量的行星轨道：与选定的参考平面的交角为 i，从参考平面中选定的参考方向到上交点的角为 Ω，在轨道平面中测得的近日点的角度为 ω，偏心率为 e，半主轴为 a. 第 6 个参量 T 是由初始条件决定的，对我们的讨论无关紧要．对于太阳系，参考平面选为地球轨道平面，而参考方向是春分点的地-日方向.

利用标准的方法计算轨道参量的扰动，把加速度 a[式(7.3.9)]分解为与轨道平面正交的径向分量 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{W}$，以及与 $\mathscr{R}$ 和 $\mathscr{W}$ 垂直的分量 $\mathscr{S}$，并利用下列公式计算轨道参数的变化率：

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-\frac{p\mathscr{R}}{he}\cos\phi+\frac{\mathscr{S}(p+r)}{he}\sin\phi-\frac{\mathscr{W}r}{h}\cot i\sin(\omega+\phi), \tag{7.3.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\frac{1-e^2}{h}\left[a\mathscr{R}\sin\phi+\frac{\mathscr{S}}{e}\left(\frac{ap}{r}-r\right)\right], \tag{7.3.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}=\frac{2a^2}{h}\left(\frac{\mathscr{S}p}{r}+\mathscr{R}e\sin\phi\right), \tag{7.3.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathscr{W}r}{h}\cos(\omega+\phi), \tag{7.3.14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathscr{W}r\sin(\omega+\phi)}{h\sin i}, \tag{7.3.15}$$

式中 h 是单位质量的轨道角动量，p 的定义为

$$p=a(1-e^2). \tag{7.3.16}$$

r 和 ϕ 与瞬时轨道参量的关系为

$$r\equiv p(1+e\cos\phi)^{-1},$$

$$r^2\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t\equiv h\equiv(mp)^{1/2}. \tag{7.3.17}$$

由于行星的观察是在地心坐标中做出的，测得的近日点 $\tilde{\omega}$ 由下式给出：

$$\tilde{\omega}=\omega+\Omega\cos i. \tag{7.3.18}$$

$\tilde{\omega}$ 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\omega}}{\mathrm{d}t}=-\frac{p\mathscr{R}}{he}\cos\phi+\frac{\mathscr{S}(p+r)}{he}\sin\phi, \tag{7.3.19}$$

式中利用了对所有的行星 ι 都很小这一事实，故 $\sin\iota\ll1$. 对于式(7.3.9)的扰动加速度，

$$\begin{aligned}\mathscr{R}=&\frac{3}{2}\frac{mR^2J_2}{r^2}[3(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2-1]+\\&\frac{m}{r^2}\Big[(2\gamma+2\beta)\frac{m}{r}-\gamma v^2+(2\gamma+2)(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2+\\&(2+\alpha_1-2\zeta_2)\frac{\mu}{r}-\frac{1}{2}(6+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\frac{\mu}{m}v^2-\\&\frac{1}{2}(1-2\alpha_1-\alpha_2)\frac{\mu}{m}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^2\Big],\\\mathscr{S}=&-3(mR^2J_2/r^4)(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}})+\\&\frac{m}{r^2}(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}})\Big[(2\gamma+2)-\frac{\mu}{m}(2-\alpha_1+\alpha_2)\Big],\end{aligned} \tag{7.3.20}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ 是在轨道平面中沿轨道运动方向的单位矢量，与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 正交. 对于水星轨道，太阳的对称轴与轨道平面正交，所以 $\hat{\boldsymbol{e}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}=0$. 把式(7.3.20)代入(7.3.19)，利用式(7.3.17)，沿轨道积分，得到

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{\omega}=&(6\pi m/p)\Big[\frac{1}{3}(2+2\gamma-\beta)+\\&\frac{1}{6}(2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3+2\zeta_2)\mu/m+J_2(R^2/2mp)\Big].\end{aligned} \tag{7.3.21}$$

这是由(7.3.9)中后牛顿项产生的唯一的轨道参数的长期扰动. 可证明四极矩项产生的 ι 和 Ω 的变化分别与 $\sin\theta$ 和 $\sin\theta/\sin\iota$ 成正比，式中 θ 是太阳的对称轴或旋转轴对黄道的倾角($\theta\approx7°$). 在这些扰动作用下，a 和 e 没有长期的变化.

式(7.3.21)中的第一项是依赖于 PPN 参数 γ 和 β 的经典近日点进动. 第二项依赖于两物体质量的比，在完全守恒的引力理论中为零；由于 $\mu/m\sim m_☿/m_\odot\sim2\times10^{-7}$，所以对于水星可忽略

这一项. 从现在起，我们去掉这一项. 第三项依赖于太阳四极矩 J_2，它是由扁平结构产生的，估计 J_2 为 $\sim 1\times 10^{-7}$. 用这个值作为 J_2 的值，并代入水星和太阳的标准轨道参数和物理常数，得到近日点的进动

$$\dot{\tilde{\omega}}=42''.95\lambda_p c^{-1},$$

$$\lambda_p \equiv \left[\frac{1}{3}(2+2\gamma-\beta)+3\times 10^{-4}(J_2/10^{-7})\right]. \qquad (7.3.22)$$

在关于水星的雷达测距分析中，假设 J_2 具有与匀速旋转有关的值(λ_p 的影响已忽略)，且估计了耦合的 PPN 参数值. 结果是

$$\frac{1}{3}(2+2\gamma-\beta)=\begin{cases}1.005\pm 0.020(1966\sim1971\text{ 数据}),\\ 1.003\pm 0.005(1966\sim1976\text{ 数据}).\end{cases}$$

(7.3.23)

式中引用的误差是相对误差的 1σ 值(考虑了系统误差)，Dike 和 Goldenberg 在 1966 年做了一系列实验，测量了太阳的扁率，得到极半径与赤道半径之差为 $\Delta R=(43''.3\pm 3''.3)\times 10^{-3}$. 考虑到由扁平结构引起的太阳表面的扁率，得到扁率与 J_2 的关系为：

$$J_2=\frac{2}{3}(\Delta R/R_\odot-5.3\times 10^{-6}). \qquad (7.3.24)$$

它给出($R_\odot=959''$)

$$J_2=(247\pm 0.23)\times 10^{-5}. \qquad (7.3.25)$$

这样大的 J_2 值，引起水星近日点的进动大约为 $4''C^{-1}$，从而使广义相对论的理论值与观测值不一致；而另一方面又支持了 $\omega\approx 5$ 的 Brans-Dicke 理论，它对近日点进动的后牛顿贡献为每世纪 39″.

这个结果曾经引起了相对论和太阳物理学界的激烈争论，写出了大量的文章，支持和反对太阳扁平的论点.

直到 Hill 小组测得太阳扁平率为

$$\Delta R=(9''.2\pm 6''.2)\times 10^{-3}$$

或
$$J_2=0.10\pm 0.43\times 10^{-5}, \qquad (7.3.26)$$

其上限比 Dicke 值小 5 倍后，这种争论才停止.

得到太阳扁率的结果与 J_2 的关系的主要困难之一是必须使用大量的复杂的太阳物理理论. 然而，存在着决定 J_2 的方法，在离太阳不同距离上探测太阳引力场，从而通过它们对不同径向的依赖性来区别 J_2 效应与广义相对论引力效应. 一种方法是比较不同行星的进动. 另一种方法是考虑水星轨道的偏心率($e\sim 0.2$)，并寻找由 J_2 和广义相对论引力引起的不同周期的轨道扰动. 这样测量所需的精度要求飞船在绕水星的轨道上. 最后，最有希望的是用所谓的太阳探测，它是利用近日点为 4 倍太阳半径的高偏心率的飞船，给出精度为 10^{-8}的 J_2 值.

8 强等效原理的实验

另一类太阳系的广义相对论效应实验称为强等效原理实验(SEP). 这原理指出(i)对于自引力物体以及实验物体, WEP 成立(GWEP), (ii)任何局部实验的结果(引力或非引力的)与仪器的自由下落的速度无关, (iii)局部实验的结果与它在宇宙的什么时间, 什么地点进行无关. 在《引力理论和引力效应》中我们已指出, 许多引力度规理论(也许是除 GR 以外的所有理论)在一个方面或多个方面违背强等效原理. 在第 6 章中, 利用 PPN 坐标, 给出了这些违背的证据: 对于大量的自引力物体, 运动方程中 GWEP 不成立[方程(6.2.18)和(6.2.25)]; 在局部测定引力常数 G_L[方程(6.3.24)]时用了优越参照系和优越位置效应.

§8.1 Nordtvedt 效应和 L-E 实验

本节讨论 Nordtvedt 效应和 Lunar-Eotvos 实验. 许多度规理论预言, 对于重质量的自引力物体, 弱等效原理不成立. 现在已有多种多样的观测结果. 在第 6 章中已指出, 用每个重质量物体的惯性质量和被动引力质量张量 $\widetilde{m}_I^{jk}, \widetilde{m}_p^{jk}$, 可以由准牛顿语言表示出这种"违背". 物体加速度的准牛顿部分可写为

$$(\widetilde{m}_I)_a^{jk}(a_a)^k_{\text{Newt}} = (\widetilde{m}_p)_a^{lm}U^{lm}{}_{,j}, \tag{8.1.1}$$

式中 U^{lm} 是准牛顿引力势, $(\widetilde{m}_I)_a^{jk}$ 和 $(\widetilde{m}_p)_a^{jk}$ 为

$$(\widetilde{m}_I)_a^{jk} = m_a\{\delta^{jk}[1+(\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1)\Omega_a/m_a]+$$
$$(\alpha_2-\zeta_1+\zeta_2)\Omega_a^{jk}/m_a\},$$
$$(\widetilde{m}_p)_a^{lm} = m_a\{\delta^{lm}[1+(4\beta-\gamma-3-3\zeta)\Omega_a/m_a]-$$

$$\zeta\Omega_a^{lm}/m_a\},\tag{8.1.2}$$

其中 Ω_a 和 Ω_a^{jk} 是物体的惯性引力能量和引力能量张量，m_a 是物体的总质量.

太阳系中大多数物体接近球对称，所以

$$\Omega_a^{jk}\simeq\frac{1}{3}\Omega_a\delta^{jk}.\tag{8.1.3}$$

可以预见，引起(8.1.2)中 Ω^{jk} 非各向同性的 Nordtvdt 效应小到不能测量. 用以上的近似，可把准牛顿式(8.1.1)写为

$$(a_a)^j_{\text{Newt}}=(m_p/m)_a U_{,j},\tag{8.1.4}$$

式中
$$(m_p/m)_a=1+\left(4\beta-\gamma-3-\frac{10}{3}\xi-\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\zeta_1-\frac{1}{3}\zeta_2\right)\Omega_a/m_a,$$
$$U=\sum_{b\neq a}(m_A)_b r_{ab}^{-1}.\tag{8.1.5}$$

由于月球的自引力能小于地球的，所以 Nordtvdt 效应引起地球和月球以不相同的加速度落向太阳. 考虑到它们的相互吸引，由式(8.1.4)和(8.1.5)，忽略四极矩，我们得到

$$(a_\oplus)^j=-(m_p/m)_\oplus[(m_A)_\odot X^j/R^3-(m_A)_☾ x^j/r^3],$$
$$(a_☾)^j=-(m_p/m)_☾[(m_A)_\odot X_0^j/R_0^3+(m_A)_\oplus x^j/r^3],\tag{8.1.6}$$

式中 X 和 X_0 分别表示由太阳指向地球和月球的矢量(如图 2-7(a)). 相对地-月加速度

$$\boldsymbol{a}\equiv\boldsymbol{a}_☾-\boldsymbol{a}_\oplus\tag{8.1.7}$$

由下式给出：

$$\boldsymbol{a}=-m^*\boldsymbol{x}/r^3+\eta[(\Omega/m)_\oplus-(\Omega/m)_☾]m_\odot\boldsymbol{X}/R^3+(m_p/m)_☾ m_\odot(\boldsymbol{X}/R^3-\boldsymbol{X}_0/R_0^3),\tag{8.1.8}$$

式中
$$m^*\equiv(m_A)_\oplus+(m_A)_☾+\eta[(m_A)_\oplus(\Omega/m)_☾+(m_A)_☾(\Omega/m)_\oplus],$$
$$m_\odot\equiv(m_A)_\odot,\tag{8.1.9}$$
$$\eta\equiv4\beta-\gamma-3-\frac{10}{3}\xi-\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2-\frac{2}{3}\zeta_1-\frac{1}{3}\zeta_2.$$

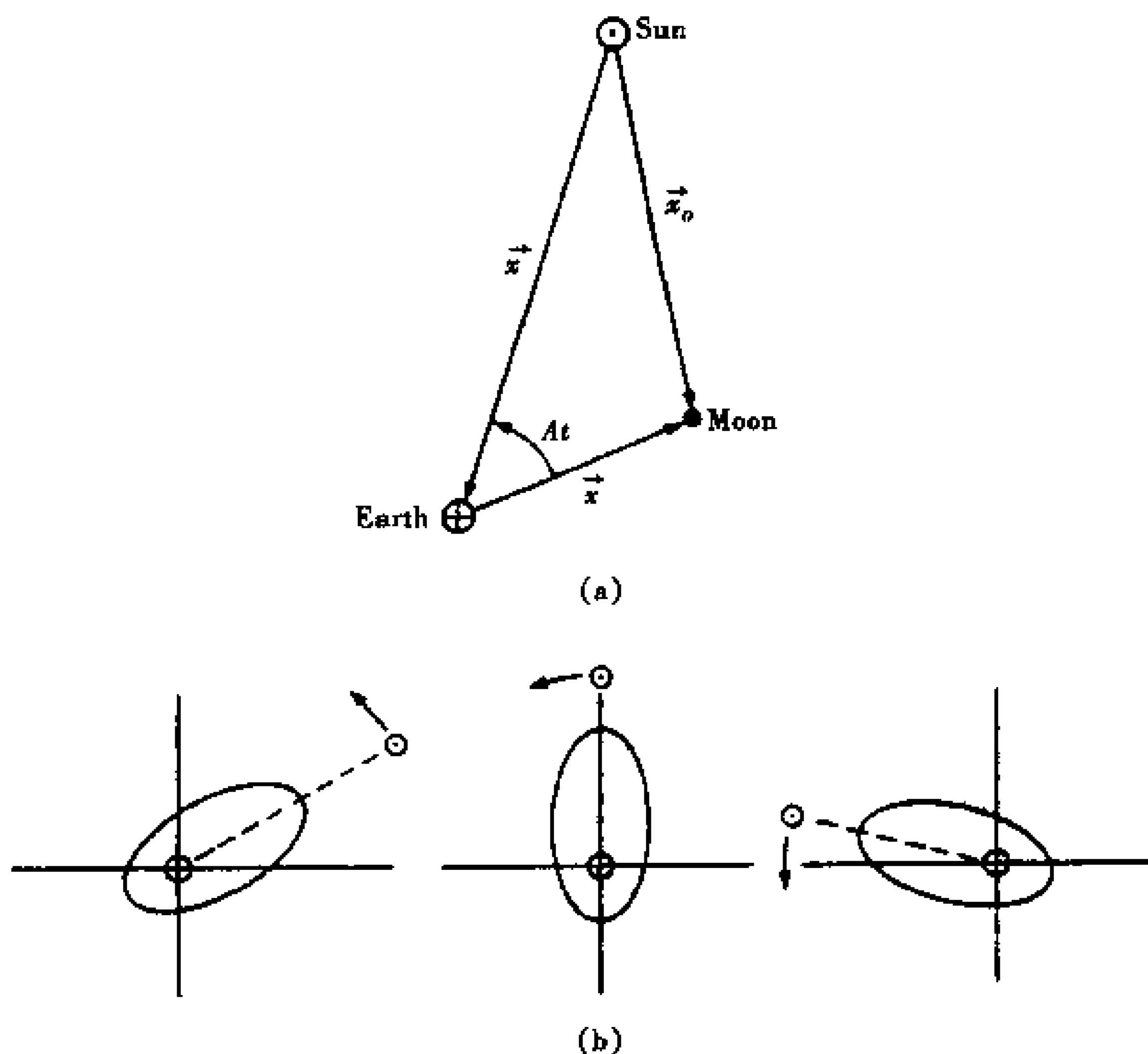


图 2-7

式(8.1.8)中第一项是地球和月球的牛顿加速度，第二项是地球和月球朝太阳的加速度之差(Nordtvedt 效应)；第三项是月球轨道的潮汐扰动，在此可不予考虑．这样，月球相对于地球的运动方程(考虑到 Nordtvedt 效应引起的扰动)为

$$\boldsymbol{a}=-m^{*}\boldsymbol{x}/r^{3}+\eta[(\Omega/m)_{\oplus}-(\Omega/m)_{☾}]m_{\odot}\boldsymbol{X}/R^{3}. \tag{8.1.10}$$

设未受扰动的月球轨道是在 x-y 平面内的角速度为 ω_0 的圆，地球绕太阳的轨道也在 x-y 平面内，是角速度为 ω_s 的圆．取以太阳为原点的惯性 PPN 坐标系加速度 a 和地-月轨道每单位质量的角动量分别是

$$\boldsymbol{a}=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2,\ \boldsymbol{h}=\boldsymbol{x}\times(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t),\tag{8.1.11}$$

且有下面的关系式成立：

$$\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a}/r+h^2/r^3,$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{h}/\mathrm{d}t=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{a}),\tag{8.1.12}$$

式中 $r=|\boldsymbol{x}|$. 因此，利用(8.1.10)和定义

$$\delta a\equiv\eta[(|\Omega|/m)_{\oplus}-(|\Omega|/m)_{\text{☾}}]m_{\odot}/R^2,\tag{8.1.13}$$

可以得到 $\mathrm{d}^2r/\mathrm{d}t^2=-m^*/r^2+h^2/r^3+\delta a\cos\Lambda t$,

$$\mathrm{d}h/\mathrm{d}t=-r\delta a\sin\Lambda t,\tag{8.1.14}$$

式中 $\cos\Lambda t\equiv-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}/r,\ \sin\Lambda t\equiv-(\hat{\boldsymbol{n}}\times\boldsymbol{x}/r)_z,\ \Lambda=\omega_0-\omega_s,$

(8.1.15)

$$\hat{\boldsymbol{n}}\equiv\boldsymbol{X}/R.$$

角度 Λt 是地-日方向和地-月方向的夹角. 对圆轨道做线性化处理：

$$r\equiv r_0+\delta r,\ h\equiv h_0+\delta h,\tag{8.1.16}$$

并利用 $m^*/r_0^3=h_0^2/r_0^4=\omega_0^2$. 将上面得到的方程积分，得到

$$\delta h=(r_0/\Lambda)\delta a\cos\Lambda t,\tag{8.1.17}$$

$$\delta r=\left(\frac{1+2\omega_0/\Lambda}{\omega_0^2-\Lambda^2}\right)\delta a\cos\Lambda t.\tag{8.1.18}$$

上式表示由太阳引力场引起的地-月系统的极化. 这一轨道极化的方向总是指向太阳的(如图 2-7(b)).

应用(8.1.13)，(8.1.18)和数据

$m_{\odot}/R^2\simeq5.9\times10^{-6}\mathrm{kms}^{-2}$, $\omega^0\simeq13.4\omega_s\simeq2.7\times10^{-6}$ s^{-1},

$(\Omega/m)_{\oplus}\simeq-4.6\times10^{-10}$, $(\Omega/m)_{\text{☾}}\simeq-0.2\times10^{-10}$,

可以得到 $\delta r\simeq8.0\eta\cos(\omega_0-\omega_s)t\ m.$ (8.1.19)

更精确的计算应考虑(8.1.8)中关于潮汐加速度项的 Nordtvedt 效应以及关于 Nordtvedt 项的潮汐扰动；这些对 δ_r 系数的修正因子约为 $1+2\omega_s/\omega_0\simeq1.15$，于是

$$\delta r\simeq9.2\eta\cos(\omega_0-\omega_s)t\ m.\tag{8.1.20}$$

§ 8.2 地球物理实验

考虑到已知的表达式,

$$G_L=1-[4\beta-\gamma-3-\zeta_2-\xi(3+I/mr^2)]U_{ext}-$$
$$\frac{1}{2}[\alpha_1-\alpha_3-\alpha_2(1-I/mr^2)]w_{\oplus}^2-$$
$$\frac{1}{2}\alpha_2(1-3I/mr^2)(w_{\oplus}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2+\xi(1-3I/mr^2)U_{ext}^{jk}\hat{\mathbf{e}}^j\hat{\mathbf{e}}^k, \tag{8.2.1}$$

式中 I, m 和 r 为地球的惯性矩,质量和半径;$\hat{\mathbf{e}}$ 是从引力计指向地心的单位矢量,并且

$$U_{ext}^{jk}=\sum_{a\neq\oplus}m_a\hat{n}_{\oplus a}^j\hat{n}_{\oplus a}^k/r_{\oplus a},\ U_{ext}=U_{ext}^{jj}. \tag{8.2.2}$$

关于式(8.2.1)的第一后牛顿项.由于地球在偏心轨道上运动,太阳产生的外部势对地球影响的改变只有 10^{-10},小得难以用地球上的引力计或卡文狄希实验发现.其他物体的时间变化效应就更小了.

下面考虑优越参考系项.地球的速度由两部分组成,即太阳系相对于优越参考系的速度和地球绕太阳的轨道速度,于是有

$$w_{\oplus}^2=w^2+2\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}+v^2,$$
$$(\mathbf{w}_{\oplus}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2=(\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2+2(\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{e}})(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}})+(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2. \tag{8.2.3}$$

由于地球旋转($\hat{\mathbf{e}}$ 变化)和轨道运动(v 变化),引力计测量 G_L 就会有变化(只保留振幅大于 $10^{-9}G_L$ 的项):

$$\Delta G_L/G_L=\left(\frac{1}{2}\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1\right)\mathbf{w}\cdot\mathbf{v}+$$
$$\frac{1}{4}\alpha_2[(\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2+2(\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{e}})(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}})+(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2], \tag{8.2.4}$$

式中所用的地球的惯性矩为

$$I\simeq mr^2/2. \tag{8.2.5}$$

最后考虑优越位置项. 由 PPN 形式的表述可知，势 U_{ext}^{ij}应包括所有局部引力物质，即包括太阳，行星，恒星，银河和星系团. 其中起主要作用的是银河($U_G\sim5\times10^{-7}$)，其次是太阳($U_\odot\sim1\times10^{-8}$)，于是

$$\Delta G_L/G_L=-\frac{1}{2}\zeta U_G(\hat{\mathbf{e}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_G)^2-\frac{1}{2}\zeta U_\odot(\hat{\mathbf{e}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_\odot)^2. \quad (8.2.6)$$

为了用引力计读数比较 G 的这些变化，应该对(8.2.4)和(8.2.6)进行调和分析. 由于 $\hat{\mathbf{e}}$ 的方向相对于 $\boldsymbol{w}$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_G$ 的固定方向在变化，所以必含有地球的旋转频率 Ω；又由于 $\boldsymbol{v}$ 的方向相对于 $\boldsymbol{w}$ 在变化，故含有轨道频率 ω，还含有这些频率的组合项. 选取黄道坐标，设地球轨道为圆，取地球的春分点处 $t=0$，则有

$$\begin{aligned}
&\hat{\mathbf{e}}_\odot=\cos\omega t\mathbf{e}_x+\sin\omega t\mathbf{e}_y,\\
&\boldsymbol{v}=v(\sin\omega t\mathbf{e}_x-\cos\omega t\mathbf{e}_y),\\
&\boldsymbol{w}\equiv w[\cos\beta_w(\cos\lambda_w\mathbf{e}_x+\sin\lambda_w\mathbf{e}_y)+\sin\beta_w\mathbf{e}_z],\\
&\hat{\mathbf{e}}_G\equiv\cos\beta_G(\cos\lambda_G\mathbf{e}_x+\sin\lambda_G\mathbf{e}_y)+\sin\beta_G\mathbf{e}_z.
\end{aligned} \quad (8.2.7)$$

后二式确定坐标(λ_w，β_w)和(λ_G，β_G). 在地球纬度为 L 处的引力计，我们有

$$\hat{\mathbf{e}}=\cos L\cos(\Omega t-\varepsilon)\mathbf{e}_x+[\cos L\sin(\Omega t-\varepsilon)\cos\theta+\sin L\sin\theta]\mathbf{e}_y-[\cos L\sin(\Omega t-\varepsilon)\sin\theta-\sin L\cos\theta]\mathbf{e}_z. \quad (8.2.8)$$

式中 ε 与引力计在地球上的经度有关，θ 是地球相对于地球轨道的倾角$\left(23\frac{1}{2}{}^\circ\right)$. (8.2.7)和(8.2.8)给出

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}=wv\cos\beta_w\sin(\omega t-\lambda_w), \quad (8.2.9)$$

$$(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2=w^2\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sin^2\delta_w\right)\left(\frac{1}{3}-\sin^2L\right)+\frac{1}{2}\sin2\delta_w\sin2L\cos(\Omega t-\varepsilon-\alpha_w)+\frac{1}{2}\cos^2\delta_w\cos^2L\cos2(\Omega t-\varepsilon-\alpha_w)\right], \quad (8.2.10)$$

$$(\boldsymbol{w}\cdot\hat{\mathbf{e}})(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\mathbf{e}})=wv\left\{\frac{1}{3}\cos\beta_w\sin(\omega t-\lambda_w)+\left(\frac{1}{3}-\sin^2L\right)\left[\frac{1}{2}\cos\beta_w\sin(\omega t-\lambda_w)+\right.\right.$$

$$\frac{3}{2}\sin\delta_w\sin\theta\cos\omega t\Big]+$$

$$\frac{1}{4}\sin\delta_w(1-\cos\theta)\sin 2L\sin[(\Omega+\omega)t-\varepsilon]-$$

$$\frac{1}{4}\cos\delta_w\sin\theta\sin 2L\cos[(\Omega+\omega)t-\varepsilon-\alpha_w]-$$

$$\frac{1}{4}\sin\delta_w(1+\cos\theta)\sin 2L\sin[(\Omega-\omega)t-\varepsilon]-$$

$$\frac{1}{4}\cos\delta_w\sin\theta\sin 2L\cos[(\Omega-\omega)t-\varepsilon-\alpha_w]+$$

$$\frac{1}{4}\cos\delta_w(1-\cos\theta)\cos^2 L\sin[(2\Omega+\omega)t-2\varepsilon-\alpha_w]-$$

$$\frac{1}{4}\cos\delta_w(1+\cos\theta)\cos^2 L\sin[(2\Omega-\omega)t-2\varepsilon-\alpha_w]\Big\},$$

(8.2.11)

$$(\boldsymbol{v}\cdot\hat{\mathbf{e}})^2=v^2\Big\{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{3}-\sin^2 L\Big)\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big)-$$

$$\frac{3}{4}\Big(\frac{1}{3}-\sin^2 L\Big)\sin^2\theta\cos 2\omega t+$$

$$\frac{1}{4}\sin 2\theta\sin 2L\sin(\Omega t-\varepsilon)-$$

$$\frac{1}{4}\sin\theta(1-\cos\theta)\sin 2L\sin[(\Omega+2\omega)t-\varepsilon]+$$

$$\frac{1}{4}\sin\theta(1+\cos\theta)\sin 2L\sin[(\Omega-2\omega)t-\varepsilon]+$$

$$\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos^2 L\cos 2(\Omega t-\varepsilon)-$$

$$\frac{1}{8}(1-\cos\theta)^2\cos^2 L\cos[2(\Omega+\omega)t-2\varepsilon]-$$

$$\frac{1}{8}(1+\cos\theta)^2\cos^2 L\cos[2(\Omega-\omega)t-2\varepsilon]\Big\},$$

(8.2.12)

$$(\hat{\mathbf{e}}_G\cdot\hat{\mathbf{e}})^2=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{3}-\sin^2\delta_G\Big)\Big(\frac{1}{3}-\sin^2 L\Big)+$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\delta_G \sin 2L\cos(\Omega t-\varepsilon-\alpha_G)+$$

$$\frac{1}{2}\cos^2\delta_G\cos^2 L\cos 2(\Omega t-\varepsilon-\alpha_G), \qquad (8.2.13)$$

$$(\hat{\mathbf{e}}_\odot\cdot\hat{\mathbf{e}})^2=\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sin^2 L\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)+$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}-\sin^2 L\right)\sin^2\theta\cos 2\omega t+$$

$$\frac{1}{4}\sin 2\theta\sin 2L\sin(\Omega t-\varepsilon)+$$

$$\frac{1}{4}\sin\theta(1-\cos\theta)\sin 2L\sin[(\Omega+2\omega)t-\varepsilon]-$$

$$\frac{1}{4}\sin\theta(1+\cos\theta)\sin 2L\sin[(\Omega-2\omega)t-\varepsilon]+$$

$$\frac{1}{4}\sin^2\theta\cos^2 L\cos 2(\Omega t-\varepsilon)+$$

$$\frac{1}{8}(1-\cos\theta)^2\cos^2 L\cos[2(\Omega+\omega)t-2\varepsilon]+$$

$$\frac{1}{8}(1+\cos\theta)^2\cos^2 L\cos[2(\Omega-\omega)t-2\varepsilon].$$

(8.2.14)

这里，为了简化，采用了黄道坐标(λ_w,β_w)，(λ_G,β_G)和赤道坐标(α_w,δ_w)，(α_G,δ_G). 这两个坐标系间的关系是

$$\sin\delta=\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta\sin\lambda,$$

$$\cos\delta\cos\alpha=\cos\beta\cos\lambda,$$

$$\cos\delta\sin\alpha=-\sin\beta\sin\theta+\cos\beta\cos\theta\sin\lambda. \qquad (8.2.15)$$

式(8.2.9～14)给出了 G_L 的四种不同类型的变化.

(1) 一天两次变化：有频率为 2Ω，$2\Omega+\omega$，$2\Omega-\omega$，$2(\Omega+\omega)$，$2(\Omega-\omega)$的变化项；即有周期近似为 12 小时($\omega\ll\Omega$)的项，而且随纬度以 $\cos^2 L$ 的规律变化. 与此相关的引力计读数的变化是

$$(\Delta g/g)_{\text{sem}}=1.16(\Delta G/G)_{\text{sem}}. \qquad (8.2.16)$$

式中因子 1.16 是由地球的结构决定的. 上式更精确的计算应考虑由于 G_L 变化引起的地球内部扰动力和 $\rho\nabla U$ 成正比，而潮汐扰

动力和到地心的距离成正比．如果 ρ 是均匀的，则 $\rho\nabla U$ 和 r 成正比，"Love 数"与牛顿潮汐情况相同．在牛顿潮汐理论中，引力计测得的"Love 数"为 1.16，对地球模型变化的灵敏度为 5%，所以对不同的扰动力并不敏感．

（2）每日变化．在频率 Ω 附近，有频率为 Ω，$\Omega+\omega$，$\Omega-\omega$，$\Omega+2\omega$，$\Omega-2\omega$ 的变化项，即有近似 24 小时周期的项，且随纬度按 $\sin 2L$ 规律变化．由此引起的引力计读数变化为

$$(\Delta g/g)_{\rm diu}=1.16(\Delta G/G)_{\rm diu}. \tag{8.2.17}$$

（3）长周期带状变化：即频率为 ω 和 2ω 的变化，与纬度的关系是 $\left(\frac{1}{3}-\sin^2 L\right)$，与太阳和月球引起的长周期潮相同，称为"长周期带状波"．这一变化引起地球动量矩的变化，从而影响地球的旋转频率：

$$(\Delta\Omega/\Omega)_{\rm zonal}=0.41A_{\rm zonal}. \tag{8.2.18}$$

式中 $A_{\rm zonal}$ 和（8.2.11）、（8.2.12）、（8.2.14）中 G 的带状变化的关系是

$$(\Delta G/G)_{\rm zonal}\equiv A_{\rm zonal}\left(\frac{1}{3}-\sin^2 L\right). \tag{8.2.19}$$

（4）长周期球状变化．即频率为 ω，但与纬度无关的变化[式(8.2.9)和(8.2.11)]．它们代表一年中 G 的变化，在牛顿潮汐理论中不存在相似的情况．这些变化引起地球形状的变形，但与产生四极矩变形的各效应（带状波等）相反．随 G 的这种变化，会引起地球惯性矩的变化，从而引起地球旋转频率的变化：

$$(\Delta\Omega/\Omega)_{\rm spher}=-(\Delta I/I)_{\rm spher}. \tag{8.2.20}$$

由于在牛顿潮汐理论中没有类似的效应，$\Delta I/I$ 和 $\Delta G/G$ 的关系没有"Love 数"．所以必须重新严格计算，来确定这个比例因子．计算结果为

$$\Delta I/I=-0.17\Delta G_L/G_L. \tag{8.2.21}$$

由理论预言和实验观测结果的比较，得到对 PPN 参量的限制，α_2 和 ζ 的上限为

$$|\alpha_2|<4\times10^{-4},\quad |\xi|<10^{-3}. \tag{8.2.22}$$

其他重要的后牛顿地球物理效应是由 G_L 的带状和球状变化引起的. 在地球旋转频率中，表现为频率(ω, 2ω)的变化. 带状变化的振幅是[见式(8.2.11)、(8.2.12)、(8.2.14)]

$$
\begin{aligned}
(\Delta G_L/G_L)_{\text{zonal}} &\sim 3\times10^{-8}\alpha_2(\text{频率 }\omega),\\
&\sim 3\times10^{-10}\alpha_2(\text{频率 }2\omega),\\
&\sim 3\times10^{-10}\xi(\text{频率 }2\omega).
\end{aligned}
\tag{8.2.23}
$$

球状变化的振幅是

$$
(\Delta G_L/G_L)_{\text{spherical}}\simeq 1.2\times10^{-7}\left[\alpha_3+\frac{2}{3}\alpha_2-\alpha_1\right]. \tag{8.2.24}
$$

由此引起地球惯性矩每日变化的振幅为

$$
|\Delta I/I|\simeq 2.0\times10^{-8}\left[\alpha_3+\frac{2}{3}\alpha_2-\alpha_1\right]. \tag{8.2.25}
$$

参 考 文 献

[1] Carmeli M. Classical Fields. New York: GR-GT, 1982, § 3.5, § 3.8

[2] Dirac P A M. General Theory of Relativity. London: Acad Pr, 1975. § 27

[3] Møller C. The Theory of Relativity. London: Camb Univ Pr, 1955. § 113

[4] Newman E T. Penrose R J. Math. Phys. 1962. 566

[5] Press WH. Teukolsky SA. AP. J, 1973, 185: 649

[6] Stephani H. General Relativity. London: Camb Univ Pr, 1982. § 18.1, § 18.4

[7] WangYongjiu (王永久), Tang Zhiming (唐智明). Scientia Sinica. 1986, 29 (A): 639

[8] Weinberg S. Gravitation and Cosmology. New Your: J W, 1972. 13

[9] 刘辽. 广义相对论. 上海: 高等教育出版社, 1987. § 1.16

[10] 王永久, 唐智明, 房思廷. 近代物理教程. 台北: 台湾亚东书局, 1989. § 1.16

[11] 王永久等. 北京科学通报, 1992 (37): 728

[12] Landau L D, Lifshitz I M. Class Field Theory. Moskow: Acad Pr, 1973

[13] Cheng Hung. Phys Rev Lett，1988 (61)：2182
[14] Jieng Jihang，Wang Yongjiu. Inter J. Theor. Phys，1996 (35)：1481
[15] 王永久，唐智明. 引力理论和引力效应. 长沙：湖南科学技术出版社，1990

第3篇 引力场和复合场方程的解及旋转引力效应

1 一些特殊形式引力场方程的解

Einstein 场方程是一组非线性偏微分方程，能给出其任何一组严格解都是很艰难的. 事实上，只有在一些特殊情况下——场源分布具有某种对称性，使方程简化，才有可能给出其严格解.

§1.1 任意变速参考系中的引力场

根据等效原理，这一参考系中存在引力场，其能-动张量 $T_{\mu\nu}=0$.

选取直角坐标系，设参考系沿 x 轴方向具有加速度 $g(t)$，参考系本身是刚性的. 不失一般性，可将所求的度规写成下面的形式[8]：

$$ds^2=w(x,t)dx^{0^2}-dx^{1^2}-dx^{2^2}-dx^{3^2}, \tag{1.1.1}$$

$$x_0=at,\ x^1=x,\ x^2=y,\ x^3=z.$$

由此得到 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 的不为零分量：

$$\Gamma_{00}^{0}=\frac{1}{2cw(x,t)}\frac{\partial w(x,t)}{\partial t},$$

$$\Gamma_{01}^{0}=\Gamma_{10}^{0}=\frac{1}{2w(x,t)}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x},\tag{1.1.2}$$

$$\Gamma_{00}^{1}=\frac{1}{2}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}.$$

由于 $T_{\mu\nu}=0$，场方程简化为 $R_{\mu\nu}=0$. 将上式代入得

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{2w(x,t)}\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2=0.\tag{1.1.3}$$

令 $w(x,t)=X(x)T(t)$代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{dx^2}T(t)-\frac{T(t)}{2X(x)}\left[\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2=0.$$

由于 $w(x,t)\neq 0$，故 $T(t)\neq 0$，故有

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{2X(x)}\left[\frac{\mathrm{d}X(x)}{\mathrm{d}x}\right]^2=0.$$

解之得　$X(x)=(A_1+B_1x)^2$.

式中 A_1 和 B_1 为积分常数. 代回 $w(x,t)=X(x)T(t)$得

$$w(x,t)=[A(t)+B(t)x]^2.\tag{1.1.4}$$

为了确定 $A(t)$和 $B(t)$，我们取 $w(x,t)$的渐近式. 当参考系的加速度 $g(t)\to 0$ 时，应有 $w(x,t)\to$常数，$B\to 0$. 因此在渐近情况下，可将 $w(x,t)$展开，略去 $B(t)$的高阶项：

$$w(x,t)=A^2(t)+2A(t)B(t)x.\tag{1.1.5}$$

另一方面，$g_{00}=w(x,t)=1+\frac{2U}{c^2}$，

在加速度 $g(t)$很小时，引力势 U 可按牛顿力学计算：

$$U=g(t)x,$$

于是　$$w(x,t)=1+\frac{g(t)x}{c^2}.\tag{1.1.6}$$

比较(1.1.5)和(1.1.6)，得到

$$A(t)=1,\ B(t)=g(t)/c^2.$$

最后得到所求的场方程的解：

$$\mathrm{d}s^2=[1+g(t)x/c^2]^2c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2.\tag{1.1.7}$$

式中 $g(t)$是参考系的加速度，可为时间 t 的任意函数.

当 $g(t)=g=$ 常数时，C. Moller 由一个纯数学的坐标变换的方法(不解引力场方程)得到了与(1.1.7)类似的度规，但没有讨论 g 是时间函数的情形. C. Moller 所采用的坐标变换是

$$
\begin{aligned}
&X=\frac{c^2}{g}\left(\operatorname{ch}\frac{gt}{c}-1\right)+x\operatorname{ch}\frac{gt}{c},\\
&Y=y,\ Z=z, \qquad\qquad (1.1.8)\\
&T=\frac{c}{g}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}+\frac{x}{c}\operatorname{sh}\frac{gt}{c}.
\end{aligned}
$$

式中 X, Y, Z, T 表示惯性系的坐标；x, y, z, t 表示匀加速系的坐标. 通过变换(1.1.8)，由惯性系的度规

$$
\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}T^2-\mathrm{d}X^2-\mathrm{d}Y^2-\mathrm{d}Z^2 \qquad (1.1.9)
$$

变换为 $\mathrm{d}s^2=c^2(1+gx/c^2)^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2 \qquad (1.1.10)$

现在，我们解引力场方场得到了度规(1.1.7)，从而可以寻找一个变换，使(1.1.9)变换为(1.1.7)，这一变换可以叫作广义 Moller 变换. 设所寻求的变换为

$$
\begin{aligned}
&X^\nu=X^\nu(x^\mu),\ \mu,\ \nu=0,\ 1,\\
&Y=y,\ Z=z.
\end{aligned}
$$

代人(1.1.7)和(1.1.9)得

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{d}x^2+c^2\left[1+\frac{g(t)x}{c^2}\right]^2\mathrm{d}t^2=\\
&\quad-\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial x(x,t)}{\partial t}\mathrm{d}t\right]^2+\\
&\quad c^2\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right]^2,
\end{aligned}
$$

从而得到方程组

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial X(x,t)}{\partial t}=c^2\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial T(x,t)}{\partial t},\\
&-\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\right]^2+c^2\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right]^2=-1, \qquad (1.1.11)\\
&-\left[\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}\right]^2+c^2\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right]^2=c^2\left[1+\frac{g(t)x}{c^2}\right]^2.
\end{aligned}
$$

解此方程组得

$$
X(x,t)=c\int_{t_0}^{t}\operatorname{sh}\left[\int_{t_0}^{t}\frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t+x\operatorname{ch}\int_{t_0}^{t}\frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t,
$$

$$T(x, t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{ch}\left[\int_{t_0}^{t} \frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t + \frac{x}{c}\mathrm{sh}\int_{t_0}^{t} \frac{g(t)}{c}\mathrm{d}t,$$

$$Y = y, Z = z. \tag{1.1.12}$$

此即所寻求的变换. 当 $g(t) = g =$ 常数时，只要适当移动一下坐标原点并调整一下坐标刻度，(1.1.12)便退化为 Moller 变换(1.1.8).

度规(1.1.7)具有相当广泛的意义. 它适用于坐标系作加速平移、振动以及更广泛形式的运动.

§1.2 史瓦希外部解

设引力质量位于坐标系原点，且具有球对称性，取球坐标，线元可写为

$$\mathrm{d}s^2 = e^{\nu}c^2\mathrm{d}t^2 - e^{\lambda}\mathrm{d}r^2 - r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.2.1}$$

对于质量外部，$T_{\mu\nu} = 0$，从而 Einstein 方程成为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0.$$

将上式乘以 $g^{\mu\nu}$缩并，得 $R = 0$. 真空 Einstein 方程为

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{1.2.2}$$

由(1.2.1)直接得到 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$的不为零分量：

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\nu}{\partial t}, \quad \Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r}, \\
&\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial\nu}{\partial r}e^{\nu-\lambda}, \quad \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}, \\
&\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial r}, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2c}\frac{\partial\lambda}{\partial t}e^{\lambda-\nu}, \\
&\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}, \\
&\Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta, \\
&\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta.
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

可以将上面诸式代入(1.2.2.)，但我们给出 $G^{\nu}_{\mu} = R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}g^{\nu}_{\mu}R$ 的表示式，以便于在其他球对称场合应用. G^{ν}_{μ} 的不为零分量为

$$G_0^0=-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}-\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2},$$

$$G_0^1=-\frac{e^{-\lambda}}{rc}\frac{\partial\lambda}{\partial t},$$

$$G_2^2=G_3^3=-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left\{\frac{\partial^2\nu}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}-\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)-\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial r}\right)\right\}+\frac{1}{2}e^{-\nu}\left\{\frac{\partial^2\lambda}{c^2\partial t^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\lambda}{c\partial t}\right)^2+\right.$$
$$\left.\frac{1}{2c^2}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\nu}{\partial t}\right\},$$

$$G_1^1=-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\nu}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}. \tag{1.2.4}$$

分别令(1.2.4)诸式等于零，得到下列独立的方程：

$$\frac{\partial\nu}{\partial r}+\frac{1}{r}-\frac{e^{\lambda}}{r}=0, \tag{1.2.5}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}-\frac{1}{r}+\frac{e^{\lambda}}{r}=0, \tag{1.2.6}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}=0. \tag{1.2.7}$$

由上式有 $\lambda=\lambda(r)$，$\frac{\partial}{\partial r}(\nu+\lambda)=0.$ (1.2.8)

根据(1.2.8)，可直接得到 Birkhoff 定理(1927). 实际上，由上式得

$$\nu=-\lambda(r)+f(t),$$

故有 $e^{\nu}=e^{f(t)}e^{-\lambda(r)}$. 代入(1.2.1)并令

$$e^{f(t)}\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}\tilde{t}^2.$$

最后去掉 $\mathrm{d}\tilde{t}$ 上的波号，便得

$$\nu=\nu(r)=-\lambda=-\lambda(r). \tag{1.2.9}$$

这就是说，**真空球对称引力场一定是静态的**. 此即 Birkhoff 定理.

将(1.2.9)代回(1.2.5)或(1.2.6)，积分得

$$e^{\nu}=e^{-\lambda}=1+\frac{K}{r}. \tag{1.2.10}$$

为了确定式中的积分常数 K，我们采用渐近平直的边界条件：当 r

$\to\infty$时，平直空间的牛顿定律成立．此时引力势应为$U=-G\frac{M}{r}$．将此式代入第二篇的(2.4.13)式：

$$g_{00}=1+\frac{2U}{c^2}=1-\frac{2GM}{c^2r},$$

由此得 $K=-\frac{2GM}{c^2}\equiv-2m$， (1.2.11)

其中$m\equiv\frac{GM}{c^2}$．于是得到球对称质量外部解(Schwarzschild外部解)：

$$ds^2=(1-2m/r)c^2dt^2-\frac{dr^2}{1-2m/r}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.2.12)$$

此解由K. Schwarzschild于1916年给出．

Schwarzschild解(1.2.12)是当宇宙因子$\lambda=0$时，在球坐标系中，真空场方程的严格解．虽然原则上曲线坐标中的量是和测量无关的，但球坐标中的φ和θ常和天文测量的量相同；r和天文坐标的差别不超过八百万分之一．度规中所含的常数M为中心物体的质量．对于太阳，$m_\odot=GM_\odot/c^2=1.4766\times10^5$cm；对于地球$m_e=GM_e/c^2=0.4438$cm．如果太阳和地球的引力场用(1.2.12)描述，则在太阳表面有$m/r=2.122\times10^{-6}$；在地球表面有$m/r=6.980\times10^{-10}$．显然，在通常情况下条件$m\ll r$是满足的．

$\lambda\neq0$的球对称真空场，de Sitter于1917年给出了场方程的解．

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda}{3}r^2\right)dx^{02}-\left(1-\frac{2m}{r}-\frac{\lambda}{3}r^2\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.2.13)$$

§ 1.3 Reissner-Nordström 解

前一节中，我们认为中心质量不具有电荷．如果中心质量源

除具有质量之外还具有电荷 e，由于电荷 e 激发的电磁场充满整个空间，作为物质存在的一种形式，它同样能够激发引力场，即作为引力场源. 因此，质量外部不再满足 $T_{\mu\nu}=0$，而代之以

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}-g^{\nu\rho}F^{\mu\lambda}F_{\lambda\rho}\right). \tag{1.3.1}$$

不难证明，$F_{21}=F_{31}=0$. 为此，我们采用 Maxwell 方程

$$F^{\mu\nu}_{\ ;\nu}=0,\ 即\ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu})=0. \tag{1.3.2}$$

由 $\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{2\nu})=0$ 得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}g^{22}g^{11}F_{21})=\frac{\partial}{\partial r}\left\{F_{21}e^{-\frac{1}{2}(\lambda-\nu)}\sin\theta\right\}=0,$$

即

$$F_{21}=Ce^{\frac{1}{2}(\lambda-\nu)}. \tag{1.3.3}$$

式中 C 是积分常数. 根据空间的渐近平直性质，当 $r\to\infty$ 时，未知的度规(1.2.1)应趋近于 Minkowski 度规，即 $\lambda\to 0$，$\nu\to 0$；另一方面，当 $r\to\infty$ 时应有 $F_{21}\to 0$. 由此得到 $C=0$. 这样，F_{21} 处处为零；同理可证 F_{31} 处处为零.

由于球对称性，四维势 A_μ 只含 r，所以 $F_{\mu\nu}=\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}-\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$ 只有脚标含有 1 的分量不为零，即 F_{21}，F_{31} 和 F_{01} 不为零. 由于 F_{21} 和 F_{31} 已为零，于是只要求出 F_{01}. 为此，仍可利用式

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{0\nu})=0.$$

此式可写为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{-F_{01}r^2e^{-\frac{1}{2}(\lambda+\nu)}\sin\theta\right\}=0,$$

积分得

$$F_{01}=-F_{10}=\frac{Q}{r^2}e^{\frac{1}{2}(\nu+\lambda)}. \tag{1.3.4}$$

式中 Q 为积分常数. 当 $r\to\infty$ 时，E_{10} 应表示点电荷的场强 $E_r=Q/r^2$，于是上式中的 Q 即为场源的电荷.

将(1.3.4)代入(1.3.1)得到电磁场的能-动张量的不为零分量：

$$T^0_0=T^1_1=-T^2_2=-T^3_3=\frac{Q}{8\pi r^4}. \tag{1.3.5}$$

由(1.2.4)和(1.2.5)得到场方程：

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{8\pi r^4}, \tag{1.3.6}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{r}-\frac{\lambda'\nu'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}-\frac{\nu'-\lambda'}{2r}\right)=\frac{k^2}{8\pi r^4}, \tag{1.3.7}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=\frac{k^2}{8\pi r^4}. \tag{1.3.8}$$

由(1.3.6)和(1.3.8)得到 $\lambda=-\nu$，代回原二式得

$$e^{\nu}(1+r\nu')-1=-\frac{k^2}{8\pi r^2}.$$

因为 $g_{00}=e^{\nu}$，所以上式即

$$g_{00}-r\frac{dg_{00}}{dr}=1-\frac{kQ^2}{8\pi r^2},$$

积分得 $\quad g_{00}=1+\frac{kQ^2}{8\pi r^2}+\frac{C}{r}.$

式中 C 为积分常数．为了确定常数 C，我们使这个解退化为已知的 Schwarzschild 外部解，这只要令 $Q=0$．比较可知 $C=-\frac{2GM}{c^2}\equiv-2m$．于是最后得到所求的度规

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)c^2dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{1.3.9}$$

式中 $e^2\equiv\frac{kQ^2}{8\pi}$．场源含磁荷 q 时，可推广 $e^2\rightarrow e^2+q^2$［见(1.14.11)］．(1.3.9)即著名的 Reissner-Nordstrom 度规．由于含 m 的和含 e 的两项之比

$$\frac{e^2}{r^2}\Big/\frac{2m}{r}\sim\frac{1}{r},$$

故知在 $r\rightarrow\infty$ 时与 m 项比较可将 e 项略去．对于电子，上述比值约为 $\frac{10^{-13}}{r}$．这就是说，只有在电子的经典半径附近，两项才可比拟．在较大的距离上，含 e 的项的作用便是微小的．

这里应指出，含 e 的项是电荷 Q 的电磁场(作为物质源)对引力场的贡献，而不代表电磁相互作用．

§1.4 史瓦希内部解

设场源物质为理想流体，静止于所选择的球坐标系中，且均匀分布于半径为 r_1 的球内，在球面处这均匀流体的压强为零．在这些特殊条件下，可以得到 Einstein 方程的一个严格解．

为了计算方便，将场方程写成混合张量的形式：

$$G_\mu^\nu-\frac{1}{2}g_\mu^\nu R=kT_\mu^\nu. \tag{1.4.1}$$

理想流体的能-动张量具有形式

$$T_\mu^\nu=g_{\mu\alpha}T^{\alpha\nu}=(\rho_0+p_0)g_{\mu\alpha}u^\alpha u^\nu-g_\mu^\nu p_0. \tag{1.4.2}$$

仍取球对称度规为

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{e}^\nu\mathrm{d}t^2-\mathrm{e}^\lambda\mathrm{d}r^2-r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2).$$

式中 $\nu=\nu(r)$，$\lambda=\lambda(r)$．由于场源物质是静止的，故有

$$u^1=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}=u^2=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=u^3=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=0,$$

$$u^0=\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}=\mathrm{e}^{\ \frac{1}{2}\nu}, \tag{1.4.3}$$

代入(1.4.2)得到 T_μ^ν 的不为零分量：

$$T_1^1=T_2^2=T_3^3=-p_0,$$

$$T_0^0=\rho_0c^2. \tag{1.4.4}$$

$R_{\mu\nu}$不为零的分量为

$$R_{11}=-\frac{1}{2}\nu''+\frac{1}{4}\nu'\lambda'-\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{\lambda'}{r},$$

$$R_{22}=-\mathrm{e}^{-\lambda}\left\{1+\frac{1}{2}r(\nu'-\lambda')\right\}+1, \tag{1.4.5}$$

$$R_{33}=-\mathrm{e}^{-\lambda}\left\{1-\frac{1}{2}r(\nu'-\lambda')\right\}\sin^2\theta+\sin^2\theta,$$

$$R_{00}=\mathrm{e}^{\nu-\lambda}\left(+\frac{1}{2}\nu''-\frac{1}{4}\nu'\lambda'+\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{\nu'}{r}\right),$$

由此得到标曲率 R 的表达式：

$$R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=$$

$$e^{-\lambda}\left\{\nu''-\frac{1}{2}\nu'\lambda'+\frac{1}{2}\nu'^2-\frac{2}{r}(\lambda'-\nu')+\frac{2}{r}\right\}-\frac{2}{r^2}. \tag{1.4.6}$$

将(1.4.4)～(1.4.6)代入(1.4.1)得到

$$k\rho_0c^2=e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}, \tag{1.4.7}$$

$$kp_0=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{1.4.8}$$

$$kp_0=e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{2}-\frac{\nu'\lambda'}{4}+\frac{1}{4}\nu'^2+\frac{\nu'-\lambda'}{2r}\right), \tag{1.4.9}$$

其中(1.4.9)是由 $G_2^2=kT_2^2$ 和 $G_3^3=kT_3^3$ 组合而成的. 由 $\frac{2}{r}\times$ [(1.4.8)—(1.4.9)]得到

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu''}{r}-\frac{\nu'}{r^2}-\frac{2}{r^3}\right)-e^{-\lambda}\lambda'\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)+$$

$$\frac{2}{r^3}+e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}+\frac{\nu'}{r}\right)\frac{\nu'}{2}=0.$$

考虑到(1.4.7)～(1.4.9)，上式可写为

$$\frac{dp_0}{dr}+(\rho_0c^2+p_0)\frac{\nu'}{2}=0, \tag{1.4.10}$$

此式给出压强和引力势沿 r 方向导数之间的关系. 积分(1.4.7)得

$$e^{-\lambda}=1-\frac{1}{3}k\rho_0c^2r^2+\frac{A}{r},$$

为了避免 $r=0$ 处(1.4.7)出现无限大，我们取积分常数 $A=0$. 上式成为

$$e^{-\lambda}=1-\frac{r^2}{R^2}. \tag{1.4.11}$$

式中 $R^2\equiv3/k\rho_0c^2$. (1.4.12)

积分(1.4.10)得

$$\rho_0c^2+p_0=Ce^{-\frac{1}{2}\nu}.$$

式中 C 为积分常数. 将(1.4.7)～(1.4.9)中的 ρ_0 和 p_0 代入上式，得到

$$e^{\frac{1}{2}\nu}e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}+\frac{\nu'}{r}\right)=\text{const}.$$

考虑到(1.4.11)有

$$e^{\frac{1}{2}\nu}\left(\frac{2}{R^2}+\frac{\nu'}{r}-\frac{\nu' r}{R^2}\right)=\text{const}.$$

积分上式得

$$e^{\frac{1}{2}\nu}=A-B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4.13}$$

式中 A 和 B 为积分常数. 式(1.4.13)和(1.4.11)给出 Einstein 场方程的解:

$$\begin{aligned} ds^2=&\left\{A-B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2c^2dt^2-\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}dr^2 \\ &-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

将(1.4.11)和(1.4.13)代入(1.4.8)得

$$kp_0=\frac{3B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}-A}{R^2\left\{A-B\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}. \tag{1.4.15}$$

常数 A 和 B 可由流体球边界处的连接条件确定. 使 $r<r_1$ 的上述内部解与 $r>r_1$ 的史瓦西外部解在 $r=r_1$ 处相等，并使 $r=r_1$ 的压强 $p_0=0$，从而便可同时确定常数 A、B 以及流体球的质量 M. 上述条件表示为

$$1-\frac{2GM}{c^2r_1}=1-\frac{r_1^2}{R^2}=\left[A-B\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2,$$

$$3B\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}-A=0.$$

解这三个代数方程得

$$\begin{aligned} &A=\frac{3}{2}\left(1-\frac{r_1^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &B=\frac{1}{2}, \\ &M=\frac{c^2}{3GR^2}r_1^3=\frac{kc^4}{6G}r_1^3\rho_0=\frac{4\pi}{3}r_1^3\rho_0. \end{aligned} \tag{1.4.16}$$

还应指出，式(1.4.14)表明，此内部解的适用范围是 $r_1<R$. 这一条件在天体物理的实际应用中是经常满足的. 例如，对于太阳有

$$\rho_0=1.4\text{gm/c. c},$$

$$r_1=6.95\times10^{10}\text{cm},$$

于是由(1.4.12)得 $R=3.5\times10^{13}\text{cm}\gg r_1$.

解(1.4.14)称为史瓦希(Schwarzschild)内部解.

§1.5 Kasner 解的推广

假设场源具有柱对称性，则其外部解可以严格给出，不带电的情况由 Kasner 给出.

本节讨论荷电的情况. Einstein-Maxwell 方程表示为

$$F^{\mu\nu}_{\ ;\nu}=0, \tag{1.5.1}$$

$$F_{\mu\nu;\alpha}+F_{\nu\alpha;\mu}+F_{\alpha\mu;\nu}=0, \tag{1.5.2}$$

$$G_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}+\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}g_{\mu\nu}\right). \tag{1.5.3a}$$

由于 $F^{\alpha\beta}=-F^{\beta\alpha}$, 后一式可简化为

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F_{\mu\sigma}F^{\sigma}_{\nu}+\frac{1}{4}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}g_{\mu\nu}\right). \tag{1.5.3b}$$

根据场的对称性，选取柱坐标，度规可写为

$$ds^2=u^2(r)dx^{0^2}-dr^2-v^2(r)d\varphi^2-w^2(r)dz^2. \tag{1.5.4}$$

将上式代入(1.5.1)和(1.5.2)，积分得

$$uvwF^{01}=-C_1=\text{const}, \quad F_{01}=C_1uv^{-1}w^{-1}, \tag{1.5.5}$$

$F^{\alpha\beta}$和 $F_{\alpha\beta}$其余分量均为零，C_1 为积分常数.

由(1.5.4)得到 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$的不为零分量为

$$\Gamma^0_{01}=\Gamma^0_{10}=\frac{u'}{u}, \quad \Gamma^1_{00}=uu', \quad \Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{v'}{v},$$

$$\Gamma^1_{22}=-vv', \quad \Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{13}=\frac{w'}{w}, \quad \Gamma^1_{33}=-ww'. \tag{1.5.6}$$

$R_{\mu\nu}$的不为零分量为

$$R_{00}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(uu')+uu'\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)-2u'^2,$$

$$R_{11}=-\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{u'}{u}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{v'}{v}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{w'}{w}\right)\right\}-\left\{\left(\frac{u'}{u}\right)^2+\left(\frac{v'}{v}\right)^2+\left(\frac{w'}{w}\right)^2\right\}, \tag{1.5.7}$$

$$R_{22}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(vv')-vv'\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)+2v'^2,$$

$$R_{33}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(ww')-ww'\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w}\right)+2w'^2.$$

将(1.5.7)和(1.5.5)代入(1.5.3)，并令

$$\mathrm{d}r=uvw\mathrm{d}\lambda, \tag{1.5.8}$$

得到

$$\left(\frac{u_{,\lambda}}{u}\right)_{,\lambda}=C_1^2u^2, \tag{1.5.9}$$

$$\left(\frac{v_{,\lambda}}{v}\right)_{,\lambda}=-C_1^2u^2, \tag{1.5.10}$$

$$\left(\frac{w_{,\lambda}}{w}\right)_{,\lambda}=-C_1^2u^2, \tag{1.5.11}$$

$$\frac{u_{,\lambda}v_{,\lambda}}{uv}+\frac{v_{,\lambda}w_{,\lambda}}{vw}+\frac{w_{,\lambda}u_{,\lambda}}{wu}=-C_1^2u^2. \tag{1.5.12}$$

积分(1.5.9)得

$$u_{,\lambda}=u(C_2+C_1^2u^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5.13}$$

式中 $C_2=\mathrm{const}$ 为积分常数.

由(1.5.5)可知，$C_1=0$ 即电磁场不存在. 我们首先考虑 $C_1\neq 0$，$C_2=0$ 的情形. 此时(1.5.13)给出

$$u=C_1^{-1}(C_3-\lambda)^{-1}, \tag{1.5.14}$$

$C_3=\mathrm{const}$. 由(1.5.10)～(1.5.12)以及(1.5.4)，(1.5.5)可得

$$v=C_1(C_3-\lambda)\mathrm{e}^{C_4\lambda}, \tag{1.5.15}$$

$$w=C_1(C_3-\lambda), \tag{1.5.16}$$

$C_4=\mathrm{const}$. 于是得到度规

$$\mathrm{d}s^2=C_1^{-2}(C_3-\lambda)^{-2}\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}r^2-C_1^2(C_3-\lambda)^2\mathrm{e}^{2C_4\lambda}\mathrm{d}\varphi^2-C_1^2(C_3-\lambda)^2\mathrm{d}z^2, \tag{1.5.17a}$$

$$F^{01}=-(C_3-\lambda)^{-1}\mathrm{e}^{-C_4\lambda}, \tag{1.5.18a}$$

$$F_{01}=C_1^{-2}(C_3-\lambda)^{-3}e^{-C_4\lambda}. \tag{1.5.19a}$$

为了写成通常柱坐标的形式，再作一次坐标变换．令

$$C_4^{-1}e^{C_4\lambda}=\rho,\ C_4^2\varphi=\psi, \tag{1.5.20}$$

此时有 $\mathrm{d}r=C_1(C_3-\lambda)e^{C_4\lambda}\mathrm{d}\lambda=C_1(C_3-\lambda)\mathrm{d}\rho$, (1.5.21)

将(1.5.20)和(1.5.21)代入(1.5.17)～(1.5.19)，得到

$$\mathrm{d}s^2=C_1^{-2}(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^{-2}\mathrm{d}t^2-C_1^2(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^2\{\mathrm{d}\rho^2+\rho^2\mathrm{d}\psi^2+\mathrm{d}z^2\}, \tag{1.5.17b}$$

$$F^{01}=-C_4^{-1}(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^{-1}\rho^{-1}, \tag{1.5.18b}$$

$$F_{01}=C_1^{-2}C_4^{-1}(C_3-C_4^{-1}\ln C_4\rho)^{-3}\rho^{-1}, \tag{1.5.19b}$$

如果质量源不带电，在(1.5.13)中令$C_1=0$，令$C_2=a^2$，我们有特解

$$u=e^{a\lambda},\ v=e^{b\lambda},\ w=e^{c\lambda}, \tag{1.5.22}$$

$$a+b+c=a^2+b^2+c^2=1. \tag{1.5.23}$$

此时由(1.5.8)知

$$\mathrm{d}r^2=e^{2(a+b-c)\lambda}\mathrm{d}\lambda^2=\mathrm{d}\rho^2,$$

于是(1.5.4)可写为

$$\mathrm{d}s^2=\rho^{2a}\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\rho^2-\rho^{2b}\mathrm{d}\varphi^2-\rho^{2c}\mathrm{d}z^2, \tag{1.5.24}$$

这就是 Kasner 真空度规．如果令 $C_1=0$，$C_2=0$，则得到 Minkowski 度规．

§1.6 电荷和磁矩的外部解

人们认为许多天体都具有电荷．对于中子星，人们认为，其强大的射电辐射来自中子星表面以外强大的磁偶极磁场形成的磁层内的相干曲率辐射(RS 模型)，因而认为中子星具有强大的磁矩，其数值约为

$$p\sim10^{30}\text{Gauss 单位}. \tag{1.6.1}$$

因此，研究电荷(磁荷)和磁矩的引力场对于揭示中子星的引力性质是有意义的(Wang，1985)．

我们讨论静态时空中的静态磁场．静态时空可表示为

$$g_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}(x^i). \tag{1.6.2}$$

如果四维时空点沿类时方向移动 ξ^μ 时，矢量 A^μ 不变，则电磁场 $F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu}$ 也是静态的. 此条件即 A^μ 的 Lie 导数为零：

$$\xi^\mu A^\nu_{;\mu}-A^\mu\xi^\nu_{;\mu}=0. \tag{1.6.3}$$

式中 ξ^μ 为类时 Killing 矢量，它满足 Killing 方程：

$$\xi_{\mu;\nu}+\xi_{\nu;\mu}=0. \tag{1.6.4}$$

电磁场只包含纯磁场的条件可表示为

$$F_{\mu\nu}=2(\xi^\mu\xi_\mu)^{-\frac{1}{2}}\xi_\mu B_\nu=2g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}(\xi_\mu B_\nu-\xi_\nu B_\mu), \tag{1.6.5}$$

$$\xi^0=1,\ \xi^i=0.$$

式中 B_μ 为磁矢量. 可以取 $\boldsymbol{B}$ 为纯空间矢量($\xi^\mu B_\mu=0$, $\xi^\mu\xi_\mu\neq 0$)：

$$B_\mu=(\xi^\mu\xi_\mu)^{-\frac{1}{2}}F_{\mu\nu}\xi^\nu. \tag{1.6.6}$$

由于 $$F_{\mu\nu}\xi^\nu=(A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu})\xi^\nu=(A_\nu\xi^\nu)_{;\mu}-(A_\nu\xi^\nu_{;\mu}+A_{\mu;\nu}\xi^\nu)=A_{0,\mu}-(A_\nu\xi^\nu_{;\mu}+A_{\mu;\nu}\xi^\nu). \tag{1.6.7}$$

式中 $A_0=\xi^\mu A_\mu$. 考虑到(1.6.4)，可将(1.6.7)的后一项化为(1.6.3)，于是(1.6.6)可写为

$$B_\mu=g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}A_{0;\mu}. \tag{1.6.8}$$

又由(1.6.5)得

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=\xi^\mu(g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^\nu)_{;\nu}+(g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^\nu\xi^\mu_{;\nu}-\xi_\nu g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^\mu_{;\nu})-g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^\mu\xi^\nu_{;\nu}.$$

上式最后一项由Killing方程知其为零. 括号内的式子即$(-g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^\nu)$的 Lie 导数，因场是静态的，此 Lie 导数为零. 因此上式即

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=\xi^\mu(g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^\nu)_{;\nu} \tag{1.6.9}$$

或 $$F^{\mu\nu}_{;\nu}=\xi^\mu g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}B^i_{|i}, \tag{1.6.10}$$

由(1.6.10)知真空 Maxwell 方程即

$$B^i_{|i}=(g_{00}{}^{-\frac{1}{2}}g^{ij}A_{0,j})_{|i}=0. \tag{1.6.11}$$

我们求在 Reissner-Nordstrom 度规

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)dx^{02}-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2+$$
$$r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.6.12}$$

的背景下的静态磁场.

将(1.6.12)代入(1.6.11)，得到 $A_0(r, \theta)$满足的方程：

$$\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)(r^2A_{0,r})_{,r}+\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta A_{0,\theta})_{,\theta}+$$
$$\frac{1}{\sin^2\theta}A_{0,\varphi\varphi}=0. \tag{1.6.13}$$

易见此方程的解为

$$A_0(r, \theta)=R(r)p_l^n(\cos\theta)e^{in\varphi}. \tag{1.6.14}$$

式中 $R(r)$满足方程

$$\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)(2rR_{,r}+r^2R_{,rr})-l(l+1)R=0. \tag{1.6.15a}$$

经尝试，知

$$n=0,\ l=1,\ R_1(r)=r\left(r-2m+\frac{e^2}{r}\right) \tag{1.6.15b}$$

是方程(1.6.15)的一个特解.

令 $R(r)=R_1(r)\cdot x(r)$, (1.6.16)

代入(1.6.15)得

$$\left(r-2m+\frac{e^2}{r}\right)x_{,rr}=-2\left\{1-\frac{e^2}{r^2}+\frac{2}{r}\left(r-2m+\frac{e^2}{r}\right)\right\}x_{,r}. \tag{1.6.17}$$

积分(1.6.17)得

$$\ln|x_{,r}|=-2\ln|r^2-2mr+e^2|+C. \tag{1.6.18}$$

积分(1.6.18)，考虑到边界条件，得到

$$x=C_1\left\{\frac{r-m}{2(e^2-m^2)(r^2-2mr+e^2)}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{4(e^2-m^2)\sqrt{m^2-e^2}}\ln\frac{r-m-\sqrt{m^2-e^2}}{r-m+\sqrt{m^2-e^2}}\right\}. \tag{1.6.19}$$

令 $$a\equiv\frac{(1-e^2m^{-2})^{\frac{1}{2}}}{1-mr^{-1}[1-(1-e^2m^{-2})^{\frac{1}{2}}]}, \tag{1.6.20}$$

(1.6.19)成为

$$x=-C_1\left\{\frac{r-m}{2m^2r^2(1-e^2m^{-2})(1-2mr^{-1}+e^2m^{-2})}+\right.$$
$$\left.\frac{1}{4m^3(1-e^2m^{-2})^{3/2}}\ln\left(1-\frac{2m\alpha}{r}\right)\right\}. \tag{1.6.21}$$

将(1.6.21)代入(1.6.16)，(1.6.15a)和(1.6.14)得

$$A_0(r,\theta)=-C_1\left\{\frac{r-m}{2m^2(1-e^2m^{-2})r}+\right.$$
$$\left.\frac{r^2-2mr+e^2}{4m^3(1-e^2m^{-2})^{3/2}}\ln\left(1-\frac{2m\alpha}{r}\right)\right\}\times\cos\theta. \tag{1.6.22}$$

将(1.6.22)按$\frac{2m\alpha}{r}$展开，略去高阶项得

$$A_0(r,\theta)=-\frac{2C_1m^2}{3r^2}\left(1+\frac{2\alpha m}{r}\right)\cos\theta. \tag{1.6.23}$$

(1.6.23)是一个磁偶极子在 Reissner-Nordstrom 弯曲时空中的静磁场的势. 实际上，令 e=0，得 $\alpha=1$，(1.6.23)即成为 Schwarzschild 空间中的情况，当 $r\gg m$ 时，(1.6.23)便成为人们熟知的平直空间中的一个磁偶极子的势：

$$A_0(r,\theta)\longrightarrow\frac{p}{r^2}\cos\theta. \tag{1.6.24}$$

设场源质量位于坐标原点，磁矩沿 $\theta=0$ 方向，场显然应是辐射对称的，四维势 A_μ 只有一个不为零的分量 A_φ. 按照(1.6.23)，我们可以将 A_φ 表示为

$$A_{\varphi(p)}=\frac{p}{r^2}\left(1+\frac{2\alpha m}{r}\right)\cos\theta. \tag{1.6.25}$$

以上我们把 Reissner-Nordstrom 度规作为时空背景，解真空 Maxwell 方程，得到了静态磁矩的磁场. 现在，我们用逐次逼近的方法，在一级近似下求 Einstein-Maxwell 方程的解. 将(1.6.25)代入能-动张量

$$T_{\mu\nu(p)}=F_{\mu\sigma(p)}F^{\sigma}_{\nu(p)}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta(p)}F^{\alpha\beta}_{(p)}. \tag{1.6.26}$$

(1.6.26)和以 e，m 为源的能-动张量

$$T_{\mu\nu(e)}=\frac{e^2}{2r^4}\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & 0\\ 0 & -b & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{1.6.27}$$

一起，放在 Einstein-Maxwell 方程组的右端.（1.6.27）中的 a 和 b 分别为

$$a=1-\frac{2m}{r^2}+\frac{e^2}{r^2},\ b=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}. \tag{1.6.28}$$

所要求的度规含有一阶小量的修正项：

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}+u\right)\mathrm{d}x^{0^2}-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-v\right)^{-1}\mathrm{d}r^2$$
$$-r^2(1+w)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{1.6.29}$$

将（1.6.26）～（1.6.29）构成的 Einstein 方程组按 u，v，w 展开，保留一次项，得到

$$-\frac{2m}{r^3}+\frac{3e^2}{r^4}+\frac{1}{2}u_{,rr}+\frac{1}{r}\left(\frac{2m}{r^2}-\frac{2e^2}{r^3}+u_{,r}\right)+$$
$$\frac{1}{2r^2}(u_{,\theta\theta}+\cot\theta\cdot u_{,\theta})=\frac{e}{r^4}-\frac{2me^2}{r^5}+\frac{e^4}{r^6}+$$
$$\frac{a^2p^2}{2r^6}(3\cos^2\theta+1), \tag{1.6.30}$$

$$-\frac{2m}{r^3}+\frac{3e^2}{r^4}+\frac{1}{2}u_{,rr}+w_{,rr}+\frac{1}{r}\left(\frac{2m}{r^2}-\frac{2e^2}{r^3}-v_{,r}+\right.$$
$$\left.2w_{,r}\right)+\frac{1}{r^2}(u_{,\theta\theta}+\frac{1}{2}\cot\theta\cdot u_{,\theta})=\frac{e}{r^4}\left(1-\frac{2m}{r}+\right.$$
$$\left.\frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}-\frac{a^2p^2}{2r^6}(3\cos^2\theta-1), \tag{1.6.31}$$

$$\frac{1}{2}w_{,rr}+\frac{1}{2r}\left(\frac{4m}{r^2}-\frac{4e^2}{r^3}+u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r}\right)+$$
$$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{2}w_{,\theta\theta}+w-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-v+\frac{1}{2}\cot\theta(u_{,\theta}+v_{,\theta}+\right.$$
$$\left.w_{,\theta})\right\}=-\frac{e^2}{r^4}-\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta+1), \tag{1.6.32}$$

$$\frac{1}{2}w_{,rr}+\frac{1}{2r}\left(\frac{4m}{r^2}-\frac{4e^2}{r^3}+u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r}\right)+$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}u_{,\theta\theta}+\frac{1}{2}v_{,\theta\theta}+\frac{1}{2}w_{,\theta\theta}+w-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}-\right.$$
$$\left.v-\frac{1}{2}\cot\theta\cdot w_{,\theta}\right)=-\frac{e^2}{r^4}+\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta-1),$$
$$(1.6.33)$$

$$\frac{3e^2}{r^4}\sin\theta-\frac{3m}{r^3}\sin\theta-\frac{\sin\theta}{2r^2}(2+u+3v-4w)-\frac{\sin\theta}{2r}\times$$
$$(u_{,r}-v_{,r})+\frac{\cos\theta}{r^2}(u_{,\theta}+v_{,\theta}-2w_{,\theta})=0. \qquad (1.6.34)$$

略去$\frac{me^2}{r^5}$和$\frac{e^4}{r^6}$等高阶项，(1.6.30)～(1.6.33)化为

$$u_{,rr}+\frac{2}{r}u_{,r}+\frac{1}{r^2}u_{,\theta\theta}+\frac{\cot\theta}{r^2}u_{,\theta}-\frac{\alpha^2p^2}{r^6}\times(3\cos^2\theta+1)=0,$$
$$(1.6.35)$$

$$u_{,rr}+2w_{,rr}-\frac{2}{r}(v_{,r}-2w_{,r})+\frac{1}{r^2}(4w_{,r}+u_{,r}-v_{,r})+$$
$$\frac{1}{2r^2}\{w_{,\theta\theta}+\cot\theta(u_{,\theta}+v_{,\theta}+w_{,\theta})-v-w\}+$$
$$\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta+1)=0, \qquad (1.6.36)$$

$$w_{,rr}+\frac{1}{2r}(u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r})+\frac{1}{2r^2}(u_{,\theta\theta}+v_{,\theta\theta}+$$
$$w_{,\theta\theta}-v+w-\cot\theta\cdot w_{,\theta})-\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta-1)=0,$$
$$(1.6.37)$$

$$w_{,rr}+\frac{1}{2r}(u_{,r}-v_{,r}+4w_{,r})+\frac{1}{2r^2}\{w_{,\theta\theta}+\cot\theta(u_{,\theta}+$$
$$v_{,\theta}+w_{,\theta})-v-w\}+\frac{\alpha^2p^2}{2r^6}(5\cos^2\theta+1)=0. \qquad (1.6.38)$$

解(1.6.35)～(1.6.37)的过程虽然麻烦但并不困难. 如(1.6.35)分离变量，得到两个常微分方程，其解很容易得到：

$$u=\frac{\alpha^2p^2\cos^2\theta}{r^4}. \qquad (1.6.39)$$

将(1.6.39)代入其余方程，将 v 和 w 展成福里叶级数，比较各项系数，得到

$$v=\frac{\alpha^2 p^2}{2r^4}(2\cos^2\theta-1), \tag{1.6.40}$$

$$w=\frac{\alpha^2 p^2\cos^2\theta}{2r^4}. \tag{1.6.41}$$

将(1.6.39)～(1.6.41)代入(1.6.29)，得到所要求的度规(一级近似)：

$$g_{00}=1-\frac{2m}{r}+\frac{\mathrm{e}^2}{r^2}+\frac{\alpha^2 p^2\cos^2\theta}{r^4},$$

$$g_{11}=-\left\{1-\frac{2m}{r}+\frac{\mathrm{e}^2}{r^2}-\frac{\alpha^2 p^2}{2r^4}(2\cos^2\theta-1)\right\}^{-1},$$

$$g_{22}=-r^2\left(1-\frac{\alpha^2 p^2\cos^2\theta}{2r^4}\right),$$

$$g_{33}=-r^2\left(1-\frac{\alpha^2 p^2\cos^2\theta}{2r^4}\right)\sin^2\theta. \tag{1.6.42}$$

度规(1.6.42)描述具有电荷 e 和磁矩 p 的中心质量(如中子星)的引力场. 它对于研究中子星的引力场和磁场以及场中的各种引力效应将是有用的. 含磁荷时可将 e^2 换为 e^2+q^2.

§1.7 Weyl-Levi-Civita 解

当引力场具有旋转对称性时，真空 Einstein 方程的严格解由 Weyl 和 Levi-Civita 给出.

在引力场 $g_{\mu\nu}$中，如果存在一个表征旋转对称性的 Killing 矢量，则这一引力场称为旋转对称引力场，如果这一旋转是绕 Ox^3 轴的，则 Killing 矢量具有形式

$$\xi^\mu=(0,\ \alpha x^2,\ -\alpha x^1,\ 0). \tag{1.7.1}$$

式中 α 是表征旋转的参量.

考虑到旋转对称性，线元的最普遍形式应为

$$\mathrm{d}s^2=a\mathrm{d}x^{0^2}+b\mathrm{d}x^{1^2}+2c\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2+d\mathrm{d}x^{2^2}+\mathrm{e}\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.7.2}$$

式中 $x^0=ct$，是类时坐标；x^1 和 x^2 是空间坐标；$x^3=\varphi$是角坐标；a，b，c 和 d 是 x^1 和 x^2 的函数.

我们知道，在二维空间中，Weyl 共形张量等于零. 现在，用

这一性质可将线元(1.7.2)简化. 考虑由线元

$$b(x^1, x^2)\mathrm{d}x^{1^2}+2c(x^1, x^2)\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}(x^1, x^2)\mathrm{d}x^{2^2} \tag{1.7.3}$$

表征的二维曲面，这一二维曲面是共形平直的，即存在一个新的坐标系

$$x'^1,\ x'^2,$$

$$x'^1=x'^1(x^1, x^2),\ x'^2=x'^2(x^1, x^2), \tag{1.7.4}$$

在新坐标系中线元(1.7.3)具有形式

$$\mathrm{e}^{\mu}[\mathrm{d}x^{1^2}+\mathrm{d}x^{2^2}]. \tag{1.7.5}$$

式中 μ 是新坐标的函数，在上式中，为了简化，我们省去了新坐标的撇号.

由于坐标变换(1.7.4)不影响(1.7.2)中的第一项和最后一项，于是旋转对称的静态线元可简化为

$$\mathrm{d}s^2=a(\mathrm{d}x^0)^2+\mathrm{e}^{\mu}[(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2]+\mathrm{e}\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.7.6}$$

为了方便，将函数 a，μ 和 e 写成

$$a=\mathrm{e}^{2\psi},\ \mathrm{e}^{\mu}=-\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)},\ \mathrm{e}=-\rho^2\mathrm{e}^{-2\psi}. \tag{1.7.7}$$

式中 ψ, γ 和 ρ 是坐标 x^1 和 x^2 的函数，因此我们有

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2\psi} & & & 0 \\ & -\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)} & & \\ & & -\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)} & \\ 0 & & & -\rho^2\mathrm{e}^{-2\psi} \end{pmatrix}, \tag{1.7.8}$$

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2\psi} & & & 0 \\ & -\mathrm{e}^{2(\psi-\gamma)} & & \\ & & -\mathrm{e}^{2(\psi-\gamma)} & \\ 0 & & & -\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2\psi} \end{pmatrix}, \tag{1.7.9}$$

由此得 $$\sqrt{-g}=\rho\mathrm{e}^{2(\gamma-\psi)}. \tag{1.7.10}$$

在上面各式中，所有函数都不依赖于时间坐标 x^0 和纬向角坐标 φ.

由(1.7.8)和(1.7.9)，可以得到 Christoffel 符号：

$$\Gamma^0_{01}=\psi_{,1},\ \Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{12}=\gamma_{,1}-\psi_{,1},$$

$$\Gamma^0_{02}=\psi_{,2},\ \Gamma^1_{12}=-\Gamma^2_{11}=\Gamma^2_{22}=\gamma_{,2}-\psi_{,2},$$
$$\Gamma^1_{00}=e^{2(2\psi-\gamma)}\psi_{,1},\ \Gamma^2_{00}=e^{2(2\psi-\gamma)}\psi_{,2},$$
$$\Gamma^3_{13}=\rho^{-1}\rho_{,1}-\psi_{,1},\ \Gamma^1_{33}=e^{-2\gamma}(\rho^2\psi_{,1}-\rho\rho_{,1}),$$
$$\Gamma^3_{23}=\rho^{-1}\rho_{,2}-\psi_{,2},\ \Gamma^2_{33}=e^{-2\gamma}(\rho^2\psi_{,2}-\rho\rho_{,2}),$$

其余 $\Gamma^\tau_{\mu\nu}=0.$ (1.7.11)

由(1.7.11)可得到 $R_{\mu\nu}$，从而建立 Einstein 场方程 $R_{\mu\nu}=k\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)$.

$$R_{00}\equiv e^{-2(2\psi-\gamma)}(\psi_{,AA}+\rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A})=$$
$$k\left(T_{00}-\frac{1}{2}e^{2\psi}T\right), \tag{1.7.12}$$
$$R_{11}\equiv\psi_{,AA}-\gamma_{,AA}-2\psi_{,1}\psi_{,1}-\rho^{-1}\rho_{,11}+\rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A}+$$
$$\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1}-\gamma_{,2}\rho_{,2})=k\left(T_{22}+\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\psi)}T\right), \tag{1.7.13}$$
$$R_{12}\equiv\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,2}+\gamma_{,2}\rho_{,1})-2\psi_{,1}\psi_{,2}-\rho^{-1}\rho_{,12}=kT_{12} \tag{1.7.14}$$
$$R_{22}\equiv\psi_{,AA}-\gamma_{,AA}-2\psi_{,2}\psi_{,2}-\rho^{-1}\rho_{,22}+\rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A}-$$
$$\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1}-\gamma_{,2}\rho_{,2})=k\left(T_{22}+\frac{1}{2}e^{2(\gamma-\psi)}T\right), \tag{1.7.15}$$
$$R_{33}\equiv e^{-2\gamma}\rho^2[\psi_{,AA}+\rho^{-1}(\psi_{,A}\rho_{,A}-\rho_{,AA})]=$$
$$k\left(T_{33}+\frac{1}{2}\rho^2e^{-2\psi}T\right), \tag{1.7.16}$$

其余 $R_{\mu\nu}=0$， (1.7.17)

上面诸式中 $A=1, 2$；T 为标量能-动张量：
$$T=e^{-2\psi}T_{00}-e^{2(\psi-\gamma)}(T_{11}+T_{22})-\rho^{-2}e^{2\psi}T_{33}. \tag{1.7.18}$$

对于真空场，$T_{\mu\nu}=0$，场方程简化为
$$\psi_{,AA}+\rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A}=0, \tag{1.7.19}$$
$$\psi_{,AA}-\gamma_{,AA}-2\psi_{,1}\psi_{,1}-\rho^{-1}\rho_{,11}+\rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A}+$$
$$\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1}-\gamma_{,2}\rho_{,2})=0, \tag{1.7.20}$$
$$\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,2}+\gamma_{,2}\rho_{,1})-2\psi_{,1}\psi_{,2}-\rho^{-1}\rho_{,12}=0, \tag{1.7.21}$$
$$\psi_{,AA}-\gamma_{,AA}-2\psi_{,2}\psi_{,2}-\rho^{-1}\rho_{,22}+\rho^{-1}\psi_{,A}\rho_{,A}-$$
$$\rho^{-1}(\gamma_{,1}\rho_{,1}-\gamma_{,2}\rho_{,2})=0, \tag{1.7.22}$$

$$\psi_{,AA}+\rho^{-1}(\psi_{,A}\rho_{,A}-\rho_{,AA})=0. \tag{1.7.23}$$

由方程(1.7.19)和(1.7.23)得

$$\nabla^2\rho(x^1, x^2)=\rho_{,AA}=0. \tag{1.7.24}$$

这是二维 LapLace 方程，即 ρ 为两个坐标 x^1 和 x^2 的调和函数.

为了简化引力场方程(1.7.19)～(1.7.23)，我们引入柱坐标系：

$$x^1=\rho,\ x^2=z. \tag{1.7.25}$$

式中 ρ 是 Laplace 方程(1.7.24)的任一解. 在一般情况下，ρ 不是标准平直空间的柱坐标.

采用上述坐标系，$x^0=ct$，$x^1=\rho$，$x^2=z$，$x^3=\varphi$，第一个方程(1.7.19)和最后一个方程(1.7.23)相同. 真空引力场方程组归结为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0, \tag{1.7.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho^2}-\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\gamma}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}\right)-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2=0, \tag{1.7.27}$$

$$\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\gamma}{\partial z}-2\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial z}=0, \tag{1.7.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)-\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\gamma}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}\right)-2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2=0. \tag{1.7.29}$$

由此我们可以得到四个等效的方程：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0, \tag{1.7.30}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1.7.31}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z}=2\rho\ \frac{\partial\psi}{\partial\rho}\ \frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{1.7.32}$$

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2\gamma}{\partial z^2}=-\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{1.7.33}$$

此即具有旋转对称性的静态真空引力场方程.

方程(1.7.30)是通常平直空间 Laplace 方程的柱坐标形式，

函数 ψ 具有旋转对称性. 容易得到方程(1.7.30)的一个特解，然后将此解代入其余两个方程(1.7.31)和(1.7.32)，便可解出 γ. 将(1.7.31)和(1.7.32)分别对 ρ 和 z 求导，然后相加便得到第四个方程，所以第四个方程不是独立的.

我们把 Weyl-Levi-Civita 度规在柱坐标中的形式(1.7.8).

$$ds^2=e^{2\psi}c^2dt^2-e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2+dz^2)-\rho^2e^{-2\psi}d\varphi^2. \qquad (1.7.34)$$

对于一些具体的情况，用上述方法便可得到上式的具体形式.

§1.8 质量四极矩的外部解

作为静态旋转对称场的例子. 我们给出质量四极矩的场方程的严格解. 为此，选择椭球坐标(x，y)较方便：

$$x=\frac{1}{2m}(r_1+r_2),\quad y=\frac{1}{2m}(r_1-r_2). \qquad (1.8.1)$$

式中 r_1 和 r_2 满足

$$r_1^2=\rho^2+(z+m)^2,$$
$$r_2^2=\rho^2+(z-m)^2. \qquad (1.8.2)$$

此处 ρ 和 z 是通常的柱坐标；m 是一个参量. 新坐标的取值范围是

$$x\geqslant 1,$$
$$-1\leqslant y\leqslant +1.$$

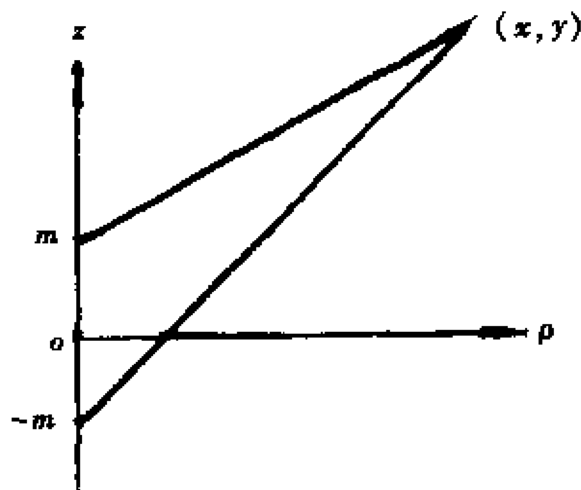


图 3-1

在新坐标系中，方程组(1.7.30)～(1.7.32)可写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=0, \qquad (1.8.3)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{1-y^2}{x^2-y^2}\left[x(x^2-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-x(1-y)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2-\right.$$
$$\left.2y(x^2-1)\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right], \qquad (1.8.4)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{\lambda^2-1}{x^2-y^2}\left[y(x^2-1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-y(1-y)^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.2x(1-y^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]. \tag{1.8.5}$$

方程组(1.8.3)～(1.8.5)可用分离变量法解之. 令

$$\psi(x, y)=\Lambda(x)M(y). \tag{1.8.6}$$

将上式代入(1.8.3)，我们得到下面两个方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[(x^2-1)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}x}\right]-C\Lambda=0, \tag{1.8.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(1-y^2)\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\right]+CM=0. \tag{1.8.8}$$

式中 C 为不依赖于 x 和 y 的常量.

为了得到一个正常解，我们取 $C=l(l+1)$，$l=0, 1, 2, \cdots$，此时(1.8.3)的解可写为

$$\psi(x, y)=\sum_{l=0}^{\infty}g_l\psi_l(x, y). \tag{1.8.9}$$

式中 $\psi_l(x, y)=P_l(y)Q_l(x)$. (1.8.10)

其中 $P_l(y)$是 Legendre 多项式，$Q_l(x)$是第二类 Legendre 函数. 例如选择 $l=0$ 时有

$$\psi_0(x, y)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}. \tag{1.8.11}$$

这里由于 $l=0$ 故 $a=0$，于是(1.8.7)和(1.8.8)中的 Λ, M 表示为

$$\Lambda(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1},\ M(y)=1. \tag{1.8.12}$$

将(1.8.11)代入(1.8.4)和(1.8.5)，得到 $\gamma_0(x, y)$的表示式：

$$\gamma_0=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}. \tag{1.8.13}$$

ψ_0 和 γ_0 给出 Schwarzschild 度规[只要由椭球坐标(x, y)回到球坐标(r, θ)：$x=\frac{r}{m}-1$, $y=\cos\theta$.]

适当选择普遍解(1.8.9)中的系数，便可得到(1.8.3)的其他解. 例如，使

$$\psi=\psi_0+g_l\psi_l. \tag{1.8.14}$$

式中 $l\neq 0$，g_l 为一任意常数. 此处不对 l 取和. 这个解可认为是 Schwarzschid 解的推广. 场源除具有质量之外，还具有 l 阶质量多极矩.

$l=1$ 对应于质量偶极矩的场，在物理上这个解无意义，因为没有负量存在. $l=2$ 的解描述四极矩的引力场. 令 $\sigma=g_2$，我们可将这个解写为

$$\psi=\frac{1}{2}\left\{\left[1+\frac{1}{4}\sigma(3x^2-1)(3y^2-1)\right]\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{3}{2}\sigma x(3y^2-1)\right\}. \tag{1.8.15}$$

这时函数 γ 的表示式为

$$\begin{aligned}\gamma=&\frac{9}{64}\sigma^2\left[(9x^4-10x^2+1)\ln^2\frac{x-1}{x+1}+(36x^2-28x)\times\right.\\&\left.\ln\frac{x-1}{x+1}+36x^2-16\right]y^4+\left\{\frac{9}{32}\sigma^2(-5x^4+6x^2-1)\times\right.\\&\ln^2\frac{x-1}{x+1}+\left[\frac{3}{2}\sigma x+\frac{9}{32}\sigma^2\left(-20x^3+\frac{52}{3}x\right)\right]\times\\&\left.\ln\frac{x-1}{x+1}+3\sigma+\frac{9}{32}\sigma^2\left(-20x^2+\frac{32}{3}\right)\right\}y^2+\left(\frac{1}{2}\sigma^2+\right.\\&\left.\sigma+\frac{1}{2}\right)\ln\frac{x^2-1}{x^2-y^2}+\frac{9}{64}\sigma^2(x^4-2x^2+1)\ln^2\frac{x-1}{x+1}+\\&\left[\frac{1}{16}\sigma^2(9x^2-15x)-\frac{3}{2}\sigma x\right]\times\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{9}{16}\sigma^2\times\\&\left(x^2-\frac{3}{4}\right)+3\sigma.\end{aligned} \tag{1.8.16}$$

γ 中的积分常数是根据无限远处边界条件确定的(当 $x\to\infty$ 时 $\gamma\to 0$).

为了说明上面的解在远离引力场源时的行为，我们先将 Weyl-Levi-Civita 线元按椭球坐标 x 和 y 写出[注意到(1.8.1)和(1.8.2)]：

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2-m^2e^{2(\gamma-\psi)}(x^2-y^2)\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1}+\frac{\mathrm{d}y^2}{1-y^2}\right)-$$

$$m^2e^{-2\psi}(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.8.17}$$

借助于关系式

$$x=\frac{r}{m}-1,\ y=\cos\theta, \tag{1.8.18}$$

可将(1.8.17)写为球坐标形式：

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2-e^{2(\gamma-\psi)}\left[\left(1+\frac{m^2\sin^2\theta}{r^2-2mr}\right)\right]\mathrm{d}r^2+ \\ (r^2-2mr+m^2\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta^2\Big]-e^{-2\psi}(r^2-2mr)\times \\ \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \tag{1.8.19}$$

令 $x^0=ct$，$x^1=r$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$，并按$\frac{1}{r}$展开，得到

$$g_{00}=1+2\Big\{-\frac{m}{r}+\frac{Q}{r^3}P_2(\cos\theta)-\frac{9Qm}{r^4}P_2(\cos\theta)+ \\ \frac{4}{19}\frac{Qm^2}{r^5}P_2(\cos\theta)+\frac{1}{r^6}\Big[-\frac{25}{7}Qm^3P_2(\cos\theta)+ \\ \frac{1}{2}Q^2(P_2(\cos\theta))^2\Big]+\cdots\Big\}. \tag{1.8.20}$$

式中 $Q=2m^3\sigma/15$ 是质量四极矩. 度规张量的其他分量可按类似方法展开：

$$g_{11}=-1-\frac{2m}{r}\left(\frac{m}{r}\right)^2\left[4+\frac{9}{5}\sigma^2-2(\sigma+\sigma^2)\sin^2\theta\right]- \\ \left(\frac{m}{r}\right)^3\Big[8-\frac{16}{3}\sigma+\frac{36}{5}\sigma^2-\left(\frac{38}{5}\sigma+4\sigma^2\right)\times \\ \sin^2\theta\Big]+\cdots \tag{1.8.21}$$

对于质量为 m，四极矩为 Q 的质量源，在球坐标系中保留至$\left(\frac{m}{r}\right)^4$项，(1.8.17)～(1.8.19)表示为

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left\{1+\frac{4m^3\sigma}{15r^3}\left(1+\frac{3m}{r}\right)P_2(\cos\theta)\right\}\mathrm{d}x^{02}- \\ \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\Big\{1-\frac{4m^3\sigma}{15r^3}P_2(\cos\theta)-\frac{m^4\sigma}{5r^4}\times \\ (5\cos^4\theta-1)\Big\}\mathrm{d}r^2-r^2\Big\{1-\frac{4m^3\sigma}{15r^3}P_2(\cos\theta)-$$

$$\frac{m^4\sigma}{5r^4}(5\cos^2\theta-1)\Big\}d\theta^2-\frac{1}{r^2}\Big\{1+\frac{4m^3\sigma}{15r^3}\Big(1+\frac{3m}{r}\Big)\times$$
$$P(\cos\theta)\Big\}^{-1}\sin^2\theta d\varphi^2. \tag{1.8.22}$$

根据近年来的测量结果，对于太阳，$\sigma\sim10^7$；对于地球，$\sigma\sim1.5\times10^6$.

§1.9 Vaidya 解

Vaidya 度规描述具有球对称性的辐射引力场.我们可以解相应的 Einstein 场方程，导出这一度规.

对于球对称辐射的非旋转球体(场源)，能-动张量可写为

$$T_{\mu\nu}=qk_\mu k_\nu. \tag{1.9.1}$$

式中 k_μ 是向外辐射的零矢量；q 是局部观察者测得的辐射能量密度(观察者具有四维速度 v^μ)，即

$$q=T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu. \tag{1.9.2}$$

采用史瓦希坐标，具有上述性质的度规的最普遍形式是(取 $c=G=1$)

$$ds^2=\left[\frac{\dot{m}}{f(m)}\right]^2\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\times$$
$$dr^2-r^2d\Omega^2. \tag{1.9.3}$$

式中 $m=m(r,t)$，

$$f(m)=m'\left(1-\frac{2m}{r}\right), \tag{1.9.4}$$

$$\dot{m}=\frac{\partial m}{\partial t},\ m'=\frac{\partial m}{\partial r}.$$

直接计算可得到 $R_{\mu\nu}$的表示式：

$$R_{\mu\nu}=\frac{2m'}{r^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\dot{m}}{m'}\delta^0_\mu+\delta^1_\mu\right)\left(\frac{\dot{m}}{m'}\delta^0_\nu+\delta^1_\nu\right). \tag{1.9.5}$$

下面我们将度规(1.9.3)在推迟坐标系中给出.在推迟坐标系(u,r,θ,φ)中，Vaidya 线元(1.9.3)具有形式

$$ds^2=\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]du^2+2dudr-r^2d\Omega^2. \tag{1.9.6}$$

式中 u 是史瓦希几何中的推迟时间坐标，它与史瓦希时间坐标之间的关系是

$$u=t-r-2m\ln(r-2m). \tag{1.9.7}$$

这一变换要求$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}=0$.

在上述坐标系中，$g^{\mu\nu}$的不为零分量可由(1.9.6)求得：

$$\begin{aligned}
&g^{01}=1,\\
&g^{11}=-\left(1-\frac{2m}{r}\right),\\
&g^{22}=-\frac{1}{r^2},\\
&g^{33}=-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}.
\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{00}=-\frac{m}{r^2},\\
&\Gamma^0_{22}=r,\\
&\Gamma^0_{33}=r\sin^2\theta,\\
&\Gamma^1_{00}=-\frac{\dot{m}}{r}+\frac{m}{r^3}(r-2m),\\
&\Gamma^1_{01}=\Gamma^1_{10}=\frac{m}{r^2},\\
&\Gamma^1_{22}=2m-r,\\
&\Gamma^1_{33}=(2m-r)\sin^2\theta,\\
&\Gamma^2_{21}=\Gamma^2_{12}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta,\\
&\Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{13}=\frac{1}{r},\\
&\Gamma^3_{32}=\Gamma^3_{23}=\cot\theta,\\
&\Gamma^{\tau}_{\mu\nu}\text{其余分量为零}.
\end{aligned} \tag{1.9.9}$$

$R_{\mu\nu}$的表示式为

$$R_{\mu\nu}=-\frac{2}{r^2}\dot{m}\delta^0_\mu\delta^0_\nu. \tag{1.9.10}$$

标曲率 $R=0$，于是能-动张量为

$$T_{\mu\nu}=-\frac{2}{k}\ \frac{1}{r^2}m\delta_\mu^0\delta_\nu^0. \tag{1.9.11}$$

(1.9.11)表示辐射场的能-动张量，具有几何光学形式. 比较(1.9.11)和(1.9.1)，我们得到

$$q=-\frac{2}{k}\frac{m(u)}{r^2}, \tag{1.9.12}$$

以上诸式中 $m\equiv\frac{\mathrm{d}m(u)}{\mathrm{d}u}$，即辐射的能量密度.

为了将 Vaidya 度规以零标架形式给出，首先将度规(1.9.6)写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&l_\mu n_\nu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu+n_\mu l_\nu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu-\\&m_\mu\overline{m}_\nu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu-\overline{m}_\mu m_\nu\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu,\end{aligned} \tag{1.9.13}$$

(1.9.6)还可改写为(对称化形式)

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\mathrm{d}u\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u+\mathrm{d}r\right]+\left[\frac{1}{2}\times\right.\\&\left.\left(1-\frac{2m(u)}{r}\right)\mathrm{d}u+\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}u-\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta+i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right]\times\\&\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta-i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right]-\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta-i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right]\times\\&\left[\frac{r}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}\theta+i\sin\theta\mathrm{d}\varphi)\right].\end{aligned} \tag{1.9.14}$$

比较(1.9.13)和(1.9.14)，得到零标架矢量的协变分量：

$$\begin{aligned}&l_\mu=\delta_\mu^0,\\&n_\mu=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m(r)}{r}\right)\delta_\mu^0+\delta_\mu^1,\\&m_\mu=-\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta_\mu^2+i\sin\theta\delta_\mu^3).\end{aligned} \tag{1.9.15}$$

m_μ 表示式加一个负号是为了和 Kinnersley 线(见§2.1)一致.

为了给出标架矢量的逆变分量或方向导数，我们写出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2}=&(l^\mu\partial_\mu)(u^\nu\partial_\nu)+(n^\mu\partial_\mu)(l^\nu\partial_\nu)-(m^\mu\partial_\mu)\times\\&(\overline{m}^\nu\partial_\nu)-(\overline{m}^\mu\partial_\mu)(m^\nu\partial_\nu),\end{aligned} \tag{1.9.16}$$

或者等效地有

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}=D\Delta+\Delta D-\delta\bar{\delta}-\bar{\delta}\delta. \tag{1.9.17}$$

上式又可写为

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial r}-\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2-\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2. \tag{1.9.18}$$

将(1.9.18)重新整理和对称化，然后与(1.9.16)或(1.9.17)比较，得到

$$D=\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\Delta=\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{2}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\frac{\partial}{\partial r},$$

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{2}\,r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+i\,\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{1.9.19}$$

根据零矢量和它们的方向导数可以计算旋系数. 由(1.9.19)和(1.9.15)得

$$Dl^\mu=0,\ \Delta l^\mu=0,\ \delta l^\mu=0,$$

$$Dn^\mu=\frac{1}{r}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]n^\mu-\frac{1}{r}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\times$$

$$\delta_0^\mu+\frac{\mathrm{d}m(u)}{\mathrm{d}u}\frac{1}{r}\delta_1^\mu+\frac{1}{2r}\left[1-\frac{m(u)}{r}\right]\times$$

$$\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]\delta_1^\mu,\ \delta n^\mu=0,$$

$$Dm^\mu=-\frac{1}{r}m,$$

$$\Delta m^\mu=-\frac{1}{2r}\left[1-\frac{2m(u)}{r}\right]m^\mu,$$

$$\delta m^\mu=-\frac{i\cos\theta}{2r^2\sin^2\theta}\delta_3^\mu,$$

$$\bar{\delta}m^\mu=\delta m^\mu. \tag{1.9.20}$$

将上述结果代入(1.9.9)得到非零旋系数：

$$\rho=-\frac{1}{r},$$

$$\alpha=-\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2}\,r},$$

$$\beta=-\alpha,$$

$$\mu=-\frac{1}{2r}+\frac{m(u)}{r^2},$$

$$\gamma=\frac{m(u)}{2r^2}. \tag{1.9.21}$$

还可以得到 Rici 张量零迹部分的非零分量：

$$\Phi_{22}=-\frac{m(u)}{r^2}. \tag{1.9.22}$$

Weyl 张量的非零分量只有一个：

$$\Psi^2=-\frac{m(u)}{r^3}. \tag{1.9.23}$$

由(1.9.22)可以计算 Rici 张量的分量.因为 $R=0$，从而有 $R_{\mu\nu}=R_{mn}Z^m_\mu Z^n_\nu=2\Phi_{22}l_\mu l_\nu$，它是能-动张量的 k 倍：

$$kT_{\mu\nu}=-\frac{2\dot{m}(u)}{r^2}l_\mu l_\nu \tag{1.9.24}$$

辐射场的能-动张量具有几何光学形式.

我们可以看到，Vaidya 辐射场不满足无源 Maxwell 方程，这是预料之内的事情，因为辐射场有单极结构.

实际上在标架形式中，无源 Einstein-Maxwell 方程由下述代数关系给出：

$$\Phi_{mn}=\phi_m\bar{\phi}_n. \tag{1.9.25}$$

由于 Φ_{mn}只有一个非零分量，我们令

$$\phi_2=\sqrt{-m}\frac{e^{ik}}{r},\ \phi_0=\phi=0. \tag{1.9.26}$$

将(1.9.26)代入 $j^\mu=0$ 的 Maxwell 方程直接得到矛盾的结果：一方面 k 只是 u 和 ϕ 的函数，另一方面$\frac{\partial k}{\partial\phi}=\cos\theta$.这就是说 vaidya 度规不满足无源 Maxwell 方程.

我们还可以计算辐射能量通量.对于静止于无限远的观察者，结果是 $s=-m$ 即等于辐射物体质量减少率.

§1.10 电(磁)荷、磁矩和质量四极矩的外部解

为了揭示一些天体的引力性质，寻求同时具有电荷(磁荷)、磁矩和质量四极矩的质量源的引力场是有意义的.

我们在§1.5中得到一个具有电荷和磁矩的中心质量引力场，没有考虑质量四极矩的存在，也没有考虑电荷(磁荷)和磁矩的相互作用对引力场的贡献.在考虑到这些作用之后，本节采用微扰论的方法，获得场方程的解.

在所讨论的情况下，所寻求的度规中应该含有质量四极矩 J 和磁矩 p 的相互作用项.与质量 M 的贡献相比，四极矩 J 和磁矩 p 已经是小量，因此可忽略 J 和 p 的相互作用项的贡献.

静态辐射对称线元在柱坐标系(ρ, z, ϕ)中的普遍形式可写为

$$ds^2 = e^{2\psi}c^2dt^2 - e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2 + dz^2) - \rho^2 e^{-2\psi}d\phi^2, \quad (1.10.1)$$

其中 ψ 和 γ 只是 ρ、z 的函数.

质量外部的 Einstein-Maxwell 方程具有形式

$$R_{\alpha\beta} = 2k\left(-F_{\alpha\mu}F^{\mu}_{\beta} + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}F_{\sigma\tau}F^{\sigma\tau}\right), \quad (1.10.2)$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (1.10.3)$$

式中 $F_{\sigma\tau} = A_{\tau;\sigma} - A_{\sigma;\tau}$，$A_\mu$ 是电磁场四维势，$k \equiv \frac{G}{c^4}$.

电磁场只含纯磁场的条件为

$$F_{\mu\nu} = 2g^{-\frac{1}{2}}(\xi_\mu B_\nu - \xi_\nu B_\mu). \quad (1.10.4)$$

式中 ξ_μ 为类时 killing 矢量.由上式可得

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{1}{2}\xi^\mu(g_{00}^{-1}g^{\nu\alpha}A_{,\alpha})_{;\nu}. \quad (1.10.5)$$

式中 $A = \xi^\mu A_\mu$.

将(1.10.1)和(1.10.5)代入(1.10.3)，得到 A 满足的方程：

$$\nabla^2 A - 2\nabla\psi \cdot \nabla A = 0. \quad (1.10.6)$$

式中 ∇ 和 ∇^2 是平直空间柱坐标系中的梯度算符和拉普拉斯算符.

由于场具有辐射对称性，所以 A_μ 只有一个非零分量 $A_\varphi \equiv A$. 于是可将 Einstein 方程(1.10.2)写成如下形式：

$$\nabla^2\psi = ke^{-2\psi}|\nabla A|^2, \tag{1.10.7a}$$

$$\nabla^2(\psi-\gamma)+\frac{2}{\rho}\gamma_{,\rho}-2\psi_{,\rho}^2 = ke^{-2\psi}(A_{,z}^2-A_{,\rho}^2), \tag{1.10.7b}$$

$$\nabla^2(\psi-\gamma)-2\psi_{,z}^2 = ke^{-2\psi}(A_{,\rho}^2-A_{,z}^2), \tag{1.10.7c}$$

$$\gamma_{,z}-2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z} = -2k\rho e^{-2\psi}A_{,\rho}A_{,z}. \tag{1.10.7d}$$

由(1.10.7b)，(1.10.7c)和(1.10.7d)消去二阶微分项得

$$\gamma_{,\rho} = \rho\psi_{,\rho}^2-\rho\psi_{,z}^2-k\rho e^{-2\psi}(A_{,\rho}^2-A_{,z}^2), \tag{1.10.8a}$$

$$\gamma_{,z} = 2\rho\psi_{,\rho}\psi_{,z}-2k\rho e^{-2\psi}A_{,\rho}A_{,z}. \tag{1.10.8b}$$

作变换

$$\rho^2 = (r^2-2mr+kQ^2)(1-\mu^2), \tag{1.10.9a}$$

$$z = (r-m)\mu, \quad -1\leqslant\mu=\cos\theta\leqslant 1, \tag{1.10.9b}$$

式中 $k=\frac{G}{c^4}$，Q 为星体电荷(磁荷). 在此变换下，方程(1.10.6)、(1.10.7a)、(1.10.8a)和(1.10.8b)分别成为

$$[(r^2-2mr+kQ^2)A_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A_{,\mu}]_{,\mu} = 2(r^2-2mr+kQ^2)A_{,r}\psi_{,r}+2(1-\mu^2)A_{,\mu}\psi_{,\mu}. \tag{1.10.10a}$$

$$[(r^2-2mr+kQ^2)\psi_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi_{,\mu}]_{,\mu} = ke^{-2\psi}[(r^2-2mr+kQ^2)A_{,r}^2+(1-\mu^2)A_{,\mu}^2]. \tag{1.10.10b}$$

$$\gamma_{,r} = \frac{1-\mu^2}{(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2}\{(r-m)(r^2-2mr+kQ^2)\times[\psi_{,r}^2-ke^{-2\psi}A_{,r}^2]-(r-m)(1-\mu^2)\times[\psi_{,\mu}^2-ke^{-2\psi}A_{,\mu}^2]-2\mu(r^2-2mr+kQ^2)[\psi_{,r}\psi_{,\mu}-ke^{-2\psi}A_{,r}A_{,\mu}]\}. \tag{1.10.10c}$$

$$\gamma_{,\mu} = \frac{r^2-2mr+kQ^2}{(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2}\{\mu(r^2-2mr+kQ^2)[\psi_{,r}^2-ke^{-2\psi}A_{,r}^2]-\mu(1-\mu^2)[\psi_{,\mu}^2-ke^{-2\psi}A_{,\mu}^2]+2(r-m)(1-\mu^2)[\psi_{,r}\psi_{,\mu}-ke^{-2\psi}A_{,r}A_{,\mu}]\}. \tag{1.10.10d}$$

变换之后的线元表示为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = {} & e^{2\psi}c^2\mathrm{d}t^2 - e^{2(\gamma-\psi)}[(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2]\times \\
& \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2-2mr+kQ^2}+\frac{\mathrm{d}\mu^2}{1-\mu^2}\right] - (r^2-2mr+kQ^2)\times \\
& (1-\mu^2)e^{-2\psi}\mathrm{d}\phi^2. \qquad (1.10.11)
\end{aligned}
$$

下面我们解方程(1.10.10). 注意到方程中含有引力常数 k，因此应有 $\psi=\psi(r,\ \mu,\ k)$，$A=A(r,\ \mu,\ k)$. $k=\dfrac{G}{c^4}$很小，我们将 ψ 和 A 展开成 k 的幂级数：

$$
\psi(r,\ \mu,\ k)=\psi^{(0)}(r,\ \mu)+k\psi^{(1)}(r,\ \mu)+k^2\psi^{(2)}(r,\ \mu)+\cdots \qquad (1.10.12a)
$$

$$
\begin{aligned}
A(r,\ \mu,\ k)= {} & A^{(0)}(r,\ \mu)+ \\
& kA^{(1)}(r,\ \mu)+k^2A^{(2)}(r,\ \mu)+\cdots \qquad (1.10.12b)
\end{aligned}
$$

将(1.10.12)代入(1.10.10)并比较各项的量级，得到

$$
[(r^2-2mr)\psi^{(0)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi^{(0)}_{,\mu}]_{,\mu}=0. \qquad (1.10.13a)
$$

$$
\begin{aligned}
& [(r^2-2mr)A^{(0)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A^{(0)}_{,\mu}]_{,\mu}=2(r^2- \\
& \quad 2mr)A^{(0)}_{,r}\psi^{(0)}_{,r}+2(1-\mu^2)A^{(0)}_{,\mu}\psi^{(0)}_{,\mu}. \qquad (1.10.13b)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& [(r^2-2mr)\psi^{(1)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi^{(1)}_{,\mu}]_{,\mu}=-Q^2\psi_{,rr}+ \\
& \quad e^{-2\psi^{(0)}}[(r^2-2mr)A^{(0)2}_{,r}+(1-\mu^2)A^{(0)2}_{,\mu}]. \qquad (1.10.13c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& [(r^2-2mr)A^{(1)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A^{(1)}_{,\mu}]_{,\mu}=-Q^2A^{(0)}_{,rr}+ \\
& \quad 2Q^2A^{(0)}_{,r}\psi^{(0)}_{,r}+2(r^2-2mr)[A^{(0)}_{,r}\psi^{(1)}_{,r}+A^{(1)}_{,r}\psi^{(0)}_{,r}]+ \\
& \quad (1-\mu^2)[A^{(0)}_{,\mu}\psi^{(1)}_{,\mu}+A^{(1)}_{,\mu}\psi^{(0)}_{,\mu}]. \qquad (1.10.13d)
\end{aligned}
$$

$\cdots \qquad \cdots$

$$
\begin{aligned}
& [(r^2-2mr)A^{(i)}_{,r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A^{(i)}_{,\mu}]_{,\mu}= \\
& \quad -Q^2A^{(i-1)}_{,rr}+2(r^2-2mr)A^{(i)}_{,r}\psi^{(0)}_{,r}+ \\
& \quad 2(1-\mu^2)A^{(i)}_{,\mu}\psi^{(0)}_{,\mu}+2\sum_{j=0}^{i-1}\Big\{(r^2-2mr)A^{(j)}_{,r}\psi^{(i-j)}_{,r}+ \\
& \quad Q^2A^{(j)}_{,r}\psi^{(i-j-1)}_{,r}+(1-\mu^2)A^{(j)}_{,\mu}\psi^{(i-j)}_{,\mu}\Big\}. \qquad (1.10.13e) \\
& \quad (i=1,\ 2,\ \cdots)
\end{aligned}
$$

方程(1.10.13a)可用分离变量法求解.对于中心质量和质量四极矩产生的引力场，可求得

$$\psi^{(0)}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{1}{4}J(3\mu^2-1)\left\{\frac{45}{2m^4}(r-m)+\frac{15}{4m^5}(3r^2-6mr+2m^2)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}. \tag{1.10.14}$$

式中 J 为质量四极矩.

下面解方程(1.10.13b).由(1.10.14)可知 $\psi^{(0)}=\psi^{(0)}(r,\mu,J)$.于是应有 $A^{(0)}=A^{(0)}(r,\mu,J)$.由于 J 很小，我们将 $A^{(0)}$ 展开为 J 的幂级数：

$$A^{(0)}(r,\mu,J)=A^{(0)}_{(0)}(r,\mu)+JA^{(0)}_{(1)}+0(J^2). \tag{1.10.15}$$

略去(1.10.15)中 J^2 以上高阶项，代入(1.10.13b)，并比较 J 的同次项系数，得到 $A^{(0)}_{(0)}$ 满足的方程：

$$[(r^2-2mr)A^{(0)}_{(0),r}]_{,r}+[(1-\mu^2)A^{(0)}_{(0),\mu}]_{,\mu}-2mA^{(0)}_{(0),r}=0. \tag{1.10.16}$$

(1.10.16)是在史瓦希背景度规下的 Maxwell 方程，用分离变量法易得其解：

$$A^{(0)}_{(0)}=\sum_{l=0}^{\infty}R_l(r)p_l(\mu). \tag{1.10.17}$$

式中 $P_l(\mu)$ 是 l 阶勒让德多项式，$R_l(r)$ 满足方程

$$[(r^2-2mr)R_{,r}]_{,r}-2mR_{,r}-l(l+1)R=0. \tag{1.10.18}$$

显然，

$$R_0=\frac{a}{r}, \tag{1.10.19}$$

$$R_1=b\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]. \tag{1.10.20}$$

式中 a 和 b 为积分常数.

将(1.10.19)和(1.10.20)代入(1.10.17)，取 $r\to\infty$ 时的极限，并和经典情况下电荷(磁荷)和磁矩的势比较，可确定积分常数 a 和 b：

$$a=Q,\ b=-\frac{3p}{4m^2}. \tag{1.10.21}$$

式中 Q 和 p 分别为中心质量具有的电荷(磁荷)和磁矩. 于是我们得到 Schwarzschild 背景度规下的电荷(磁荷)和磁矩的势:

$$A_{(0)}^{(0)}=\frac{Q}{r}-\frac{3p\mu}{4m^2}\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]. \tag{1.10.22}$$

将(1.10.14)、(1.10.15)和(1.10.22)代入(1.10.13b), 得到 $A_{(1)}^{(0)}$满足的方程:

$$[(r^2-2mr)A_{(1),r}^{(0)}]_{,r}+[(1-\mu^2)A_{(1),\mu}^{(0)}]_{,\mu}-2mA_{(1),r}^{(0)}=$$
$$g_0(r)+g_1(r)\mu+g_2(r)\mu^2+g_3(r)\mu^3. \tag{1.10.23}$$

式中

$$g_0(r)\equiv\frac{Q}{r^2}\left[\frac{45}{4m^5}(r-m)(r^2-2mr)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{15}{2m^4}\times(3r^2-6mr+m^2)\right]. \tag{1.10.24}$$

$$g_1(r)\equiv-\frac{45p}{8m^8}\left[\frac{3}{2}(r-2m)(-2r^2+5mr-2m^2)\right.$$
$$\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\left(-12r^2+42mr-44m^2+\frac{12m^3}{r}\right)\times$$
$$\left.m\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+30m^2\left(-6r+15m-\frac{14m^2}{r}+\frac{m^3}{r^2}\right)\right]. \tag{1.10.25}$$

$$g_2(r)\equiv-\frac{3Q}{r^2}\left[\frac{45}{4m^5}(r-m)(r^2-2mr)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{15}{2m^4}(3r^2-6mr+m^2)\right]. \tag{1.10.26}$$

$$g_3(r)\equiv\frac{135p}{4m^7}\left[\left(3r^2-3mr-7m^2+\frac{4m^3}{r}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\right.$$
$$\frac{1}{4}(r-2m)(3r-2m)\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+$$
$$\left.m^2\left(3-\frac{8m}{r}+\frac{m^2}{r^2}\right)\right]. \tag{1.10.27}$$

显然, 方程(1.10.23)的解可写为

$$A_{(0)}^{(0)}=f_0(r)+f_1(r)\mu+f_2(r)\mu^2+f_3(r)\mu^3. \tag{1.10.28}$$

将此式代入(1.10.23)，得到 $f_l(r)$满足的方程：

$$[(r^2-2mr)f_{3,r}]_{,r}-2mf_{3,r}-12f_3=g_3(r), \quad (1.10.29a)$$

$$[(r^2-2mr)f_{2,r}]_{,r}-2mf_{2,r}-6f_2=g_2(r), \quad (1.10.29b)$$

$$[(r^2-2mr)f_{1,r}]_{,r}-2mf_{1,r}-2f_1=g_1(r)-6f_3(r). \quad (1.10.29c)$$

$$[(r^2-2mr)f_{0,r}]_{,r}-2mf_{0,r}=g_0(r)-2f_2(r). \quad (1.10.29d)$$

积分(1.10.29)，略去$\left(\frac{m}{r}\right)^6$以上高阶项，得到

$$A_{(1)}^{(0)}=\frac{Q}{r^4}\left(\frac{1}{2}+\frac{9m}{7r}\right)-\frac{Q}{r^4}\left(\frac{3}{2}+\frac{27m}{7r}\right)\cos^2\theta+\frac{p\cos\theta}{r^5}\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos^2\theta\right). \quad (1.10.30)$$

$A_{(1)}^{(0)}$是质量四极矩对 Schwarzschild 背景下磁荷和磁矩的势的修正.

下面解方程(13c). 将 $\psi^{(0)}$和 $A^{(0)}$的表达式代入，并忽略 J 和 p 的相互作用项，我们得到

$$[(r^2-2m)\psi_{,r}^{(1)}]_{,r}+[(1-\mu^2)\psi_{,\mu}^{(1)}]_{,\mu}=v_0(r)-Q^2\psi_{,rr}^{(0)}+v_1(r)\mu+\mu^2v_2(r). \quad (1.10.31)$$

式中

$$v_0(r)\equiv\frac{9p^2}{16m^4}\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\frac{Q}{r^2}+\frac{9JQ^2}{2r^5}. \quad (1.10.32)$$

$$v_1(r)\equiv-\frac{3pQ}{2m^2}\left[\frac{2}{r}+\frac{2m}{r^2}+\frac{1}{m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right], \quad (1.10.33)$$

$$v_2(r)\equiv\frac{9p^2}{16m^4}\left[2+\frac{2m}{r}+\frac{r}{m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2-\frac{9p^2}{16m^4}\cdot\frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\times\left[2\left(\frac{m}{r}-1\right)+\left(2-\frac{r}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2-\frac{27JQ^2}{2r^5}. \quad (1.10.34)$$

将(1.10.31)的解写为下面的形式：

$$\psi^{(1)}=h_0(r)+h_1(r)\mu+h_2(r)\mu^2, \tag{1.10.35}$$

代入(1.10.31)，得到 $h_i(r)$满足的方程，解之得

$$h_0(r)=\frac{Q^2}{2r(r-2m)}-\int\frac{2h_2\mathrm{d}r}{r(r-2m)}\mathrm{d}r+w_1(r)+w_2(r). \tag{1.10.36a}$$

式中

$$w_1(r)\equiv\frac{9p^2}{16m^4}\left\{\frac{1}{6m^2}(r-m)(r-2m)\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2-\frac{2r}{3m}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)-2\int\frac{\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2}{r}\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\int\frac{\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{r}\mathrm{d}r\right\}, \tag{1.10.37a}$$

$$w_2(r)\equiv\frac{3JQ^2}{32m^5}\left\{15\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\frac{397}{8}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)-\frac{3m^4}{r^4}-\frac{m^3}{r^3}-\frac{3m^2}{4r^2}-\frac{43m}{4r}-\frac{10m}{r-2m}+60\int\frac{\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)}{r}\mathrm{d}r\right\}. \tag{1.10.38a}$$

$$h_1(r)=-\frac{3pQ}{2m^2}\left\{\frac{4}{m}-\frac{1}{r}+\left(\frac{2r}{m^2}-\frac{5}{2m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}; \tag{1.10.36b}$$

$$h_2(r)=\left(r^2-2mr+\frac{2}{3}m^2\right)H_2(r). \tag{1.10.36c}$$

式中

$$H_2(r)=\int\frac{[G_1(r)+G_2(r)]\mathrm{d}r}{r(r-2m)\left(r^2-2mr+\frac{2}{3}m^2\right)^2},$$

$$G_1(r)=\frac{9p^2}{16m^4}\left\{\left(\frac{r^4}{2m}-\frac{4}{3}r^3+\frac{2m}{3}r^2\right)\left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+2mr^2-\frac{8m^4}{3r}+\left(2r^3-\frac{22}{3}mr^2+\frac{16}{3}m^2r+\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{4}{3}m^3\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}. \tag{1.10.37b}$$

$$G_2(r)=\frac{45JQ^2}{4m^5}\left\{-\frac{1}{2}r(r-m)(r-2m)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\right.$$

$$2m^2r-mr^2-\frac{m^3\left(r^2-2mr+\frac{2}{3}m^2\right)}{r(r-2m)}+$$

$$\left.\frac{3m^5}{5r^2}-\frac{4m^6}{5r^3}+\frac{m^7}{5r^4}\right\}. \tag{1.10.38b}$$

至此，我们已经求得度规 $\psi^{(0)}$ 的一级修正项 $k\psi$. 由前面诸式可见，$\psi^{(1)}$ 具有形式

$$\psi^{(1)}=\psi_Q^{(1)}+\psi_p^{(1)}+\psi_{JQ}^{(1)}+\psi_{pQ}^{(1)}. \tag{1.10.39}$$

类似地，我们有

$$\psi^{(n)}=\psi_Q^{(n)}+\psi_p^{(n)}+\psi_{JQ}^{(n)}+\psi_{pQ}^{(n)}. \tag{1.10.40}$$

由此可知

$$\psi=\psi_m+\psi_Q+\psi_p+\psi_J+\psi_{pQ}+\psi_{JQ}. \tag{1.10.41}$$

(1.10.41)中的($\psi_m+\psi_J$)为

$$\psi_m+\psi_J=\psi(0). \tag{1.10.42}$$

其严格表达式已由(1.10.14)给出. (1.10.41)中的 ψ_Q 为

$$\psi_Q=\sum_{n=1}^{\infty}k^n\psi_Q^{(n)}. \tag{1.10.43}$$

是磁荷 Q 对 ψ 的贡献. (1.10.41)中的 ψ_p 为

$$\psi_p=\sum_{n=1}^{\infty}k^n\psi_p^{(n)}. \tag{1.10.44}$$

是磁矩 p 对 ψ 的贡献. ψ_{pQ}和 ψ_{JQ}分别表示 p、Q 相互作用及 J、Q 相互作用对引力场的贡献.

下面我们给出 ψ_Q 的严格表达式. 用 $A_Q^{(n)}$ 表示磁荷的势的 n 级修正中不含 J 和 P 的部分，则由(1.10.13e)可得

$$A_Q^{(n)}=0,\ n\geqslant 1. \tag{1.10.45}$$

又由(1.10.10b)得到 $\psi_Q^{(n)}$ 满足的方程：

$$[(r^2-2m)\psi_{Q,r}^{(n)}]_{,r}=-Q^2\psi_{Q,rr}^{(n-1)}. \tag{1.10.46}$$

对(1.10.46)积分，得到

$$\psi_Q^{(n)} = -Q^2\int \frac{\psi_{Q\ ,r}^{(n-1)}}{r^2-2mr}\mathrm{d}r = \frac{(-1)^{n-1}Q^{2n}}{2n(r^2-2mr)}. \quad (1.10.47)$$

将(1.10.47)代入(1.10.43)得

$$\psi_Q = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \psi_Q^{(n)} = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{kQ^2}{r^2-2mr}\right). \quad (1.10.48)$$

至此，g_{00}已经以明显形式给出：

$$g_{00}=e^{2\psi}=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{kQ^2}{r^2}\right)e^{2(\psi_J+\psi_p+\psi_{pQ}+\psi_{JQ})}. \quad (1.10.49)$$

下面计算 g_{11}中的未知函数 γ. 将(1.10.30)、(1.10.22)和(1.10.12b)，以及 ψ 的表达式代入(1.10.10c)积分，可得 γ 的表达式. 首先将(1.10.10c)对 r 积分，得到

$$\begin{aligned}\gamma = \int \frac{(1-\mu^2)\mathrm{d}r}{(r-m)^2+(kQ^2-m^2)\mu^2}\{&(r-m)(r^2-\\ &2mr+kQ^2)[\psi_{,r}^2-ke^{-2\psi}A_{,r}^2]-(r-m)(1-\mu^2)\\ &[\psi_{,\mu}^2-ke^{-2\psi}A_{,\mu}^2]-2\mu(r^2-2mr+kQ^2)\\ &[\psi_{,r}\psi_{,\mu}-ke^{-2\psi}A_{,r}A_{,\mu}]\}. \end{aligned} \quad (1.10.50)$$

将 ψ 和 A 的表达式代入积分，便得到 γ. 在忽略 J、p 相互作用对引力场的贡献之后，由(1.10.50)可知 γ 具有下面的形式：

$$\gamma=\bar{\gamma}+\gamma_J+\gamma_{pQ}+\gamma_p+\gamma_{JQ}. \quad (1.10.51)$$

下面我们对(1.10.50)右端各项分别进行讨论和计算. 右端第一项

$$\bar{\gamma}=\gamma_m+\gamma_Q \quad (1.10.52)$$

是当仅有中心质量 m 和磁荷 Q 时的 γ 值. 由(1.10.50)得到

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}=\frac{1}{2}\ln(r^2-2mr+kQ^2)-\frac{1}{2}\ln[&(r-m)^2+\\ &(kQ^2-m^2)\mu^2\}.\end{aligned} \quad (1.10.53)$$

其中用到了下面的表达式：

$$\psi_m+\psi_Q=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{kQ^2}{r^2-2mr}\right). \quad (1.10.54)$$

$$A_Q=\frac{Q}{r}. \quad (1.10.55)$$

(1.10.51)右端第二项 γ_J 表示质量四极矩单独对 γ 的贡献.

将 ψ_J 代入(1.10.50)，积分得

$$\gamma_J=F_0(r)+F_1(r)\mu^2+F_2(r)\mu^4 + \frac{45J}{4m^3}\ln\frac{r^2-2mr}{r^2-2mr+m^2(1-\mu^2)}. \qquad (1.10.56)$$

式中

$$F_0(r)=\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{J^2}{m^6}\left[\frac{1}{m^4}(r-m)^4-\frac{2}{m^2}(r-m)^2+1\right]\times \left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\left\{\frac{15^2J^2}{64m^6}\left[\frac{9}{m^2}(r-m)^2-\frac{15}{m}(r-m)\right]- \frac{45J}{4m^4}(r-m)\right\}\times\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{4J^2}{m^5}\left[\frac{1}{m^2}(r-m)^2- \frac{3}{4}\right]+\frac{45J}{2m^5}. \qquad (1.10.57)$$

$$F_1(r)=\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{2J^2}{m^6}\left[-\frac{5}{m^4}(r-m)^4+\frac{6}{m^2}(r-m)^2-1\right]\times \left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]^2+\left\{\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{2J^2}{m^6}\left[-\frac{20}{m^3}(r-m)^2+ \frac{52}{3m}(r-m)\right]+\frac{45J}{4m^4}(r-m)\right\}\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+ \left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{2J^2}{m^6}\left[-\frac{20}{m^2}(r-m)^2+\frac{32}{3}\right]+\frac{45J}{2m^3}. \qquad (1.10.58)$$

$$F^2(r)=\left(\frac{45}{16}\right)^2\frac{J^2}{m^6}\left\{\left[\frac{9}{m^4}(r-m)^2-\frac{10}{m^2}(r-m)^2+1\right]\times \left[\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right]+\frac{36}{m^2}(r-m)^2-\frac{28}{m}(r-m)\right]\times \ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{36}{m^2}(r-m)^2-16\right\}. \qquad (1.10.59)$$

此结果与质量四极矩的引力场度规完全一致.

将(50)展开为$\frac{m}{r}$的级数以后再积分，便可得到(51)右端的后三项：

$$\gamma_{pQ}=\frac{kPQ(1-\mu^2)}{r^3}\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\mu+\frac{61}{12}\mu\cdot\frac{m}{r}+\left(\frac{158}{15}\mu+ \frac{1}{5}\mu^2+\frac{4}{5}\mu^3+\frac{31}{25}\right)\frac{m^2}{r^2}\right]+o\left(\frac{m^6}{r^6}\right). \qquad (1.10.60)$$

$$\gamma_p=\frac{kp^2(1-\mu^2)}{r^4}\left[\frac{9}{2}\mu^2-\frac{1}{4}+\left(\frac{4}{5}+2\mu-\frac{2}{5}\mu^2\right)\frac{m}{r}\right]+$$

$$\sigma\left(\frac{m^6}{r^6}\right). \tag{1.10.61}$$

$$\gamma_{JQ}=\frac{kJQ^2(1-\mu^2)}{r^5}\left(\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\mu+\frac{12}{5}\mu^2\right)+o\left(\frac{m^6}{r^6}\right). \tag{1.10.62}$$

最后，将 μ 改写为 $\cos\theta$，得到所寻求的度规：

$$g_{00}=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{kQ^2}{r^2}\right)\exp(2\psi_J+2\psi_p+2\psi_{JQ}+2\psi_{pQ}). \tag{1.10.63}$$

$$g_{11}=-\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{kQ^2}{r^2}\right)^{-1}\exp(-2\psi_J+2\gamma_J-2\gamma_p-2\psi_p+$$

$$2\gamma_{JQ}-2\psi_{JQ}+2\gamma_{pQ}-2\psi_{pQ}). \tag{1.10.64}$$

$$g_{22}=-\gamma^2\exp(2\gamma_J-2\psi_J+2\gamma_p-2\psi_p+2\gamma_{JQ}-2\psi_{JQ}+$$

$$2\gamma_{pQ}-2\psi_{pQ}). \tag{1.10.65}$$

$$g_{33}=-\gamma^2\sin^2\theta\exp(-2\psi_J-2\psi_p-2\psi_{JQ}-2\psi_{pQ}). \tag{1.10.66}$$

式中 γ_J，γ_{pQ}，γ_p 和 γ_{JQ} 的明显表达式已由(56)～(62)给出；ψ_J 由(14)给出：

$$\psi_J=\frac{1}{4}J(3\cos^2\theta-1)\left\{\frac{45}{2m^4}(r-m)+\frac{15}{4m^5}\right.$$

$$\left.(3r^2-6mr+2m^2)\times\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}; \tag{1.10.67}$$

ψ_{pQ} 由(36b)和(35)给出：

$$\psi_{pQ}=\frac{-3pQ\cos\theta}{2m^2}\left\{\frac{4}{m}-\frac{1}{r}+\left(\frac{2r}{m^2}-\frac{5}{m}\right)\ln\left(1-\frac{2m}{r}\right)\right\}; \tag{1.10.68}$$

ψ_p 和 ψ_{JQ} 由(36a)和(36c)给出，其级数形式为

$$\psi_p=\frac{kp^2}{r^4}\left\{\frac{1}{2}\cos^2\theta+\frac{m}{r}\left(\frac{1}{35}+\frac{12}{7}\cos^2\theta\right)\right\}+o\left(\frac{1}{r^6}\right), \tag{1.10.69}$$

$$\psi_{JQ}=\frac{3kJQ^2}{r^5}\left(\frac{3}{14}\cos^2\theta-\frac{1}{14}\right)+\sigma\left(\frac{1}{r^6}\right). \tag{1.10.70}$$

当 $J=0$，$p=0$ 时，度规(63)～(66)退化为 Reissner-Nardstrom 度规. 当 $Q=0$，$p=0$ 时，度规(63)～(66)退化为质量四极矩的引力场度规.

§1.11 Tolman 解

1. 无压流体(Tolman 度规的场源)

描述这类物质的能-动张量可写为

$$T^{\mu\nu}=\rho u^{\mu}u^{\nu}+P^{\mu\nu}. \tag{1.11.1}$$

式中 ρ 是质量密度，u^{α} 是单个粒子的四维速度，$u^{\alpha}=\mathrm{d}x^{\alpha}/\mathrm{d}s$，$P^{\mu\nu}$ 是应力张量(取 $c=1$). 对于理想流体，其压强各向同性，则应力张量 $P^{\mu\nu}$ 可表示为

$$P^{\mu\nu}=p(u^{\mu}u^{\nu}-g^{\mu\nu}). \tag{1.11.2}$$

式中 p 是压强. 如果压强等于零，则 $T^{\mu\nu}$ 简化为更简单的形式：

$$T^{\mu\nu}=\rho u^{\mu}u^{\nu}. \tag{1.11.3}$$

将上式代入守恒律 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$，容易得到

$$u^{\nu}u^{\mu}_{;\nu}=0. \tag{1.11.4}$$

$$(\rho u^{\mu})_{;\mu}=0. \tag{1.11.5}$$

方程(1.11.4)表明，流体中每一质点沿短程线运动，方程(1.11.5)表示静质量守恒.

2. 随动坐标系

如果流体内所有粒子的轨迹可以用类时的、不相交的曲线族来描述，对于局部观察者，可以选取这些轨迹为新的类时坐标. 这样的坐标系称为**随动坐标系**. 变换到随动坐标系时，类时坐标 t 和径向坐标 r 分别变为 t' 和 r'，角坐标 θ 和 φ 可以保持不变. 因此，场的球对称性质保持不变. 消除交叉项之后，随动坐标系中普遍的球对称度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2=u\mathrm{d}t^2-v\mathrm{d}r^2-w\mathrm{d}\Omega^2. \tag{1.11.6}$$

式中 $\mathrm{d}\Omega^2=\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$，$u=u(r,t)$，$v=v(r,t)$，$w=w(r,t)$. 为了简便，上式中 t' 和 r' 的撇号已去掉.

粒子的轨迹由短程线方程(1.11.4)描述，在随动坐标系中，沿这些短程线坐标 r，θ，φ 均不变. 因此四维速度是

$$u^\mu=(u^0,\ 0,\ 0,\ 0). \tag{1.11.7}$$

式中 $u^0=\mathrm{d}t/\mathrm{d}s$. 于是短程线方程可写为

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s}+\Gamma^\mu_{00}u^{02}=0, \tag{1.11.8}$$

由此得 $\Gamma^i_{00}=0(i=1,\ 2,\ 3)$，$\partial_i g_{00}=0$. 即 $g_{00}=g_{00}(t)$，只是类时坐标的函数.

令 $\quad \mathrm{d}t'=u^{1/2}\mathrm{d}t, \tag{1.11.9}$

其他坐标不变，则(1.11.6)可写为

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -e^\mu & & \\ & & -R^2 & \\ 0 & & & -R^2\sin^2\theta\end{pmatrix}, \tag{1.11.10}$$

$g^{\mu\nu}$具有形式

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & -e^{-\mu} & & \\ & & -R^{-2} & \\ 0 & & & -R^{-2}\sin^{-2}\theta\end{pmatrix}. \tag{1.11.11}$$

为了简便，在上式中最后又去掉 t' 的撇号，并代人 $e^\mu=v$，$R^2=w$. μ 和 R 只含 t 和 r.

按照这里选择的坐标系，短程线方程(1.11.8)的零分量成为恒等式. 沿短程线 $\mathrm{d}\gamma=\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\varphi=0$，我们有 $\mathrm{d}x^0=\mathrm{d}s$，从而有

$$u_\mu=u^\mu=(1,\ 0,\ 0,\ 0). \tag{1.11.12}$$

由(1.11.10)和(1.11.11)可得 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$的不为零分量：

$$\Gamma^1_{01}=\frac{1}{2}\mu,\ \Gamma^2_{02}=\Gamma^3_{03}=R^{-1}R,$$

$$\Gamma^0_{11}=\frac{1}{2}e^\mu\mu,\ \Gamma^1_{11}=\frac{1}{2}\mu',$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^3_{13}=R^{-1}R',$$

$$\Gamma^0_{22}=RR,\ \Gamma^1_{22}=-e^{-\mu}RR',$$

$$\Gamma^3_{23}=\cot\theta,\ \Gamma^0_{33}=RR\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1_{33}=-e^{-\mu}RR'\sin^2\theta,\ \Gamma^2_{33}=-\sin\theta\cos\theta, \tag{1.11.13}$$

式中 $\mu=\frac{\partial\mu}{\partial t},\mu'\equiv\frac{\partial\mu}{\partial r}$.

由(1.11.13)可得 $R_{\mu\nu}$的不为零分量：

$$R_{00}=-\frac{1}{2}\mu-\frac{2}{R}R-\frac{1}{4}\mu^2,$$

$$R_{01}=\frac{1}{R}R'\mu-\frac{2}{R}R',$$

$$R_{11}=e^{\mu}\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{4}\mu^2+\frac{1}{R}\mu R\right)+\frac{1}{R}(\mu'R'-2R''),$$

$$R_{22}=RR+\frac{1}{2}RR\mu+R^2+1-$$

$$e^{-\mu}\left(RR''-\frac{1}{2}RR'\mu'+R'^2\right),$$

$$R_{33}=\sin^2\theta R_{22}, \tag{1.11.14}$$

标曲率为

$$R=2e^{-\mu}\left[\frac{2}{R}R''+\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\frac{1}{R}R'\mu'\right]-\frac{2}{R}R\mu$$

$$2\left(\frac{R}{R}\right)^2-\frac{2}{R^2}-\frac{4}{R}R-\mu-\frac{1}{2}\mu^2. \tag{1.11.15}$$

由(1.11.12)可知，$T_{\mu\nu}$只有一个分量不为零，即 $T_{00}=\rho$，而且 $T=\rho$. 将这些结果和(1.11.14)，(1.11.15)代入场方程

$$R_{\mu\nu}=4\pi\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right),$$

$$T_{\mu\nu}=\rho u_\mu u_\nu, \tag{1.11.16}$$

得到 μ 和 R 满足的方程：

$$-\mu-\frac{4}{R}R-\frac{1}{2}\mu^2=4\pi\rho, \tag{1.11.17}$$

$$2R'-R'\mu=0 \tag{1.11.18}$$

$$\mu+\frac{1}{2}\mu^2+\frac{2}{R}R\mu+e^{-\mu}\left(\frac{2}{R}R'\mu'-\frac{4}{R}R''\right)=4\pi\rho, \tag{1.11.19}$$

$$\frac{2}{R}R+2\left(\frac{R}{R}\right)^2+\frac{1}{R}R\mu+\frac{2}{R^2}+e^{-\mu}\left[\frac{1}{R}R'\mu'-2\left(\frac{R'}{R}\right)^2-\right.$$

$$\left.\frac{2}{R}R''\right]=4\pi\rho. \tag{1.11.20}$$

由(1.11.17)～(1.11.20)消去含 μ 的项，得到三个方程：

$$e^{\mu}(2R\ddot{R}+\dot{R}^{2}+1)-R'^{2}=0, \tag{1.11.21}$$

$$2\dot{R}'-R'\dot{\mu}=0, \tag{1.11.22}$$

$$e^{-\mu}\left[\frac{1}{R}R'\mu'-\left(\frac{R'}{R}\right)^{2}-\frac{2}{R}R''\right]+\frac{1}{R}\dot{R}\dot{\mu}+\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{2}+\frac{1}{R^{2}}=4\pi\rho. \tag{1.11.23}$$

度规(1.11.10)表明，$r=\text{const}$ 的球面的面积是 $4\pi R^{2}$，而且 R 应满足条件 $R'\equiv\frac{\partial R}{\partial r}>0$. 方程(1.11.22)满足这一条件的解为

$$e^{\mu}=R'^{2}/[1+f(r)],\quad f(r)>-1. \tag{1.11.24}$$

将(1.11.24)代入(1.11.10)，得到度规的表达式：

$$\mathrm{d}s^{2}=\mathrm{d}t^{2}-\frac{R'^{2}}{1+f(r)}\mathrm{d}r^{2}-R^{2}(\mathrm{d}\theta^{2}+r^{2}\sin^{2}\theta), \tag{1.11.25}$$

此即 Tolman 度规.

将(1.11.24)代入(1.11.21)和(1.11.23)，得到

$$2R\ddot{R}+\dot{R}^{2}-f=0,$$

$$\frac{1}{RR'}(2\dot{R}\dot{R}'-f')+\frac{1}{R^{2}}(\dot{R}^{2}-f)=4\pi\rho. \tag{1.11.26}$$

积分(1.11.25)，得到

$$\dot{R}^{2}+f(r)=\frac{F(r)}{R}. \tag{1.11.27}$$

式中 $F(r)$ 为 r 的任意函数. 将(1.11.27)代入(1.11.26)得

$$\frac{F'}{R^{2}R'}=4\pi\rho. \tag{1.11.28}$$

我们讨论 $f(r)=0$ 的特殊情况. 此时(1.11.27)简化为

$$\dot{R}^{2}=\frac{F(r)}{R}. \tag{1.11.29}$$

积分此方程得

$$R(t,r)=\left[R^{3/2}(r)\pm\frac{3}{2}F^{1/2}(r)t\right]^{2/3}. \tag{1.11.30}$$

式中 $\quad R(r)=R(0,r).$ (1.11.31)

将(1.11.30)对 r 微分并利用(1.11.28)，还可得到

$$R(t, r)=(4\pi\rho)^{-2/3}\left[\frac{R^{1/2}(r)R'(r)}{F'(r)}\pm\frac{t}{2F^{1/2}(r)}\right]^{-2/3}. \tag{1.11.32}$$

另外，由(1.11.28)还可得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(R^2R'\rho)=0. \tag{1.11.33}$$

§ 1.12 Wilson 解

静止带电流体球的内部解，已有人给出. 1965 年，Efinger 给出一个严格解，此解在原点 $r=0$ 处有一奇点. 1967 年，Kyle 和 Martin 给出一个解. 1969 年，Wilson 又给出一个解. Kyle 和 Martin 的解都消除了原点 $r=0$ 的奇异性. 当然，这些解在 $r\neq 0$ 处仍可以有奇点，于是他们对流体球加以一定的限制，以避开这些奇点，下面我们求静止带电流体球内部场方程的解，附加一些条件，得到一个球内没有奇点的解. 所得到的度规是：球对称的，而且遍及整个球，压强，质量密度等都是有限的. 因此，所得到的解满足球内的物理条件.

将球对称度规($c=G=1$)

$$ds^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.12.1}$$

代入场方程

$$R^{\nu}_{\mu}-\frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R=8\pi(M^{\nu}_{\mu}+E^{\nu}_{\mu}), \tag{1.12.2}$$

$$F^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}=4\pi\sigma u^{\mu}. \tag{1.12.3}$$

$$F_{\mu\nu;\alpha}+F_{\nu\alpha;\mu}+F_{\alpha\mu;\nu}=0. \tag{1.12.4}$$

式中 $M^{\nu}_{\mu}=(\rho+p)u^{\nu}u_{\mu}-g^{\nu}_{\mu}p$.

$$E^{\nu}_{\mu}=\frac{1}{4\pi}\left(-F^{\nu\sigma}F_{\mu\sigma}+\frac{1}{4}\delta^{\nu}_{\mu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \tag{1.12.5}$$

其中 ρ 和 σ 分别为质量密度和电荷密度.

静止情况下，$u^i=0$，$u^0=g_{00}^{-1/2}$. 假设场完全是静电场，即 F_{ik}

$=0$，$F_{0k}=\phi_{,k}\equiv\phi_k$，这里 ϕ 是静电势.

场方程化为

$$e^{-\lambda}\left(\frac{v'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}=8\pi p-E. \tag{1.12.6}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{v''}{2}-\frac{\lambda' v'}{4}+\frac{v'^2}{4}+\frac{v''-\lambda'}{2r}\right)=8\pi p+E, \tag{1.12.7}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2}=8\pi\rho+E. \tag{1.12.8}$$

式中 $$E=-F^{01}F_{01}, \tag{1.12.9}$$

$$4\pi\sigma=\left(\frac{\mathrm{d}F^{01}}{\mathrm{d}r}+\frac{2}{r}F^{01}+\frac{\lambda'+v'}{2}F^{01}\right)e^{\frac{v}{2}}. \tag{1.12.10}$$

方程(1.12.6)～(1.12.8)可改写为

$$8\pi p=\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{3}{2}\frac{v'}{r}+\frac{v''}{2}-\frac{\lambda' v'}{4}+\frac{v'^2}{4}-\frac{\lambda'}{2r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{2r^2}, \tag{1.12.11}$$

$$E=\frac{e^{-\lambda}}{2}\left(\frac{v''}{2}-\frac{\lambda' v'}{4}+\frac{v'^2}{4}-\frac{v'}{2r}-\frac{\lambda'}{2r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{2r^2}, \tag{1.12.12}$$

$$8\pi\rho=e^{-\lambda}\left(\frac{5}{4}\frac{\lambda'}{r}-\frac{v''}{4}+\frac{\lambda' v'}{8}-\frac{v'^2}{8}+\frac{v'}{4r}-\frac{1}{2r^2}\right)+\frac{1}{2r^2}. \tag{1.12.13}$$

这里，我们有四个方程：(1.12.6)～(1.12.8)和(1.12.10)，有六个未知量：ρ，E，p，λ，v 和 σ. 因此，有两个变量可以自由选择. 我们取 λ 和 v 为这两个自由选择的变量. 为了使 $r\to 0$ 时不出现奇异性，由方程(1.12.11)～(1.12.13)可知，只要令

$$\lambda=Ar^2, \tag{1.12.14}$$

$$v=Br^2+C. \tag{1.12.15}$$

式中 A，B 和 C 是任意常数.

将 (1.12.14) 及 (1.12.15) 代入 (1.12.6) ～ (1.12.8) 和 (1.12.10)，我们得到

$$16\pi p=e^{-Ar^2}\left(4B-2A+B(B-A)r^2+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2}, \tag{1.12.16}$$

$$2E = e^{-Ar^2}\left(B(B-A)r^2 - \frac{1}{2}A^2r^2 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \quad (1.12.17)$$

$$16\pi\rho = e^{-Ar^2}\left(6A - B(B-A)r^2 - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}. \quad (1.12.18)$$

$$4\pi\sigma = \left(\frac{\mathrm{d}F^{01}}{\mathrm{d}r} + \frac{2}{r}F^{01} + (A+B)rF^{01}\right)e^{(Br^2-C)/2}. \quad (1.12.19)$$

式中

$$F^{01} = \left[e^{-2Ar^2-Br^2-C}\left(\frac{1}{2}B^2r^2 - \frac{AB}{2}r^2 - \frac{A}{2} - \frac{1}{2r^2}\right) + \frac{e^{-Ar^2-Br^2-C}}{2r^2}\right]^{1/2}. \quad (1.12.20)$$

在 $r=0$ 处，由方程(1.12.16)～(1.12.20)我们有

$$16\pi p_0 = 4B - 2A, \quad (1.12.21)$$

$$E_0 = 0, \quad (1.12.22)$$

$$16\pi\rho_0 = 6A, \quad (1.12.23)$$

$$4\pi\sigma_0 = \frac{3}{2}[B^2 + (A-B)^2]^{1/2}. \quad (1.12.24)$$

为了使 p_0 和 ρ_0 都是正的，必须有

$$2B \geqslant A, \quad (1.12.25)$$

$$A \geqslant 0. \quad (1.12.26)$$

进而，对于 $\rho_0 \geqslant 3p_0$，

$$A \geqslant B. \quad (1.12.27)$$

条件(1.12.25)和(1.12.27)合写为

$$2B \geqslant A \geqslant B. \quad (1.12.28)$$

下面我们给出边界($r=r_1$)处所满足的条件

(1) $p_1 = 0$. 由方程(1.12.16)得到

$$e^{-Ar_1^2}\left(4B - ABr_1^2 + B^2r_1^2 - 2A + \frac{1}{r_1^2}\right) - \frac{1}{r_1^2} = 0. \quad (1.12.29)$$

由于这一方程具有唯一解 r_1，而且 $r=0$ 处压强 $p_0>0$，所以在整个球内($r<r_1$)都有 $p>0$.

(2) $r=r_1$ 处有 $E_1 = \frac{Q^2}{r_1^4}$. 式中 Q 是球的总电荷. 由方程(1.12.17)和(1.12.29)可得

$$e^{-Ar_1^2}\left(2Br_1+\frac{1}{r_1}\right)=\frac{1}{r_1}-\frac{Q^2}{r_1^3}. \tag{1.12.30}$$

$Q^2>0$，由(1.12.17)和(1.12.29)给出下面的条件：

$$r_1^2<\frac{2B-A}{B(A-B)}. \tag{1.12.31}$$

条件(1.12.28)表明上式的右端是正的.

我们还可以看到，整个球的 E 是正的. 由方程(1.12.17)可得

$$2E=e^{-Ar^2}\left\{\frac{1}{2}\left[B^2+(A-B)^2\right]r^2+\frac{A^3r^4}{3!}+\frac{A^4r^6}{4!}+\cdots\right\}. \tag{1.12.32}$$

显然上式右端是正的.

(3) $\rho_1\geqslant 0$. 由方程(1.12.18)和(1.12.29)得到

$$A+B\geqslant 0. \tag{1.12.33}$$

条件(1.12.33)表明，在 $r=r_1$ 处 ρ_1 不可能等于零. 因为若 $\rho_1=0$，则由(1.12.25)和(1.12.26)确定的正数 A 和 B 都等于零. 这导致整个球内 $\rho=E=p=\sigma=0$，即球本身不存在.

我们很容易看到，整个球内 ρ 都是正的. 由方程(1.12.18)可得

$$16\pi\rho=e^{-Ar^2}\left[6A+B(A-B)r^2+\frac{A^2r^2}{2!}+\frac{A^3r^4}{3!}+\cdots\right]. \tag{1.12.34}$$

显然上式的右端是正的.

(4) $\lambda_1+\nu_1=0$. 应用方程(1.12.14)和(1.12.15)，得到

$$Ar_1^2+Br_1^2+C=0. \tag{1.12.35}$$

方程(1.12.35)表明 C 是负的，因为 A，B 和 r_1^2 都是正的.

(5) $e^{-\lambda_1}=1-\dfrac{2m}{r_1}+\dfrac{4\pi Q^2}{r_1^2}$，式中 M 是球的质量. 应用方程(1.12.14)，得到

$$e^{-Ar_1^2}=1-\frac{2M}{r_1}+\frac{4\pi Q^2}{r_1^2}. \tag{1.12.36}$$

本节得到的解(Krori 和 Barua，1975)在中心和边界处都是

正常的，满足物理条件.

§1.13 Einstein-Rosen 解

这一度规描述柱面引力波，它在宇宙学中有重要应用. 前面的 Weyl-Levi-Civita 度规描述静止的轴对称的引力场. 将其中(1.7.34)的坐标 z 和 t 对换，得到线元($c=1$)

$$ds^2=e^{2\gamma-2\psi}(dt^2-d\rho^2)-e^{-2\psi}\rho^2 d\varphi^2-e^{2\psi}dz^2. \tag{1.13.1}$$

由(1.13.1)可将 Einstein 场方程写为

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0, \tag{1.13.2a}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\rho\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right], \tag{1.13.2b}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=2\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{1.13.2c}$$

首先，我们讨论波动方程(1.13.2a)的周期解. 其一般形式为

$$\psi=AJ_0(\omega\rho)\cos(\omega t+\alpha)+BN_0(\omega\rho)\cos(\omega t+\beta). \tag{1.13.3}$$

式中 $J_0(\omega\rho)$和 $N_0(\omega\rho)$分别是第一类和第二类 Bessel 函数，A，B，ω，α，β 为常数. 作为一个特殊情况，我们讨论特解

$$\psi=AJ_0(\omega\rho)\cos\omega t, \tag{1.13.4}$$

这是一驻波解. 将此解代入(1.13.2b)和(1.13.2c)，得到

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=A^2\omega^2\rho\{[J_0'(\omega\rho)]^2\cos^2\omega t+[J_0(\omega\rho)]^2\sin^2\omega\tau\}, \tag{1.13.5}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t}=-A^2\omega^2\rho J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho)\sin 2\omega t, \tag{1.13.6}$$

积分，得到

$$\gamma=\frac{1}{2}A^2\omega\rho J_0(\omega\rho)J_0'(\omega p)\cos 2\omega t+\frac{1}{2}A^2\omega^2\rho^2\times \\ \{[J_0'(\omega\rho)]^2-J_0(\omega\rho)J_0''(\omega\rho)\}. \tag{1.13.7}$$

显然，ψ 和 γ 都是 t 的周期函数.

如果我们取

$$\psi = BN_0(\omega\rho)\cos\omega t$$

代替(1.13.4)，则得到的解在原点有奇异性. 此解可解释为无限长质量线发出的柱对称的引力驻波.

如果取

$$\psi = AJ_0(\omega\rho)\cos\omega t + AN_0(\omega\rho)\sin\omega t, \tag{1.13.8}$$

考虑到 ρ 很大时 Bessel 函数渐近展开式

$$J_0(\omega\rho) \simeq \left(\frac{2}{\pi\omega\rho}\right)^{1/2}\cos\left(\omega\rho - \frac{\pi}{4}\right), \tag{1.13.9}$$

$$N_0(\omega\rho) \simeq \left(\frac{2}{\pi\omega\rho}\right)^{1/2}\sin\left(\omega\rho - \frac{\pi}{4}\right), \tag{1.13.10}$$

我们有

$$\psi \simeq A\left(\frac{2}{\pi\omega\rho}\right)^{1/2}\cos\left(\omega\rho - \omega t - \frac{\pi}{4}\right). \tag{1.13.11}$$

这是一个向外传播的柱面波.

将展开式(1.13.10)代入(1.13.2b)和(1.13.2c)，积分后得到

$$\begin{aligned}\gamma = \frac{1}{2}A^2\omega\rho\{&J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho) + N_0(\omega\rho)N_0'(\omega\rho) + \\ &\omega\rho[J_0^2(\omega\rho) + J_0'^2(\omega\rho) + N_0^2(\omega\rho) + N_0'^2(\omega\rho)] + \\ &[J_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho) - N_0(\omega\rho)N_0'(\omega\rho)]\cos 2\omega t - \\ &[J_0(\omega\rho)N_0'(\omega\rho) + N_0(\omega\rho)J_0'(\omega\rho)]\sin 2\omega t\} - \frac{2}{\pi}A^2\omega t.\end{aligned} \tag{1.13.12}$$

此解中含有一个时间的非周期项. 由于引力能量的连续转移，使度规张量发生非周期性变化.

下面研究脉冲解.

我们讨论从 z 轴发出的脉冲波. 将波函数 ψ 取为

$$\psi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{f(t')\mathrm{d}t'}{[(t-t')^2 - \rho^2]}. \tag{1.13.13}$$

式中 $\tau = t - \rho$ 是延迟时间；$f(t)$ 是波源强度，假设当 $t < -t_0$ 时 $f(t) = 0$，t_0 为一有限时间. 容易验证(1.3.13)满足方程

(1.13.2a).

以下讨论几个例子.

1. 取波源函数为

$$f(t)=f_0\delta(t). \tag{1.13.14}$$

式中 f_0=const. 将(1.13.14)代入(1.13.13)得

$$\psi=0,\ \tau<0. \tag{1.13.15a}$$

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\frac{f_0}{(t^2-\rho^2)^{1/2}},\ \tau>0. \tag{1.13.15b}$$

由方程(1.13.2b)和(1.13.2c)可知

$$\gamma=0,\ \tau<0. \tag{1.13.16a}$$

$$\gamma=\frac{1}{8\pi^2}\frac{f_0^2\rho^2}{(t^2-\rho^2)},\ \tau>0. \tag{1.13.16b}$$

这是波源为尖脉冲的情况. 与 $\tau=t-\rho=0$ 对应的波前为奇异面. 接着有一个“尾巴”持续很长时间.

2. 取波源函数为

$$f(t)=0,\ t<0.$$
$$f(t)=f_0,\ 0<t<T.$$
$$f(t)=0,\ t>T. \tag{1.13.17}$$

式中 f_0=const. 将(1.13.17)代入(1.13.13)积分得

$$\psi=0,\ \tau<0.$$

$$\psi=\frac{f_0}{2\pi}\ln\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{\rho},\ 0<\tau<T.$$

$$\psi=\frac{f_0}{2\pi}\ln\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{t-T+[(t-T)^2-\rho^2]^{1/2}},\ \tau<T. \tag{1.13.18}$$

积分(1.13.2b)和(1.13.2c)得

$$\gamma=0,\ \tau<0.$$

$$\gamma=\left(\frac{f_0}{2\pi}\right)^2\ln\frac{\rho}{t^2-\rho^2},\ 0<\tau<T$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{\pi}\right)^2\ln\frac{t^2-Tt-\rho^2+x^2}{x^2},\ \tau>T. \tag{1.13.19}$$

式中 $$x^2=\{(t^2-\rho^2)[(t-T)^2-\rho^2]\}^{1/2}. \tag{1.13.20}$$

可以看到，在这种情况下 ψ 和 γ 仍有奇点，这是由于源函数 f 的

不连续性引起的.

3. 取波源函数为连续函数

$$f(t)=0,\ t<0; \tag{1.13.21a}$$

$$f(t)=f_0 t,\ t>0. \tag{1.13.21b}$$

式中 $f_0=\text{const}$. 在这种情况，重复前面的步骤，容易得到

$$\psi=0,\ \tau<0.$$

$$\psi=\frac{f_0}{2\pi}\left[t\ln\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{\rho}-(t^2-\rho^2)^{1/2}\right],\ \tau>0; \tag{1.13.22}$$

$$\gamma=0,\ \tau<0.$$

$$\gamma=\left(\frac{f_0}{2\pi}\right)^2\left[\frac{1}{2}(t^2-\rho^2)+\frac{1}{2}\rho^2\ln^2\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{\rho}-t(t^2-\rho^2)^{1/2}\ln\frac{t+(t^2-\rho^2)^{1/2}}{\rho}\right],\ \tau>0. \tag{1.13.23}$$

函数 ψ 和 γ 在 $\tau=t-\rho=0$ 处的奇点已被消除.

4. 为了清楚 t 很大时解的行为，令源函数为

$$f(t)=0,\ t<0;$$

$$f(t)=0,\ t>T. \tag{1.13.24}$$

设 $\tau=t-\rho\geqslant T$，则积分(1.13.13)的渐近式可写为

$$\psi\simeq\frac{1}{2\pi}\frac{f_0}{(t^2-\rho^2)^{1/2}}. \tag{1.13.25}$$

式中

$$f_0=\int_0^T f(t')\mathrm{d}t'. \tag{1.13.26}$$

从而得到

$$\gamma\simeq\frac{1}{2}\left[\frac{f_0\rho}{2\pi(t^2-\rho^2)}\right]^2, \tag{1.13.27}$$

可见波的“尾”已消除.

§1.14 Kerr-Newman 解

Kerr 度规描述一个匀角速转动球体的外部引力场；Kerr-Newman 度规描述一个匀角速转动荷电球体的外部引力场. 我们先讨论 Kerr-Newman 度规，而把 Kerr 度规作为其特殊情况. 在

§1.15、§3.5 和 §3.15 中还要给出 Kerr 解的推导.

我们由 Reissner-Nordstrom 度规经过复坐标变换获得 Kerr-Newman 度规(Newman，1965).

作变换

$$r'=r,\ \theta'=\theta,\ \varphi'=\varphi.$$

$$du^2=dt^2-\frac{r^2dr}{r^2-2mr+e^2},\tag{1.14.1}$$

可把 Reissner-Nordstrom 度规(1.3.9)写为(取 $c=1$)

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right)du^2+2dudr-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),\tag{1.14.2a}$$

即

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -r^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta\end{pmatrix}.\tag{1.14.2b}$$

由此得到

$$g=-r^4\sin^2\theta,$$

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{e^2}{r^2}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2}\sin^{-2}\theta\end{pmatrix}.\tag{1.14.3}$$

引入零标架 l^μ，n^μ，m^μ 和 $\overline{m}^\mu$；

$$l^\mu=\delta_1^\mu,$$

$$n^\mu=\delta_0^\mu-\left(\frac{1}{2}-\frac{m}{r}+\frac{e^2}{2r^2}\right)\delta_1^\mu,$$

$$m^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{r}\left(\delta_2^\mu+\frac{i}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right).\tag{1.14.4}$$

此时度规可写为

$$g^{\mu\nu}=l^\mu n^\nu+n^\mu l^\nu-m^\mu\overline{m}^\nu-\overline{m}^\mu m^\nu.\tag{1.14.5}$$

(1.14.4)就是采用零标架表象的 Ressner-Nordstrom 度规.把(1.14.4)中的 r 延拓到复数空间，并把零标架改写为

$$
\begin{aligned}
& l^{\mu}=\delta_{1}^{\mu}, \\
& n^{\mu}=\delta_{0}^{\mu}-\frac{1}{2}\left[1-m\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\bar{r}}\right)+\frac{e^{2}}{r\bar{r}}\right]\delta_{1}^{\mu}, \qquad (1.14.6) \\
& m^{\mu}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{r}\right)\left[\delta_{2}^{\mu}+\frac{i}{\sin\theta}\delta_{3}^{\mu}\right].
\end{aligned}
$$

作变换

$$
\begin{aligned}
& r'=r+ia\cos\theta, \\
& u'=u-ia\cos\theta. \qquad (1.14.7)
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}r'=\mathrm{d}r-ia\sin\theta\mathrm{d}\theta, \\
& \mathrm{d}u'=\mathrm{d}u+ia\sin\theta\mathrm{d}\theta. \qquad (1.14.8)
\end{aligned}
$$

由于标架矢量是坐标空间的四维矢量，我们得到变换后的标架矢量：

$$
\begin{aligned}
& l'^{\mu}=\delta_{1}^{\mu}, \\
& m'^{\mu}=[\sqrt{2}(r'+ia\cos\theta)]^{-1}\times \\
& \qquad \left[ia\sin\theta(\delta_{0}^{\mu}-\delta_{1}^{\mu})+\delta_{2}^{\mu}+\frac{i}{\sin\theta}\delta_{3}^{\mu}\right], \\
& n'^{\mu}=\delta_{0}^{\mu}-\left[\frac{1}{2}-\left(mr'-\frac{e^{2}}{2}\right)(r'^{2}+a^{2}\cos^{2}\theta)^{-1}\right]\delta_{1}^{\mu}, \\
& g'^{\mu\nu}=l'^{\mu}n'^{\nu}+n'^{\mu}l'^{\nu}-m'^{\mu}\overline{m}'^{\nu}-\overline{m}'^{\mu}m'^{\nu}.
\end{aligned}
$$

我们有

$$
g^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}
\rho^{-2}(-a^{2}\sin^{2}\theta) & \rho^{-2}(r^{2}+a^{2}) & 0 & -\rho^{-2}a \\
\rho^{-2}(r^{2}+a^{2}) & \rho^{-2}[2mr-(r^{2}+a^{2})-e^{2}] & 0 & \rho^{-2}a \\
0 & 0 & -\rho^{-2} & 0 \\
-\rho^{2}a & \rho^{-2}a & 0 & \rho^{-2}(-\sin^{-2}\theta)
\end{bmatrix},
$$

$$
g_{\mu\nu}=
$$

$$
\begin{bmatrix}
1+\rho^{-2}(e^{2}-2mr) & 1 & 0 & \rho^{-2}(a\sin^{2}\theta)(2mr-e^{2}) \\
1 & 0 & 0 & -a\sin^{2}\theta \\
0 & 0 & -\rho^{-2} & 0 \\
\rho^{-2}(a\sin^{2}\theta)(2mr-e^{2}) & -a\sin^{2}\theta & 0 & -\sin^{2}\theta\left[r^{2}+a^{2}+\dfrac{a^{2}\sin^{2}\theta(2mr-e^{2})}{r^{2}+a^{2}\cos^{2}\theta}\right]
\end{bmatrix}
$$

(1.14.9)

式中 $\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$.

由(1.14.9)，(1.14.7)和(1.14.1)，最后得到

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\Delta}{\rho^2}[\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi]^2 - \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \rho^2\mathrm{d}\theta^2. \tag{1.14.10}$$

式中 $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2 + e^2$.

式(1.14.10)就是 Kerr-Newman 度规.

Kasuya(1982)将 Kerr-Newman 度规推广到场源含磁荷的情况. 在 Boyer-Lindquist 坐标中，Kerr-Newman-Kasuya 度规表示为

$$\mathrm{d}s^2 = \left\{1 - \frac{2mr - (e^2+q^2)}{\Sigma}\right\}\mathrm{d}t^2 - \frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2 - \Sigma\mathrm{d}\theta^2 - \left\{\frac{[2mr-(e^2+q^2)]a^2\sin^2\theta}{\Sigma} + (r^2+a^2)\right\} \times \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2 + \frac{2a\sin^2\theta}{\Sigma}\{2mr - (e^2+q^2)\}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t. \tag{1.14.11}$$

式中 $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, $\Delta = r^2 + a^2 + e^2 + q^2 - 2mr$,

$$a = \frac{J}{m}.$$

m, e 和 q 分别表示源的质量，电荷和磁荷.

当 $e=0$ 时，(1.14.10)退化为

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t^2 - \frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2-2mr+a^2}\mathrm{d}r^2 - (r^2+a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2 - \left(r^2+a^2+\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right) \times \sin^2\theta d\varphi^2 - \frac{4mar\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi. \tag{1.14.12}$$

这就是著名的 Kerr 度规.

在(1.14.10)中令 $a=0$，便得到 Reissner-Nordstrom 度规. 此度规在时间反演($t \to -t$)变换下形式不变，是一个静态球对称度规. 当 $a \neq 0$ 时，度规(1.14.10)不具有时间反演不变性，是一

个稳态轴对称度规.

为了说明参量 a 的物理意义，我们把 Kerr 度规按 $\frac{a}{r}$ 展开，保留一阶项，得到

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 - \\
& r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)+4\frac{ma}{r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

引入坐标变换 $r=r'\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2$，可把上式化为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\frac{\left(1-\frac{m}{2r'}\right)^2}{\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2}\mathrm{d}t^2 - \left(1+\frac{m}{2r'}\right)^4 \times \\
& [\mathrm{d}r'^2+r'^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)]+ \\
& \frac{4ma}{r'\left(1+\frac{m}{2r'}\right)^2}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

按 $\frac{m}{r'}$ 展开，保留一阶项得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left(1-\frac{m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1+\frac{2m}{r}\right)\times \\
& (\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)+\frac{4ma}{r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{1.14.13}
$$

将(1.14.13)和 Lense 所得到的转动球体外部度规(弱场近似)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 = &\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2 - \left(1+\frac{2m}{r}\right)\times \\
& (\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)+4\frac{GJ}{c^3r}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

相比较，可得

$$
ma=\frac{GJ}{c^3}.
$$

由于 $m=\frac{GM}{c^2}$，故

$$a=\frac{J}{Mc},$$

$ac=J/M$，即单位质量的角动量，常称为比角动量.

由此可知，Kerr 度规和 Kerr-Newman 度规描述转动球体的外部引力场.

§1.15 Kerr 度规的直接推导

上节中我们用复延拓的方法由 R-N 度规获得了 Kerr-Newman 度规和 Kerr 度规，由于不是解引力场方程得到的，所以不能算是严格推导，只能靠代入场方程验算，来证实它满足场方程. 本节采用直接解引力场方程的方法导出 Kerr 度规(Klotz，1982). 我们还将在 § 3.5 和 § 3.15 中用 Ernst 方法和孤立子方法给出 Kerr 度规的标准解析推导.

按照 Klotz 的符号，稳态辐射对称度规可以写为

$$ds^2=\gamma d\tau^2-\Sigma(d\zeta^2+d\theta^2+\frac{q}{a}d\varphi^2)+2qd\tau d\varphi. \qquad (1.15.1)$$

式中 $\gamma=\gamma(\zeta,\theta)$，$\Sigma=\Sigma(\zeta,\theta)$，$q=q(\theta)$，$a=\text{const}.$

(1.15.2)

作变换 $d\tau=dt-qd\varphi$， (1.15.3)

并设 $\Sigma=a(p-q)$，$p=p(\zeta)$， (1.15.4)

度规(1.15.1)改写为

$$ds^2=\gamma dt^2-a(p-q)d\zeta^2-a(p-q)d\theta^2-[(1-\gamma)q^2+pq]d\varphi^2+2q(1-\gamma)dtd\varphi. \qquad (1.15.5)$$

取坐标 $x^0=t$，$x^1=\zeta$，$x^2=\theta$，$x^3=\varphi$，由(1.15.5)可得

$$\Gamma^0_{01}=\frac{p\gamma_{,1}}{2\Delta},\quad \Gamma^0_{20}=\frac{p\gamma_{,2}+(1-\gamma)^2q_{,2}}{2\Delta}$$

$$\Gamma^0_{13}=-\frac{q[p\gamma_{,1}+(1-\gamma)p_{,1}]}{2\Delta},$$

$$\Gamma^0_{23}=-\frac{q[p\gamma_{,2}+(1-\gamma)^2q_{,2}]}{2\Delta},$$

$$\Gamma^1_{00}=\frac{\gamma_{,1}}{2\Sigma},\ \Gamma^1_{03}=-\frac{q\gamma_{,1}}{2\Sigma},$$

$$\Gamma^1_{11}=-\Gamma^1_{22}=\frac{p_{,1}}{2(p-q)},\ \Gamma^1_{33}=\frac{q(q\gamma_{,1}-p_{,1})}{2\Sigma}$$

$$\Gamma^1_{12}=-\frac{q_{,2}}{2(p-q)},\ \Gamma^2_{00}=\frac{\gamma_{,2}}{\Sigma},$$

$$\Gamma^2_{03}=\frac{(1-\gamma)q_{,2}-q\gamma_{,2}}{2\Sigma},\ \Gamma^2_{11}=-\Gamma^2_{22}=\frac{q_{,2}}{2(p-q)},$$

$$\Gamma^2_{12}=\frac{p_{,1}}{2(p-q)},\ \Gamma^2_{33}=\frac{q^2\gamma_{,2}-[p+2(1-\gamma)q]q_{,2}}{2\Sigma},$$

$$\Gamma^3_{01}=\frac{\gamma_{,1}}{2\Delta},\ \Gamma^3_{02}=\frac{q\gamma_{,2}-\gamma(1-\gamma)q_{,2}}{2q\Delta},$$

$$\Gamma^3_{13}=\frac{\gamma p_{,1}-q\gamma_{,1}}{2\Delta},$$

$$\Gamma^3_{23}=\frac{[p\gamma+(1-\gamma)^2q]q_{,2}-q^2\gamma_{,2}}{2q\Delta},$$

其余 $\Gamma^\tau_{\mu\nu}=0$. (1.15.6)

式中

$$\Delta\equiv\gamma p+(1-\gamma)q. \tag{1.15.7}$$

由(1.15.6)得到 $R_{\mu\nu}$的表达式，只有 R_{00}，R_{03}，R_{11}，R_{12}，R_{22}和 R_{33} 不为零. 其中

$$R_{00}=-\frac{\gamma_{,11}+\gamma_{,22}}{2\Sigma}+\frac{1}{4\Delta\Sigma}[(\gamma^2_{,1}+\gamma^2_{,2})(p-q)+2\gamma_{,2}q_{,2}(1-\gamma)-\gamma p_{,1}\gamma_{,1}]+\frac{\gamma q_{,2}}{4q\Delta\Sigma}\times[-p\gamma_{,2}-2q_{,2}(1-\gamma)^2], \tag{1.15.8}$$

$$R_{03}=\frac{q(\gamma_{,11}+\gamma_{,22})}{2\Sigma}-\frac{q}{4\Delta\Sigma}[p_{,1}\gamma_{,1}(2-\gamma)+3\gamma_{,2}q_{,2}(1-\gamma)+(p-q)(\gamma^2_{,1}+\gamma^2_{,2})]+\frac{1}{4\Delta\Sigma}\{2\Delta[2\gamma_{,2}q_{,2}-(1-\gamma)q_{,22}]+[2\gamma q^2_{,2}(1-\gamma)^2-\gamma_{,2}pq_{,2}]\}+\frac{1}{4q\Delta\Sigma}\gamma pq^2_{,2}(1-\gamma), \tag{1.15.9}$$

$$R_{12}=\frac{\Delta_{,12}}{2\Delta}-\frac{\Delta_{,2}}{4\Delta^2(p-q)}[(p-q)\Delta_{,1}+2\Delta p_{,1}].\tag{1.15.10}$$

显然，方程 $R_{12}=0$ 的一个解是

$$\Delta_{,2}=0,\tag{1.15.11}$$

代入(1.15.7)得

$$\gamma_{,2}=-\frac{(1-\gamma)q_{,2}}{p-q}.\tag{1.15.12}$$

注意到(1.15.2)，积分此式得

$$\gamma=1-\frac{2f}{p-q},\ f=f(\zeta).\tag{1.15.13}$$

引入 σ 代替 ζ：

$$\mathrm{d}\sigma\equiv\Delta^{1/2}\mathrm{d}\zeta,\tag{1.15.14}$$

场方程 $qR_{00}+R_{03}=0$ (1.15.15)

可写为

$$p\left(2\frac{fp}{f}q^2-2qq_{,22}+q_{,2}^2\right)-2q^2p^2-$$

$$q\left(2\frac{fp}{f}q^2+3q_{,2}^2-2qq_{,2}\right)=0.\tag{1.15.16}$$

式中 $f\equiv\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\sigma}$. 注意到 $p=p(\sigma)$，$f=f(\sigma)$，而 $q=q(\theta)$，由上式可得

$$\frac{fp}{f}=k=\mathrm{const},\tag{1.15.17}$$

$$p^2=2kp+n,\ n=\mathrm{const},\tag{1.15.18}$$

$$q_{,2}^2=-2kq^2-nq.\tag{1.15.19}$$

积分(1.15.7)～(1.15.9)，适当选取积分常数值，得到

$$q=-\frac{n}{2k}\sin^2\left[\frac{1}{2}(2k)^{1/2}\theta\right],\tag{1.15.20}$$

$$p=\frac{1}{2k}(k^2\sigma^2-n),\tag{1.15.21}$$

$$f=A\sigma,\ A=\mathrm{const}.\tag{1.15.22}$$

选取常数，使

$$k=2,\ n=-4a,\ A=ma^{-1/2};\tag{1.15.23}$$

引入变量 r，使

$$r \equiv \sqrt{a}\,\sigma, \tag{1.15.24}$$

此时有 $\mathrm{d}r=(a\Delta)^{1/2}\mathrm{d}\zeta$. 将(1.15.23)～(1.15.24)代入(1.15.20)～(1.15.22)，得到

$$q=a\sin^2\theta,\ p=a^{-1}(r^2+a^2),$$
$$f=a^{-1}(mr); \tag{1.15.25}$$

代入(1.15.13)和(1.15.17)得

$$\gamma=1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta};\Delta=a^{-1}(r^2+a^2-2mr). \tag{1.15.26}$$

代入(1.15.15)，得到场方程 $R_{\mu\nu}=0$ 的一个严格解：

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2-2mr}\mathrm{d}r^2-$$
$$(r^2+a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2-\Big[(r^2+a^2)+$$
$$\frac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\Big]\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+\frac{4mra\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi. \tag{1.15.27}$$

此即 Kerr 度规(1.14.12).

桂元星等(1984)用 Klotz 的方法求出了 Kerr-Newman 度规.

2 复合场方程及解

§2.1 标量-电磁-引力复合场

近年来，人们对于用高维空间作低维分解的方法研究统一场论越来越感兴趣，并且构造了几种复合场;但场方程多是不具有明显形式的，因此很难给出它的严格解(哪怕是最简单的球对称解). 这就使人们无法探索复合场产生(预言)的引力效应了.

另一方面，在广义相对论建立时，人们就已经清楚地认识到，物体唯一有意义的运动是相对于宇宙中其他物质的运动. 这一观点可以追溯到马赫原理. 为了充分考虑这一原理，Brans 和 Dicke 在建立场方程时，在拉格朗日密度中引入了一个标量场 φ:

$$\mathscr{L}_{BD}=\left[\varphi R+\frac{16\pi}{c^4}L-\omega(\Delta\varphi)^2\frac{1}{\varphi}\right]\sqrt{-g}.$$

这一理论和广义相对论同样经受住了精度日益提高的引力实验的检验.

本节的目的是建立一种关于标量场、电磁场和引力场的复合场理论.[47]

我们采用五维 Rieman 流形的 4+1 分解的方法确定拉格朗日密度，从而建立复合场的场方程. 然后，进一步讨论复合场的引力性质.

1. 复合场的拉格朗日密度

我们将五维空间作 4+1 分解. 假定空间存在类时 Killing 矢量，则五维空间的变分原理归结为 4-维空-时的(物理空-时的)变

分原理，从而建立复合场理论.

在五维空间 M^5 中，定义一矢量场 a^μ，它满足 $a^\mu a_\mu=-1$. 这一矢量场便可确定五维空间 M^5 的 4+1 分解. 按照空间 M^4 分解的熟知的方案，我们可以得到

$$\overset{(5)}{\mathrm{d}s}{}^2=\overset{(5)}{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu=-(a_\mu\mathrm{d}x^\mu)^2+\overset{(4)}{\mathrm{d}s}{}^2. \tag{2.1.1}$$

式中
$$\overset{(4)}{\mathrm{d}s}{}^2=\overset{(4)}{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu;\mu,\ \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{2.1.2}$$

$\overset{(4)}{g}_{\mu\nu}=(\overset{(5)}{g}_{\mu\nu}+a_\mu a_\nu)$是垂直于矢量 a^μ 的四维局部截面(空间)S^4 的度规张量，且满足

$$\left.\begin{aligned}&a^\mu\overset{(4)}{g}{}^\nu_\mu=0,\ \overset{(4)}{g}{}^\alpha_\beta\overset{(4)}{g}{}^\beta_\gamma=\overset{(4)}{g}{}^\alpha_\gamma;\\&\det[\overset{(4)}{g}{}^\mu_\nu]=0,\ \overset{(4)}{g}{}^\alpha_\alpha=-4.\end{aligned}\right\} \tag{2.1.3}$$

用恒等式 $a^\mu_{;\nu;\alpha}-a^\mu_{;\alpha;\nu}=-a^\tau R^\mu_{\tau\nu\alpha}$, (2.1.4)

可将标曲率 $\overset{(5)}{R}$ 写为

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}=&-2\overset{(5)}{R}{}^\alpha_{\beta\alpha\tau}\overset{(5)}{g}{}^{\beta\tau}=\\&-2\overset{(5)}{R}_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta+2(\overset{(5)}{R}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\overset{(5)}{g}_{\alpha\beta}\overset{(5)}{R})a^\alpha a^\beta=\\&-2\overset{(5)}{R}_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta+2\overset{(5)}{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}\overset{(4)}{g}{}^{\alpha\delta}\overset{(4)}{g}{}^{\beta\gamma},\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

其中用到了关系式

$$\overset{(5)}{R}_{\alpha\beta}a^\alpha a^\beta=(a^\alpha_{;\beta;\alpha}-a^\alpha_{;\alpha;\beta})a^\beta. \tag{2.1.6}$$

五维空间中的变分原理可写为

$$\delta\overset{(5)}{I}(\overset{(5)}{g}_{\mu\nu})=\delta\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_{v^5}\overset{(5)}{R}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}\mathrm{d}^5x\right\}=0, \tag{2.1.7}$$

式中 $\overset{(5)}{g}\equiv\det[\overset{(5)}{g}_{\mu\nu}]$. 由以上诸式可得

$$\overset{(5)}{I}=\int\overset{(5)}{L}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}\mathrm{d}^5x, \tag{2.1.8}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{\mathscr{L}}\equiv\overset{(5)}{L}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}=&\frac{1}{4\pi}\{-2(a^\mu_{;\nu}a^\nu_{;\mu}-a^\alpha_{;\alpha}a^\beta_{;\beta})-\\&\overset{(5)}{R}_{\alpha\beta\delta\gamma}\overset{(5)}{g}{}^{\alpha\delta}\overset{(5)}{g}{}^{\beta\gamma}\}|\overset{(5)}{g}|^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

在得到上式时我们略去了对 $\overset{(5)}{I}$ 没有贡献的项 $-2(a^\mu_{;\nu}-a^\nu_{;\nu}a^\mu)_{;\mu}$(因

为此项的积分化为沿系统边界面的面积分，等于零）.

设所研究的空间区域 V^5 中存在 Killing 矢量 ξ^μ，$\xi^\mu\xi_\mu<0$. 选择坐标系，可使 $\xi^\mu=\delta^\mu_4$. 由于 $a^\mu a_\mu=-1$，可令 $a^\mu=\alpha^{-2}\xi^\mu$，式中 $\alpha=\alpha(x^\nu)$. 这时度规(2.1.1)可写为

$$\mathrm{d}\overset{(5)}{s}{}^2=-\alpha^2(\mathrm{d}x^4+A_i\mathrm{d}x^i)^2+\mathrm{d}\overset{(4)}{s}{}^2,\ i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3. \tag{2.1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{d}\overset{(4)}{s}{}^2=\overset{(4)}{g}_{ik}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k,\\&\overset{(4)}{g}_{ik}=(\overset{(5)}{g}_{ik}+\alpha^2A_iA_k),\\&A_i=\alpha^{-2}\xi_i.\end{aligned}\right\} \tag{2.1.11}$$

式中 α，A_i 和 $\overset{(4)}{g}_{ik}$只含 x^i. 与稳态空间 M^4 的 3+1 分解相似[4]，变换

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{x}^4=x^4+f(x^i),\\&\widetilde{x}^i=\widetilde{x}^i(x^k).\end{aligned}\right\} \tag{2.1.12}$$

保持 ξ^μ 和 $\overset{(4)}{g}_{ik}$形式不变，且导致规范变换

$$\widetilde{A}_i=A_k\frac{\partial x^k}{\partial\widetilde{x}^i}+f_{,i}. \tag{2.1.13}$$

故可将空间 S^4 看作完备的空间 M^4，具有度规 $\overset{(4)}{g}_{ik}$和场 α，A_i. 这时 $V^5=V^4\{x^4:x^4_1<x^4<x^4_2\}$，$V^4\subset M^4$. 在 S^4 中对称联络▽可表示为

$$\begin{aligned}\nabla_xY=&\overset{(5)}{\nabla}_xY-\omega(\nabla_xY)\partial_\sigma=\overset{(5)}{\nabla}_xY-Y\cdot\overset{(5)}{\nabla}_x\partial_\sigma\partial_\sigma=\\&\overset{(5)}{\nabla}_xY-\frac{1}{2}(Y\cdot\overset{(5)}{\nabla}_x+X\cdot\overset{(5)}{\nabla}_y)\partial_\sigma-\frac{1}{2}\mathrm{d}\omega(Y\Lambda X)\partial_\sigma=\\&\overset{(5)}{\nabla}_xY-\frac{1}{2}(Y\cdot\overset{(5)}{\nabla}_x+X\cdot\overset{(5)}{\nabla}_y)\partial_\sigma-\frac{1}{2}(Y\cdot\overset{(5)}{\nabla}_x-\\&X\cdot\overset{(5)}{\nabla}_y)\partial_\sigma\partial_\sigma.\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

式中 ∂_σ 为 M^5 中的矢量场，且满足 $\partial_\sigma\cdot\partial_\sigma=-1$.

协变导数$\nabla_{\partial_\sigma}X$ 和$\overset{(5)}{\nabla}_x\partial_\sigma$ 的表示式可写为

$$\nabla_{\partial_\sigma} X = \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma} X - \omega(\overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma} \overset{(5)}{X})\partial_\sigma = \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma} X - \overset{(5)}{X} \cdot \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma\partial_\sigma, \tag{2.1.15}$$

$$\overset{(5)}{\nabla}_x \partial_\sigma f = \nabla_x \partial_\sigma = \omega(\overset{(5)}{X})\overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma f + \omega(\overset{(5)}{\nabla}_x f). \tag{2.1.16}$$

曲率张量表示为

$$\overset{(5)}{R}(\overset{(5)}{X}, \overset{(5)}{Y})\overset{(5)}{Z} = (\overset{(5)}{\nabla}_x \overset{(5)}{\nabla}_y - \overset{(5)}{\nabla}_y \overset{(5)}{\nabla}_x - \overset{(5)}{\nabla}_{[x,y]})\overset{(5)}{Z}. \tag{2.1.17}$$

以上诸式中凡 S^4 中的量均未标维数. 由(2.1.14)～(2.1.17)以及对称联络和矢量的性质，我们得到

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X, Y)Z = \overset{(4)}{R}(X, Y)Z + \{&\omega(\overset{(5)}{\nabla}_y Z)\nabla_x - \omega(\overset{(5)}{\nabla}_x Z)\nabla_y - \\ &\omega([X, Y])\nabla_z + (\nabla_x\omega)(\nabla_y Z) - \\ &(\nabla_y\omega)(\nabla_x Z) - \omega([X, Y])Z.\overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma\}\partial_\sigma,\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X, Y)Z \cdot U = \overset{(4)}{R}(X, Y)Z \cdot U + &\omega(\overset{(5)}{\nabla}_y Z)\omega(\nabla_x U) - \\ &\omega(\overset{(5)}{\nabla}_x Z)\omega(\overset{(5)}{\nabla}_y U) + \omega([X, Y])\omega(\overset{(5)}{\nabla}_z U),\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X, Y)Z \cdot \partial_\sigma = &(\nabla_y\omega)(\nabla_x Z) - \\ &(\nabla_x\omega)(\nabla_y Z) + \omega([X, Y])Z \cdot \nabla_{\partial_\sigma}\partial_\sigma,\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$$\begin{aligned}\overset{(5)}{R}(X, \partial_\sigma)Y \cdot \partial_\sigma f = &-Y \cdot \nabla_x \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma f - \\ &\overset{(5)}{X} \cdot \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma \overset{(5)}{Y} \cdot \overset{(5)}{\nabla}_{\partial_\sigma}\partial_\sigma f + \\ &L_{\partial_\sigma}\omega(\overset{(5)}{\nabla}_x Y)f - \omega(\overset{(5)}{\nabla}_x f) \cdot \omega(\overset{(5)}{\nabla}_y f).\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

令
$$\partial_\sigma = \alpha^{-1}\xi, \ \omega = -\alpha\lambda. \tag{2.1.22}$$

式中 ξ 为 Killing 矢量；在 M^5 中取完全系基及其对偶基：(ξ, ∂_i)，$(\mathrm{d}x^4, \mathrm{d}x^i)$，我们得到$(\mathrm{d}x^\mu(\partial_\nu) = \delta^\mu_\nu)$

$$\partial_\mu \cdot \partial_\nu = \overset{(5)}{g}_{\mu\nu}, \ \partial_i \cdot \partial_j = \overset{(4)}{g}(\partial_i, \partial_j) = \overset{(4)}{g}_{ij}, \ \partial_\sigma = \sigma^\mu\partial_\mu, \tag{2.1.23}$$

$$\omega([\partial_i, \partial_j]) = -\partial F_{ij}, \tag{2.1.24}$$

$$F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}, \tag{2.1.25}$$

$$\overset{(4)}{\nabla}_{\partial_i}\partial_j = \frac{1}{2}\overset{(4)}{g}{}^{km}(\overset{(4)}{g}_{mi,j} + \overset{(4)}{g}_{mj,i} - \overset{(4)}{g}_{ij,m})\partial_k, \tag{2.1.26}$$

$$\overset{(5)}{R}(\partial_i,\ \partial_j)\partial_k=\overset{(5)}{R}{}^m_{ijk}\partial_m, \tag{2.1.27}$$

$$\overset{(5)}{R}(\partial_i,\ \partial_j)\partial_k\cdot\partial_m=\overset{(5)}{R}_{mkij}, \tag{2.1.28}$$

$$\overset{(5)}{R}(\partial_i,\ \partial_j)\partial_k\cdot\overset{(4)}{\partial}_m=\overset{(4)}{R}_{mkij}. \tag{2.1.29}$$

由以上诸式可以得到

$$\overset{(5)}{g}_{ij}=\overset{(4)}{g}_{ij}-\sigma_i\sigma_j, \tag{2.1.30}$$

$$\omega=-\sigma_\mu \mathrm{d}x^\mu, \tag{2.1.31}$$

$$\lambda=-(\mathrm{d}x^4+A_i\mathrm{d}x^i), \tag{2.1.32}$$

$$\sigma_\mu=\alpha A_\mu; \tag{2.1.33}$$

$$\overset{(5)}{R}_{mkij}=\overset{(4)}{R}_{mkij}-\frac{1}{4}\alpha^2(F_{ik}F_{jm}-F_{jk}F_{im}-2F_{ji}F_{km}), \tag{2.1.34}$$

$$\overset{(5)}{R}_{\mu\nu\sigma\lambda}\overset{(4)}{g}{}^{\mu\sigma}\overset{(4)}{g}{}^{\nu\lambda}=\overset{(5)}{g}_{mkij}\overset{(4)}{g}{}^{mi}\overset{(4)}{g}{}^{kj}=\overset{(4)}{R}+\frac{3}{4}\alpha^2F_{ik}F^{ik}. \tag{2.1.35}$$

将以上结果代入(2.1.9)，我们得到拉格朗日密度的表示式

$$\overset{(5)}{\mathscr{L}}\equiv\overset{(5)}{L}\,|\overset{(5)}{g}|^{1/2}=-\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\overset{(4)}{R}+\frac{1}{4}\alpha^3F_{ik}F^{ik}\right\}|\overset{(4)}{g}|^{1/2}. \tag{2.1.36}$$

此时五维变分原理(2.1.7)过渡到四维情况

$$(x_2^4-x_1^4)^{-1}\delta\overset{(5)}{I}(\overset{(5)}{g}_{\mu\nu})=\delta\overset{(4)}{I}(\alpha,\ A_i,\ \overset{(4)}{g}_{ij})=$$
$$\delta\int_{V^4}\overset{(4)}{L}\,|\overset{(4)}{g}|^{1/2}\mathrm{d}^4x=0. \tag{2.1.37}$$

作变换 $\alpha\to\varphi$，$\overset{(4)}{g}_{ij}\to g_{ik}$.

$$\alpha=\frac{1}{2}\exp(\pm\sqrt{2}(\varphi-\varphi_0)/\sqrt{3}), \tag{2.1.38}$$

$$\overset{(4)}{g}_{ik}=g_{ik}\exp[\mp\sqrt{2}(\varphi-\varphi_0)/\sqrt{3}], \tag{2.1.39}$$

$$\varphi_0=\mp\sqrt{3}\ln 2/\sqrt{2}. \tag{2.1.40}$$

拉格朗日密度(2.1.37)变为

$$\overset{(4)}{\mathscr{L}}\equiv\overset{(4)}{L}\sqrt{-\overset{(4)}{g}}=L\sqrt{-g}=$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{4k}R-\frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2+\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}e^{\pm\sqrt{6}\varphi}\right\}\sqrt{-g}. \tag{2.1.41}$$

上式与度规

$$\overset{(5)}{d}s^2=\frac{1}{2}\exp\left(\mp\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi\right)ds^2-$$

$$\exp\left(\pm\sqrt{\frac{8}{3}}\varphi\right)(dx^4+A_i dx^i)^2 \qquad (2.1.42)$$

相对应.

2. 复合场方程

根据(2.1.41)中各量量纲的考虑，我们作代换：$A_i=\beta\tilde{A}_i$，$\tilde{\varphi}=\eta\beta\tilde{\varphi}$，$\beta=l/q$ 式中 l，q，β，η 均为常数，l 的量纲是长度，q 的量纲是电荷，η 无量纲；$\tilde{A}_i$ 和 $\tilde{\varphi}$ 是场变量. 为简便，变换后去掉～号，(2.1.41)可写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{4k}R-\frac{1}{2}\eta^2\beta^2(\nabla\varphi)^2+\right.$$

$$\left.\frac{\beta^2}{4}F_{ij}F^{ij}e^{\pm\sqrt{6}\beta\eta\varphi}\right\}\sqrt{-g}, \qquad (2.1.43)$$

式中指数应为负数，所以当 $\beta\varphi>0$ 时应取负号.

由拉格朗日密度(2.1.43)代入变分原理式，得到标量场 φ、电磁场 F_{ij}和引力场 g_{ij}的复合场方程

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R=2k\Phi_{ij}(\varphi)+2kE_{ij}(A_k)\exp(-\beta\eta\varphi\sqrt{6}),$$

$$(2.1.44)$$

$$\Phi_{ij}=\eta^2\left\{\varphi_{,i}\varphi_{,j}-\frac{1}{2}g_{ij}(\nabla\varphi)^2\right\}, \qquad (2.1.45)$$

$$E_{ij}=-F_{ik}F_j^k+\frac{1}{4}g_{ij}F_{km}F^{km}, \qquad (2.1.46)$$

$$\nabla^2\varphi\equiv g^{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}=(\sqrt{6}\beta/4\eta)F_{ij}F^{ij}\exp(-\sqrt{6}\beta\eta\varphi),$$

$$(2.1.47)$$

$$F^{ij}_{;j}=\beta\eta\sqrt{6}F^{ij}\varphi_{,j}, \qquad (2.1.48)$$

式中 i，j，k，$\cdots=0$，1，2，3.

下面我们给出场方程的一个静态球对称解. 当标量场不存在时，此解退化为 Rissner-Nordstrom 度规.

静态球对称度规具有形式

$$ds^2=a(r)dt^2-b(r)dr^2-c(r)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2), \tag{2.1.49}$$

标量场 $\varphi=\varphi(r)$. (2.1.50)

借助于适当的变换，可使势 A_i 变为

$$A_i=(A_0, 0, 0, 0) \tag{2.1.51}$$

将(2.1.49)～(2.1.51)代入，拉格朗日密度(2.1.41)变为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\sqrt{a(r)b(r)}\cdot c(r)\sin\theta\left\{\frac{1}{2k}R+\eta^2\varphi_{,r}^2-A_{0,r}^2\times a^{-1}(r)b^{-1}(r)\exp(-\eta\beta\varphi\sqrt{6})\right\}, \tag{2.1.52}$$

$$R=-2c^{-1}(r)+b^{-1}(r)\left[2\left(\frac{c_{,rr}}{c}-\frac{c_{,r}^2}{c^2}\right)+\left(\frac{a_{,rr}}{a}-\frac{a_{,r}^2}{a^2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{c_{,r}}{c}\right)^2-\frac{b_{,r}c_{,r}}{bc}+\frac{a_{,r}c_{,r}}{ac}+\frac{1}{2}\left(\frac{a_{,r}}{a}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{a_{,r}b_{,r}}{ab}\right]. \tag{2.1.53}$$

式中 $a_{,r}\equiv\frac{d}{dr}a(r)$，$a_{,rr}=\frac{d^2}{dr^2}a(r)$. 由此，在作用量的表示式中对 t，θ，φ 积分，再取全导数，得到拉格朗日

$$L=\frac{1}{2}c(r)\sqrt{\frac{a(r)}{b(r)}}\left\{\frac{1}{2k}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{c_{,r}}{c}\right)^2+\frac{a_{,r}c_{,r}}{ac}\right]-\eta^2\varphi_{,r}^2+A_{0,r}^2\exp(-\sqrt{6}\eta\beta\varphi)\cdot\frac{1}{a}\right\}+\frac{1}{2k}\sqrt{b(r)c(r)}. \tag{2.1.54}$$

直接计算可以证明，对于静态球对称情况，由上式得到的场方程和由(2.1.44)～(2.1.48)所得到的是一致的.

下面我们由(2.2.12)构成哈米顿-雅可比方程，然后积分，获得场方程的解.

令 $b(r)c(r)=d(r)$，$a(r)b(r)=e(r)$，(2.2.12)化为

$$L=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4k}\left[\left(\frac{d_{,r}}{d}\right)^2-\left(\frac{a_{,r}}{a}\right)^2\right]-\eta\varphi_{,r}^2+A_{0,r}^2\exp(-\sqrt{6}\eta\beta\varphi)\cdot a^{-1}(r)\right\}\times d(r)/\sqrt{e(r)}+\frac{1}{2k}\sqrt{e(r)}. \tag{2.1.55}$$

取广义坐标

$$\left.\begin{aligned}&q_i=(\tilde{\mathrm{d}},\ \tilde{a},\ \varphi,\ A_0),\\&\tilde{d}\equiv\ln\mathrm{d},\ \tilde{a}\equiv\ln a,\ \tilde{e}=\ln e(r).\end{aligned}\right\}\tag{2.1.56}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&P_{q_i}=\frac{\partial L}{\delta q_{i,r}},\\&\frac{\partial L}{\partial q_i}-\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)_{,r}=\frac{\delta L}{\delta q_i}.\end{aligned}\right\}\tag{2.1.57}$$

$$\begin{aligned}H(q,\ q_{,r})=&P_{\tilde{d}}\tilde{\mathrm{d}}_{,r}+P_{\tilde{a}}\tilde{a}_{,r}+P_{\varphi}\varphi_{,r}+P_{A_0}A_{0,r}-L=\\&-2\frac{\delta L}{\delta e}=-2\frac{\partial L}{\partial \tilde{e}}=0.\end{aligned}\tag{2.1.58}$$

适当调整 r 坐标的刻度，可使 $e=1$，最后用广义动量表示广义速度，我们得到

$$\begin{aligned}H(P,\ q)=&\frac{1}{2}\Big\{4k(P_{\tilde{d}}^2-P_{\tilde{a}}^2)-\\&\frac{1}{\eta^2}P_{\varphi}^2+P_{A_0}^2a(r)\exp(\sqrt{6}\,\eta\beta\varphi)\Big\}\times\mathrm{d}^{-1}(r)-\frac{1}{2k}=0.\end{aligned}\tag{2.1.59}$$

由此得到哈米顿-雅可比方程：

$$\begin{aligned}&4k\left[\left(\frac{\partial I}{\partial\tilde{d}}\right)^2-\left(\frac{\partial I}{\partial\tilde{a}}\right)^2\right]-\frac{1}{\eta^2}\left(\frac{\partial I}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial I}{\partial A_0}\right)^2a(r)\exp(\eta\beta\varphi)-\\&\frac{1}{k}\mathrm{d}(r)=0.\end{aligned}\tag{2.1.60}$$

边界条件是当 $r\to\infty$ 时 $a\to1$，$\varphi\to0$，$A_0\to0$，$d\to\infty$.

将方程(2.1.60)分离变量并积分，我们求得

$$\begin{aligned}I=&qA_0+\frac{k}{2\delta}((4\eta k\varphi-\beta\sqrt{6}\ln a(r))+\\&\frac{1}{2k}\int\sqrt{k^2m^2-kq^2+kK^2+\mathrm{d}(r)}\times\\&\mathrm{d}^{-1}(r)\mathrm{dd}(r)+\frac{1}{\delta}\int\sqrt{k^2m^2-kq^2(1-e^{\gamma})}\mathrm{d}\gamma,\end{aligned}\tag{2.1.61}$$

式中

$$\gamma \equiv \ln a + \eta\beta\varphi\sqrt{6}, \quad \delta^2 \equiv 4k^2 + 6k\beta^2, \tag{2.1.62}$$

m，q 和 K 都是分离变量常数.

对方程

$$\frac{\partial L}{\partial d_{,r}} = \frac{\partial l}{\partial d}$$

积分，我们得到

$$\mathrm{d} = r^2 - (k^2m^2 - kq^2 + kK^2), \tag{2.1.63}$$

我们只局限于$(k^2m^2 - kq^2 > 0)$的情况，按照[48]中给出的一般方法，由(2.1.61)，(2.1.62)，(2.1.64)和边界条件，经过虽然麻烦但并不困难的运算，我们得到

$$\left.\begin{aligned} &a(r) = \omega^{\beta kK\sqrt{6}/\delta\eta}\left\{\frac{1}{2}(B+1)\omega^{-\delta D/4k} - \frac{1}{2}(B-1)\omega^{\delta D/4k}\right\}^{-\frac{8k^2}{\delta^2}}, \\ &b(r) = a^{-1}(r), \ c(r) = \mathrm{d}(r)/b(r). \end{aligned}\right\} \tag{2.1.64}$$

$$\begin{aligned} \varphi(r) = -\frac{k}{\delta\eta}\ln\Big|\omega^{k/\rho}\Big\{&\frac{1}{2}(B+1)\omega^{-\delta D/4k} - \\ &\frac{1}{2}(B-1)\omega^{\delta D/4k}\Big\}^{\frac{2\sqrt{6}\beta}{\delta}}\Big|, \end{aligned} \tag{2.1.65}$$

$$A_0(r) = \frac{2kq}{\delta\eta D}(1 - \omega^{\frac{\delta D}{2k}})[B + 1 - (B-1)w^{\frac{\delta D}{2k}}]^{-1}, \tag{2.1.66}$$

式中 $\rho^2 \equiv k^2m^2 - kq^2 + kG^2$,

$$\omega \equiv \frac{r - \sqrt{k^2m^2 - kq^2 + kK^2}}{r + \sqrt{k^2m^2 - kq^2 + kK^2}}, \quad B \equiv \frac{\pm km}{\sqrt{k^2m^2 - kq^2}},$$

$$D \equiv \frac{\sqrt{k^2m^2 - kq^2}}{\sqrt{k^2m^2 - kq^2 + kK^2}}.$$

于是所寻求的度规为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = a(r)\mathrm{d}t^2 - a^{-1}(r)\{\mathrm{d}r^2 + (r^2 - (k^2m^2 - \\ kq^2 + kK^2)]\mathrm{d}\Omega^2\}, \end{aligned} \tag{2.1.67}$$

$$\mathrm{d}\Omega^2 \equiv \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.$$

令 $\bar{r}^2 \equiv 4\Delta^2\omega(1-\omega)^2\omega^{\frac{1-\beta kK\sqrt{6}}{\delta\eta}}\left\{\frac{1}{2}(B+1)\omega^{-\frac{\delta D}{4k}} - \right.$

$$\frac{1}{2}(B-1)\omega^{\frac{\delta D}{4k}}\Big\}^{\frac{8k^2}{\delta^2}}, \qquad (2.1.68)$$

$$\bar{a}^{-1}\equiv\left(\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}r}\right)^2\cdot a=k^2(1-\omega)^2(4\delta^2\eta^2\omega)^{-1}\Big\{-\beta K\sqrt{6}-2km+\delta\eta k^{-1}(1+\omega)(1-\omega)^{-1}+\frac{2kq}{\beta D}\cdot\frac{1-\omega^{\delta D/2k}}{B+1-(B-1)\omega^{\delta D/2k}}\Big\}^2, \qquad (2.1.69)$$

式中 $\Delta^2\equiv k^2m^2-kq^2+kK^2$. (2.1.70)

可将度规(2.1.69)改写为

$$\mathrm{d}s^2=a(\bar{r})\mathrm{d}t^2-\bar{a}(\bar{r})\mathrm{d}\bar{r}^2-\bar{r}^2\mathrm{d}\Omega^2. \qquad (2.1.71)$$

3. 讨论

(1)由场方程(2.1.47)和(2.1.48)可见，参量 β 描述标量场 φ 和电磁场 F_{ij}的耦合程度. 当 $\beta=0$ 时，不存在上述耦合. 当 $\beta=K=0$ 时，不但不存在上述耦合，而且由(2.1.66)可知不存在标量场 φ;此时场方程退化为静态球对称 Einstein-Maxwell 方程. 容易证明，此时解(2.1.65)～(2.1.72)恰好退化为熟知的 Reissner-Nordstrom 度规.

(2) 由场方程(2.1.48)可以发现，量

$$J^i\equiv\sqrt{6}\beta\eta F^{ij}\varphi_{,j}, \qquad (2.1.72)$$

满足守恒律

$$J^i_{;i}=0, \qquad (2.1.73)$$

由式(2.3.1)可以看出，这一守恒量决定于电磁场和标量场的相互作用. 由(2.3.2)可见，这一守恒量可以看做电磁场和标量场的复合场的“源流密度”矢量.

(3) 容易得到，当 $r\to\infty$时，度规(2.2.23)～(2.2.30)可写成下面的渐近形式

$$a=1-\frac{2kM}{\bar{r}}+\frac{kq^2}{\bar{r}^2}+\cdots, \qquad (2.1.74)$$

$$\bar{a}=1-\frac{2kM}{\bar{r}}+\cdots. \qquad (2.1.75)$$

式中 $M = \delta(2km + \beta K\sqrt{6})$ 与 Schwarzschild 度规和 Reissner-Nordstrom 度规比较，可知量 M 即为引力源的引力质量，但它和耦合参量 βK 有关. 当 $\beta K = 0$，$\delta = 1$ 时，$M = 2km$. 可见 m 对应于 Schwarzschild 质量（常量 δ 和 k 可认为是和单位有关的常数）.

由(2.1.74)和(2.1.75)可以看出，在静态球对称的情况下，标量场对度规的贡献是高阶小量.

§2.2 五维标量-电磁-引力复合场理论中的介子质量谱

在现代物理学中，人们已经沿着统一场论的方向做了许多研究工作；曾经采用了规范场的思想，分解空间几何的思想，超对称的思想等等. 在这些思想和相应的方案中，Kalutza 提出的五维复合场理论具有重要的地位. 我们首先简单地说明五维复合场理论的基本要点.

首先，五维流形按照 5 个坐标的封闭性条件，选择形式为 $V^4 \times S^1$ 的拓扑. 人们已经证明，要求标量场的电荷等于电子电荷($\pm e$)，会导致第 5 个坐标的周期 T_1 非常小($\sim 10^{-30}$cm). 由于 T_1 远小于场方程成立的线度，人们把拉格朗日按照第 5 个坐标的周期取平均. 这时，在拉格朗日中出现了量级为 $10^{-6}g$ 的质量项，可以看做对电磁场质量的贡献. 为了使质量"标准化"，人们又引入了第 6 维度量，并选择 6 维时空的拓扑为 $V^4 \times S^1 \times S^1$. 这个 6 维流形的度规对 x^6 的依赖性对电荷没有贡献，只对标量场的质量有贡献，但具有相反的符号(因为 x^6 是类时的，而 x^5 是类空的). 由于 x^6 的周期 T_2 与 T_1 不同，它不由任何条件决定(T_1 由标量场的电荷等于 $\pm e$ 决定)，所以原则上可以得到任何质量值.

可以把荷电的标量场解释为描述荷电物质的标量场. 实际上，过渡到经典极限，即令

$$\varphi = \rho^{1/2}\exp(iI/h), \tag{2.2.1}$$

式中 φ 与 $x = (-G_{55})^{3/4}$ 相联系，I 是经典作用量，ρ 是粒子在区域 d^3V 出现的几率，令 $\bar{h} \to 0$，则 Klein-Gordon-Fok 方程退化为哈米

顿-雅可比方程，爱因斯坦方程右端退化为通常的电磁场能动张量，麦克斯威方程的右端是通常的流.

在本节中，我们把荷电的和中性的标量场理解为介子的波函数. 为了使中性标量场有质量，令其电荷等于零，就必须引入第7个度量. 我们的基本目的是证明，通过对附加时空坐标的选择，可以得到至今人们所知道的所有介子和它们的共振态的质量谱.

考虑拓扑为 $V^7=V^4\times S^1\times S^1\times S^1$ 的 7 维黎曼流形，选择其度规张量具有形式

$$
{}^7C_{AB}=\chi^{4/5}\begin{bmatrix} g_{\mu\nu}-\frac{4k}{c^4}A_\mu A_\nu & \frac{1}{c^2}2\sqrt{k}\,A_\mu & 0 & 0 \\ \frac{1}{c^2}2\sqrt{k}\,A_\nu & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}. \tag{2.2.2}
$$

式中 $g_{\mu\nu}$是四维黎曼空间的度规张量，A_μ 是电磁势，k 是牛顿引力常数，χ 是共形因子，附标 A，$B=0$，1，2，3，5，6，7.

拉格朗日密度取为

$$
{}^7L=\sqrt{-G}\,{}^7R. \tag{2.2.3}
$$

做共形变换和(4+1+1+1)分解，得到

$$
{}^7L=(-G)^{1/2}\ {}^7R=(-g)^{1/2}\Big\{\chi^2\Big[{}^4R+\frac{k}{c^4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\Big]-\frac{24}{5}g^{\mu\nu}\chi\nabla_\mu^+\nabla_\nu^+\chi+\frac{24}{5}(\chi\chi_{,5,5}-\chi\chi_{,6,6}+\chi\chi_{,7,7})\Big\}. \tag{2.2.4}
$$

式中${}^4R$ 是由 $g_{\mu\nu}$构成的标曲率，

$$
\nabla_\mu^+=\nabla_\mu+\frac{2\sqrt{k}}{c^2}A_\mu\frac{\partial}{\partial x^5}, \tag{2.2.5}
$$

∇_μ 为通常的关于 $g_{\mu\nu}$的协变导数.

我们要求质量项具有基本粒子质量的量级，所以周期 T_1 和 T_2 都非常小($\sim10^{-30}$cm). 所以，自然地可以认为，通常研究的

拉格朗日是对 x^5,x^6 和 x^7 取过平均的：

$$^4L(x^\mu)=\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\mathrm{d}x^5\mathrm{d}x^6\mathrm{d}x^7 \quad {}^7L(x^\mu,\ x^5,\ x^6,\ x^7). \tag{2.2.6}$$

式中$^4L(x^\mu)$是通常的四维拉格朗日密度.

我们选择共形因子 χ 具有形式

$$\chi=1+\imath b_1\Phi(x^A)+\imath b_2\psi_0(x^A)+b_3\psi(x^A)-b_3\psi^*(x^A) \tag{2.2.7}$$

考虑到变量 x^μ 和 x^5，x^6，x^7 分离，将 χ 改写成

$$\begin{aligned}\chi=1&+\imath b_1\Phi(x^\mu)f_1(x^5,\ x^6,\ x^7)+\imath b_2\psi_0(x^\mu)\\ &f_2(x^5,\ x^6,\ x^7)+b_3\psi(x^\mu)f_3(x^5,\ x^6,\ x^7)-\\ &b_3\psi^*(x^\mu)f_3^*(x^5,\ x^6,\ x^7).\end{aligned}$$

式中星号表示复共轭.

所引入的函数 $\Phi(x^\mu)$描述中性的同位旋 $I=0$ 的介子. 函数 $\psi_0(x^\mu)$，$\psi(x^\mu)$和 $\psi^*(x^\mu)$描述三重介子（当 $b_2=b_3$），或者二重介子（当 $b_2=\sqrt{2}\,b_3$）. $\psi_0(x^\mu)$是三重或二重介子的中性分量，而 b_1，b_2 和 b_3 是常数标准化因子，因为波函数 ψ_0，ψ 和 ψ^* 的量纲为 $l^{-3/2}$.

选择函数 f_1，f_2 和 f_3，使对$^4L(x^\mu)$取平均以后不出现交叉项 $\Phi\psi$，$\Phi\partial_\mu\psi$，$\psi_0\partial_\mu\psi$，$\psi_0\psi$…即不出现标量场自身相互作用的项，只有它与引力场、电磁场相互作用的项. 我们设

$$f_1=\frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}\cos\frac{2\pi}{T_1}(n+4)x^7\cdot\cos\frac{2\pi}{T_2}(n+4)x^6,$$

$$f_2=\frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}\cos\frac{2\pi}{T_1}(n+1)x^7\cdot\cos\frac{2\pi}{T_2}(n+1)x^6, \tag{2.2.8}$$

$$\begin{aligned}f_3=&\frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}\exp\left(-\imath\frac{2\pi}{T_1}x^5\right)\cdot\\ &\cos\frac{2\pi}{T_1}nx^5\exp\left(-\imath\frac{2\pi}{T_2}x^6\right)\cdot\cos\frac{2\pi}{T_2}nx^6.\end{aligned}$$

式中$\frac{2}{T_1\sqrt{T_2}}$为标准化因子，n 取值 0，2，3，4，…$n\neq 1$，因为 $n=1$ 将有交叉项.

按 x^5，x^6，x^7 取平均，并加上要求：荷电的标量场的电荷等于 $\pm e$，我们得到 $T_1=4\pi\sqrt{k}\hbar/ec$. 取平均后得到：

$$
\begin{aligned}
{}^4L(x^\mu)=\sqrt{-g}\Big\{&(1-b_1^2\Phi_n^2-b_2^2\psi_{0_n}^2-\\
&2b_3^2\psi_n\psi_n^*)\left({}^4R+\frac{k}{c^4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right)-\\
&\frac{24}{5}b_1^2\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi_n\partial_\nu\Phi_n-\left(\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)(n+4)^2\Phi_n^2\right)-\\
&\frac{24}{5}\Big[2b_3^2\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu^+\psi_n^*\partial_\nu^-\psi_n-\left(\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)(1+n^2)\psi_n^*\psi_n\right)+\\
&b_2^2\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\psi_{0_n}\partial_\nu\psi_{0_n}-\left(\frac{4\pi^2}{T_1^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)(1+n)^2\psi_{0_n}^2\right)\Big]\Big\},
\end{aligned}
\quad (2.2.9)
$$

$\partial_\mu^\pm\equiv\partial_\mu\pm\iota(e/\hbar c)A_\mu\ \partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$.

量纲因子 b_3 可由拉格朗日密度(2.2.9)得到的麦克斯威方程确定：

$$
b_3^2=\frac{5}{48}\chi\frac{\hbar^2}{m_{\psi_n}}. \quad (2.2.10)
$$

我们从物理观点考虑，做一些自然的假设. 第一个假设是不区分三重和二重介子. 因为若取 $b_1=b_2=b_3$，便得到描述单态和三重态的拉格朗日，而若取 $b_1=b_2=\sqrt{2}b_3$，则得到描述单态和二重态的拉格朗日. 第二个假设，当 $n=0$ 我们得到 $m_{\psi_0}=m_\psi=m_{\psi*}$，所以在和 $n\neq 0$ 对应的状态中，我们不考虑电荷的分离，即状态 ψ_n^0 和 ψ_n 在三重(二重)态中我们认为是等几率的，并用函数

$$
\tilde{\psi}_n\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_n^0+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_n
$$

来描述. 因此，三重(二重)介子质量的“平均”等于

$$
m_{\psi_n}=m_{\psi_0}\left(\frac{1+n^2}{2}+\frac{(1+n)^2}{2}\right)^{1/2}. \quad (2.2.11)
$$

我们选择 m_{π^0} 和 m_π 的均方根值为式(2.2.11)中的初始质量

m_{ϕ_0}(MeV)：

$$m_{\phi_0}c^2=\left(\frac{m_{\pi_0}^2+m_K^2}{2}\right)^{1/2}c^2\cong 137286\text{MeV}. \tag{2.2.12}$$

又因为 $m_{\phi_0}^2\dfrac{c^2}{\hbar^2}=\left(\dfrac{e^2c^2}{4k\hbar^2}-\dfrac{4\pi^2}{T_2^2}\right)$，

所以由质量 m_{ϕ_0} 可以确定周期 T_2 的大小：

$$\frac{4\pi^2}{T_2^2}=\frac{e^2c^2}{4k\hbar^2}-\frac{c^2}{\hbar^2}m_{\phi_0}^2. \tag{2.2.13}$$

这里我们指出，如果不按电荷取平均〔式(2.2.11)〕，与实验结果的符合程度就差一些.

中性的单态的质量(Mev)由下式给出〔见(2.2.9)〕：

$$m_{\phi_n}=\left(\frac{e^2c^2}{4k\hbar^2}-\frac{4\pi^2}{T_2^2}\right)^{1/2}(n+4)=$$
$$137286(n+4)\text{MeV}. \tag{2.2.14}$$

第三个假设是，如果某一粒子不对应于任何一个 m_n，则描述它的波函数 f 就不是本征函数，但是是两个相邻本征函数的迭加(如果 $m_n<m_f<m_{n+1}$)：

$$f=\cos\theta f_n+\sin\theta f_{n+1}$$

或者 $f=\sin\theta f_n+\cos\theta f_{n+1}$，

因此 $m_f^2=(\cos^2\theta m_n^2+\sin^2\theta m_{n+1}^2)^{1/2}$ (2.2.15)

或者 $m_f^2=(\sin^2\theta m_n^2+\cos^2\theta m_{n+1}^2)^{1/2}$，

式中 θ 是介子谱中常用的相移角，由下式给出：

$$\cos\theta=\sqrt{2/3},\ \sin\theta=\sqrt{1/3}.$$

理论预言和实验结果的比较见表 1 和表 2.

表 1

$I=1$ 和 1/2 的介子质量

实验值(MeV)	理论预言值	n	相对误差(%)	实验值(MeV)	理论预言值	n	相对误差(%)
1. π137286	137286	0	0	16. ρ' ~1600	1583	11	<1
2. ?	350	2		17. $A_3$1660(10)	1675	—	<1

续表

I=1 和 1/2 的介子质量							
实验值 (MeV)	理论预言值	n	相对误差 (%)	实验值 (MeV)	理论预言值	n	相对误差 (%)
3. K495,7	495	3	<0.5	18. g1700(20)	1720	12	<1.5
4. ?	622	4		19. K_2^*1785(6)	1769	—	<1
5. ρ776(3)	764.4	5	<2	20. L1600–2000?	1817	—	
6. K^*895(4)	900	6	<2	21. D1865,7	1864	13	0
7. $A'_1$1040(13)	1036	7	<0.5	22. F~1970	1952	—	<1
8. M1150—1170?	1172	8	<2	23. D^*2007	1994	14	<1
9. B1231(10)	1220	—	<1	24. K_h~2060	2041	—	<1
10. $A''_1$1280(40)	1265	—	<1.5	25. F^*~2140	2131	15	<0.5
11. Q_1~1280	1280		0	26. $X_1$2307(6)	2268	16	<2
12. $A_2$1310(5)	1309.6	9	0	27. ?	2405	17	
13. Q_2~1400	1402	—	0	·	·	·	
14. K_1'1434(5)	1446	10	<1	·	·	·	
15. x~1500	1493	—	<1	·	·	·	

表中符号"—"表示用公式(2.2.15)计算的.

表 2

$$m_B=(\sin^2\theta\cdot m_9^2+\cos^2\theta\cdot m_8^2)^{1/2}=1220$$
$$m_{A_1''}=(\sin^2\theta\cdot m_8^2+\cos^2\theta\cdot m_9^2)^{1/2}=1265$$
$$m_{Q_1}=(\sin^2\theta\cdot m_9^2+\cos^2\theta\cdot m_{A_1''}^2)^{1/2}=1280$$
$$m_{Q_2}=(\sin^2\theta\cdot m_9^2+\cos^2\theta\cdot m_{10}^2)^{1/2}=1402$$
$$m_\chi=(\sin^2\theta\cdot m_{11}^2+\cos^2\theta\cdot m_{10}^2)^{1/2}=1493$$
$$m_{A_3}=(\sin^2\theta\cdot m_{11}^2+\cos^2\theta\cdot m_{12}^2)^{1/2}=1675$$
$$m_{K_2}^*=(\sin^2\theta\cdot m_{13}^2+\cos^2\theta\cdot m_{12}^2)^{1/2}=1769$$
$$m_L=(\sin^2\theta\cdot m_{12}^2+\cos^2\theta\cdot m_{13}^2)^{1/2}=1817$$
$$m_F=(\sin^2\theta\cdot m_{13}^2+\cos^2\theta\cdot m_{14}^2)^{1/2}=1952$$
$$m_{K_h}=(\sin^2\theta\cdot m_{15}^2+\cos^2\theta\cdot m_{14}^2)^{1/2}=2041$$

表 3

$I=0$ 的介子质量							
实验值 (MeV)	理论预言值	n	相对误差 (%)	实验值 (MeV)	理论预言值	n	相对误差 (%)
1. η549	549	0	0	20. X'1900··3600	2745	16	
2. ω783	823	2	<5	21. X''2830?	2883	17	
3. η'958	961	3	<0.5	22. η_c2984	2975	—	<1
4. $S^*\sim$981(10)	1008	·	<3	23. I/ψ3097(1)	3020	18	<3
5. φ1020	1054	—	<4	24. $\overline{NN}$1400—3600?	3158	19	
6. η_N1080	1098	4	<2				
7. f1270	1236	5	<3	25. X'''3400?	3295	20	
8. D1284(9)	1283	—	<0.5	26. χ3414(4)	3432	21	<1
9. ε1300	1329	—	<3	27. χ'3507(4)	3524	—	<1
10. E1418(10)	1373	6	<4	28. χ''3551(4)	3569	22	<1
11. f'1516(12)	1510	7	<0.5	29. η'_c3592	3615	—	<1
12. ω'1666(5)	1647	8	<1	30. ψ685	3706	23	<1
13. $X\sim$1690?	1784	9	<6	31. ψ'3770	3844	24	<2
14. S1935	1922	10	<1	32. ψ''4030(5)	3981	25	<1
15. h2040(20)	2059	11	<1	33. ψ'''4159(20)	4118	26	<1
16. $TO\sim$2150	2197	12	<3	34. ?	4256	27	
17. $UO\sim$2350	2334	13	<1	35. ψ''''4415	4393	28	<1
18. $X_1$2200?	2471	14		36?	4530	29	
19. e^+e^-1100—3100?	2608	15		·	·	·	
				·	·	·	
				·	·	·	

表 4

$$m_{S^*}=(\sin^2\theta\cdot m_4^2+\cos^2\theta\cdot m_3^2)^{1/2}=1008$$

$$m_{\varphi}=(\sin^2\theta\cdot m_1^2+\cos^2\theta\cdot m_4^2)^{1/2}=1054$$

$$m_D=(\sin^2\theta\cdot m_6^2+\cos^2\theta\cdot m_5^2)^{1/2}=1283$$

$$m_{\varepsilon}=(\sin^2\theta\cdot m_5^2+\cos^2\theta\cdot m_6^2)^{1/2}=1329$$

$$m_{\eta_c}=(\sin^2\theta\cdot m_{17}^2+\cos^2\theta\cdot m_{18}^2)^{1/2}=2975$$

$$m_{\chi}=(\sin^2\theta\cdot m_{21}^2+\cos^2\theta\cdot m_{22}^2)^{1/2}=3524$$

$$m_{\psi_c}=(\sin^2\theta\cdot m_{23}^2+\cos^2\theta\cdot m_{22}^2)^{1/2}=3615$$

§2.3 Dilaton-Maxwell-Einstein 复合场

90 年代中期，现代宇宙学和引力理论受到了来自标量-张量理论和卡鲁查-克莱因型高维理论观点的挑战，后者在 Dilaton 场(即中性标量场)中给出了一系列好的结果．一些作者对标量-张量理论很是喜欢，甚至认为它是最有希望的引力基础理论．不少作者讨论了存在 Dilaton 场时物质场的行为．结果表明，极端荷电 Dilaton 黑洞从某种意义上讲如同基本粒子；有标量场的超对称性可能有助于奇点问题的研究……这些结果使人们有兴趣去寻找有标量场时具有规则视界的解．

本节我们讨论引力与无质量标量场和电磁场的耦合．根据弦理论的低能极限，系统的作用量具有形式

$$I=-\frac{1}{16\pi}\int\sqrt{-g}(R+2g^{mn}\nabla_m\varphi\nabla_n\varphi+e^{-2\varphi}g^{mr}g^{kl}F_{mk}F_{nl})\mathrm{d}^4x. \tag{2.3.1}$$

对上式取变分(分别对于 $g_{\mu\nu}$，φ，A_m)，得到场方程：

$$R_{mn}+2\nabla_m\varphi\nabla_n\varphi+e^{-2\varphi}\left(2g^{kl}F_{mk}F_{nl}-\frac{1}{2}g_{mn}g^{cd}g^{ef}F_{ce}F_{df}\right)=0, \tag{2.3.2}$$

$$g^{mn}\nabla_m\nabla_n\varphi+\frac{1}{2}e^{-2\varphi}F_{mn}F^{mn}=0, \tag{2.3.3}$$

$$\nabla_m(e^{-2\varphi}g^{mn}g^{kl}F_{nl})=0. \tag{2.3.4}$$

我们取协变 de Donder 规范条件：

$$D_m\sqrt{-g}g^{mn}=0, \tag{2.3.5}$$

式中 D_m 是关于闵可夫斯基度规

$$\gamma_{mn}=\mathrm{diag}(-1,\ -1,\ -r^2,\ -r^2\sin^2\theta)$$

的协变导数. 我们进一步假设，解是静态球对称的：

$$F_{10}(t,\ r,\ \theta,\ \varphi)=E(r),$$

$$\varphi(t,\ r,\ \theta,\ \varphi)=\varphi(r).$$

此时度规具有形式

$$g_{mn}=\mathrm{diag}(u(r),\ -v(r),\ -w(r),\ -w(r)\sin^2\theta). \tag{2.3.6}$$

如果标量场不存在，$\varphi=0$，由作用量(2.3.1)得到的解描述一个质量为 μ_0，电荷为 Q 的黑洞. 用闵可夫斯基时空中的谐和坐标，此度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=\left(\frac{r-\mu_0}{r+\mu_0}+\frac{Q^2}{(r+\mu_0)^2}\right)\mathrm{d}t^2-\left(\frac{r-\mu_0}{r+\mu_0}+\frac{Q^2}{(r+\mu_0)^2}\right)^{-1}\mathrm{d}\gamma^2-(r+\mu_0)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{2.3.7}$$

此即谐和 R-N 度规，具有视界 $\mu>0$，$\mu=\sqrt{\mu_0^2-Q^2}$.

满足(2.3.5)的静态球对称渐近平直解为

$$u(r)=\frac{1}{v(r)}=\frac{r^2-\mu^2}{w(r)}, \tag{2.3.8a}$$

$$\varphi(r)=\frac{1-4k^2}{8k}\ln\frac{r+\mu}{r-\mu}+\frac{Q^2}{16\mu^2k^2}\left[1-\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)^{2k}\right], \tag{2.3.8b}$$

$$w(r)=(r^2-\mu^2)\left(\frac{r+\mu}{r-\mu}\right)^{2k}e^{2\varphi(r)}=(r^2-\mu^2)\left(\frac{r+\mu}{r-\mu}\right)^{(1+4k^2)/4k}\exp\left[\frac{Q^2}{8\mu^2k^2}\left(1-\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)^{2k}\right)\right]. \tag{2.3.8c}$$

式中 $\mu>0$，Q 和 k 是任意常参数. 由作用量(2.3.1)和(2.3.8b)，

可以看出 Dilaton 场具有负的动能项.

由于(2.3.8b)第一项含对数式，所以此解一般是奇异的. 但有趣的是，可以使对数项的系数为零，即取 $k=\pm\frac{1}{2}$，消除这一项，从而避免奇异性. 我们取 $k=\frac{1}{2}$，得到

$$\varphi(r)=\frac{Q^2}{4\mu^2}\left(1-\frac{r-\mu}{r+\mu}\right), \tag{2.3.9a}$$

$$w(r)=(r+\mu)^2\exp\left[\frac{Q^2}{2\mu^2}\left(1-\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\right], \tag{2.3.9b}$$

$$u(r)=\frac{1}{v(r)}=\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\exp\left[\frac{Q^2}{2\mu^2}\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\right]. \tag{2.3.9c}$$

这里我们已取 $\varphi_\infty=0$.

当 $Q\to 0$ 时，此解退化为静态球对称的谐和 Fock 解：

$$\mathrm{d}s^2=\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\mathrm{d}t^2-\left(\frac{r+\mu}{r-\mu}\right)\mathrm{d}r^2-(r+\mu)^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{2.3.10}$$

于是，(2.3.9)是在存在 Dilaton 场和电磁场时，Fock 解的推广. 通过上面的退化过程可以看出，参量 μ 是场源的质量，Q 是其电荷. 此解有两个视界：

$$r_\pm=\mu_\pm=\frac{1}{2}(\mu_0\pm\sqrt{\mu_0^2-2Q^2}), \tag{2.3.11}$$

这两个视界都是规则的. 显然，度规 $g_{\mu\nu}$的行列式在视界面上也是规则的：

$$g=w^2(r)\sin^2\theta=-(r+\mu)^4\exp\left[\frac{Q^2}{\mu^2}\left(1-\frac{r-\mu}{r+\mu}\right)\right]\sin^2\theta. \tag{2.3.12}$$

在史瓦希坐标中，我们也可以获得和(2.3.9)类似的解. 把条件(2.3.5)换成

$$u_s(r)=\frac{1}{v_s(r)}=p(r)e^{-2\varphi_s(r)},$$
$$w_s(r)=r^2e^{2\varphi(r)}, \tag{2.3.13a}$$

则下面形式的解满足场方程(2.3.2)、(2.3.3)：

$$p(r)=1-\frac{2\mu}{r},\ \varphi_s(r)=\frac{Q^2}{2\mu r},\ E_s(r)=\frac{Q}{r^2}. \qquad (2.3.13b)$$

在这种情况下，度规和两个场在 $r=0$ 处有奇异性．但是奇点被视界 $r_\pm$[见(2.3.11)]包围．在视界面上，度规和两个场都是规则的．

下面讨论度规(2.3.9)和(2.3.13)给出的标曲率．很明显，和作用量(2.3.1)相对应，能-动张量中的电磁部分是无迹的，对标曲率 R 的贡献仅仅来自 Dilaton 场．求(2.3.2)的迹，可以得到与(2.3.9)对应的标曲率：

$$R(r)=-2g^{mn}\nabla_m\nabla_n\varphi=2\frac{\varphi^2}{w}(r^2-\mu^2)=$$

$$\frac{Q^4}{2\mu^2}\frac{r^2-\mu^2}{(r+\mu)^6}\exp\left[\frac{Q^2}{2\mu^2}\left(\frac{r-\mu}{r+\mu}-1\right)\right]. \qquad (2.3.14a)$$

类似地，由度规(2.3.13)，可以得到标曲率 R_s：

$$R_s(r)=\frac{Q^4}{2\mu^2r^4}\left(1-\frac{2\mu}{r}\right)\exp\left(-\frac{Q^2}{2\mu r}\right).$$

对于极端黑洞，$\mu_0^2=2Q^2$，由(2.3.11)得到

$$\mu=\mu_\pm=\mu_0/2.$$

此时(2.3.14a)给出

$$R_0(r)=8\mu_0^2\frac{4r^2-\mu_0^2}{(2r+\mu_0)^6}\exp\left(-\frac{2\mu_0}{2r+\mu_0}\right). \qquad (2.3.14b)$$

上式在 $r=\mu_0(1+\sqrt{5})/4$

处达到极大值，且在无限远趋于零：

$$R_0(r)\to 0,\ 当\ r\to\infty.$$

对于任意的质量 μ_0，在视界附近有

$$R_0(r)=\frac{2r-\mu_0}{4\mu_0^3}e^{-1}+o(r^2).$$

当 $\mu_0\to 0$ 或 $Q\to 0$ 时，由(2.3.14)可得

$$R_0(r)=\frac{\mu_0^2}{2r^4}+o\left(\frac{\mu_0^3}{r^5}\right).$$

至此，我们得到了 Einstein-Maxwell 场耦合于具有负能项的 Dilaton 场的复合场方程的一个静态球对称解．度规(2.3.9)有两

个与极端黑洞一致的规则视界. 此解有一个显著的特点，质量 μ_0 受电荷的限制：$\mu_0 \geqslant \sqrt{2}Q$. 这与 R-N 解不同(R-N 解 $\mu_0=|Q|$). 当 $Q=0$ 时，所获得的与 Fock 解或史瓦希解一致.

所获得的解仍满足无毛定理. 分析无限远处 Dilaton 场的行为，可以得到 Dilaton 荷的值：

$$D=\frac{Q^2}{2\mu}.$$

这表明复合场的性质仅由两个独立参数(μ_0 和 Q)决定，即黑洞的性质仍然仅由质量、电荷和角动量三个参量决定.

§2.4 共形引力物质规范场

早在 20 世纪初，Weyl 为了统一引力和电磁相互作用，就提出了一种几何化场论. 这种理论导致时空度量和路径有关，不可接受. 但是 Weyl 的思想却成为现代规范场理论的基础. 20 世纪 90 年代，人们又重新对 Weyl(共形)对称性感兴趣，沿这一方向发表了一系列文章. Cheng Hung[49] 提出，在规范物质量产生机制中引入共形对称性是很有意义的. 文[50]将纯规范概念引入共形群，构造了可积 Weyl 空间中包含引力场、物质场和 Weyl 规范场的规范理论. 人们重新关注共形对称性，主要由于量子引力的重整化问题遇到了原则性困难，粒子物理实验一直没找到 Higgs 粒子. 而且目前场论中存在的三种质量(引力质量、惯性质量和真空自发破缺质量)之间的联系也还不很清楚. 期望引入共形对称性能够有助于上述问题的解决.

度规 $g_{\mu\nu}(x)$ 和场 $\Phi(x)$ 满足的局域变换(CT)

$$g'_{\mu\nu}(x)=\Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x),\ \Phi'(x)=\Omega^w(x)\Phi(x) \qquad (2.4.1)$$

称为共形变换，式中 $\Omega(x)$ 为非零实标量函数，w 称为 Weyl 权重. 本节线元取形式

$$ds^2=-g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,\ \eta_{\mu\nu}=(-+++).$$

由(2.4.1)可以定义协变导数：

$$d_\mu = \partial_\mu - w b_\mu(x), \quad (d_\mu \Phi)' = \Omega^w d_\mu \Phi. \tag{2.4.2}$$

$b_\mu(x)$即 Weyl 规范场，满足共形规范变换，

$$b'_\mu = b_\mu + \partial_\mu Q\Omega \cdot \Omega^{-1}. \tag{2.4.3}$$

相应的规范场张量 $H_{\mu\nu} = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu$. 显然对于共形变换群存在相应的纯规范(平联络).

$$b_u = -\partial_\mu \phi \cdot \phi^{-1}, \; b'_\mu = b_\mu + \partial_\mu \Omega \cdot \Omega^{-1}. \tag{2.4.4}$$

满足 $H_{\mu\nu}=0$，其中 $\phi(x)$称 Weyl 标量场，$w=-1$.

Weyl 几何是指具有对称度规张量且满足

$$\overline{\nabla}_\lambda g_{\mu\nu} = d_\lambda g_{\mu\nu} - \overline{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu} g_{\alpha\nu} - \overline{\Gamma}^\alpha_{\lambda\nu} g_{\mu\alpha} = 0 \tag{2.4.5}$$

的空间. 这里$\overline{\nabla}_\lambda$为 CT 和广义坐标变换(GCT)相应的双重协变微商. $\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$为共形不变联络，它与黎曼空间 Christoffel 符号 $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$有关系

$$\overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - (\delta^\alpha_\mu b_\nu + \delta^\alpha_\nu b_\mu - g_{\mu\nu} b^\alpha). \tag{2.4.6}$$

由此可定义 Weyl 曲率张量 $\overline{R}^\rho_{\lambda\mu\nu}$, $\overline{R}_{\mu\nu}$和标曲率 $\overline{R}$,

$$\overline{R}^\rho_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \overline{\Gamma}^\rho_{\nu\lambda} - \partial_\nu \overline{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} + \overline{\Gamma}^\rho_{\mu\alpha} \overline{\Gamma}^\alpha_{\nu\lambda} - \overline{\Gamma}^\rho_{\nu\alpha} \overline{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu},$$

$$\overline{R}_{\mu\nu} = \overline{R}^\rho_{\mu\rho\nu}, \; \overline{R} = g^{\mu\nu} \overline{R}_{\mu\nu} = R + 6(\nabla_\mu b^\mu - b_\mu b^\mu). \tag{2.4.7}$$

通常，Weyl 几何属于半度量空间. 仅当 $H_{\mu\nu}=0$ 满足时才是可积的. 这时联络变为

$$\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \phi^{-1}(\delta^\lambda_\mu \partial_\nu \phi + \delta^\lambda_\nu \partial_\mu \phi - g_{\mu\nu}{}^{\phi\lambda}). \tag{2.4.8}$$

令 $\dot{g}_{\mu\nu} = \phi^2 g_{\mu\nu}$, $\dot{g}^{\mu\nu} = \phi^{-2} g^{\mu\nu}$，易证

$$\dot{\nabla}_\lambda \dot{g}_{\mu\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu} \dot{g}_{\alpha\nu} - \dot{\Gamma}^\alpha_{\lambda\mu} \dot{g}_{\alpha\nu} = 0. \tag{2.4.9}$$

这时时空是可度量的，$d\dot{s}^2 = -\dot{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. 可定义相应的曲率张量 $\dot{R}^\rho_{\lambda\mu\nu}$, $\dot{R}_{\mu\nu}$和 $\dot{R}$. 其中

$$\dot{R} = \phi^{-2}(R - 6\phi^{-1}\Box\phi). \tag{2.4.10}$$

值得讨论的是关于可积 Weyl 时空与 Weyl 规范场 b_μ 的相容性问题. 确实，按照 Weyl 几何的观点它们是不相容的. 然而，如果以 $\dot{g}_{\mu\nu}$为度量，即将 $g_{\mu\nu}$, ϕ 看成描述时空的几何量. 同时按照规范理论，将 b_μ 看成存在于该时空的规范场，则可构造可度量 Weyl 时空中包含 Weyl 规范场的共形场论. 其特点是在保留时空

可度量性质的同时引入新的动力学自由度.

具有普遍对称性的作用量为

$$I=\int\mathscr{L}\mathrm{d}^4x=\int(\mathscr{L}_G+\mathscr{L}_M)\mathrm{d}^4x,$$

$$\mathscr{L}_G=\sqrt{-\mathring{g}}\left(\frac{\alpha}{4}\mathring{R}-\frac{\lambda}{4}\right),\ \mathscr{L}_M=\mathscr{L}_b+\mathscr{L}_{M'}$$

$$\mathscr{L}_b=\sqrt{-\mathring{g}}\left(-\frac{1}{4f^2}\mathring{H}_{\mu\nu}\mathring{H}^{\mu\nu}-\frac{1}{2}k_b^2\mathring{b}_\mu\mathring{b}^\mu\right).\tag{2.4.11}$$

式中仅给出 b_μ 场的拉格朗日，其他物质场将分别讨论. 指标的升降是用 $\mathring{g}^{\mu\nu}$，$\mathring{g}_{\mu\nu}$进行的，且

$$\mathring{R}=\phi^{-2}(R-6\phi^{-1}\Box\phi),\tag{2.4.12}$$

$$\mathring{b}_\mu=b_\mu-b_\mu,\ \mathring{H}_{\mu\nu}=H_{\mu\nu}.$$

令 $\alpha=1/4\pi$，对 $\mathring{g}^{\mu\nu}$变分，得到共形不变的 Einstein 方程

$$\mathring{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathring{g}_{\mu\nu}\mathring{R}=8\pi\left(\mathring{T}_{\mu\nu}-\frac{\lambda}{4}\mathring{g}_{\mu\nu}\right),$$

$$\mathring{T}_{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{-\mathring{g}}}\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta\mathring{g}^{\mu\nu}}.\tag{2.4.13}$$

这实质上是以 $\mathring{g}$ 为度量的共形引力理论.

根据(2.4.12)，可将(2.4.11)写为

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha}{4}(R\phi^2+6\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)-\frac{1}{4f^2}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}-\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}k_b^2(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi+2\phi\partial_\mu\phi\cdot b^\mu+\phi^2b_\mu b^\mu)-\frac{\lambda}{4}\phi^4\right\}+\mathscr{L}_M.\tag{2.4.14}$$

可见引力场是由 $g_{\mu\nu}(x)$，$\phi(x)$场描述的，b_μ 为质荷为 k_b 的物质场，α，f，k_b，λ 均为无量纲参数，且仅有三个是独立的. 特别地，取 $k_b^2=1+3\alpha$ 并利用 $\bar{R}$ 的分解式(2.4.7)，可将(2.4.14)式写成

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha}{4}\bar{R}\phi^2-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathrm{d}_\mu\phi\mathrm{d}_\nu\phi-\frac{1}{4f^2}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}-\frac{\lambda}{4}\phi^4\right\}+$$
$$\mathscr{L}_M{}'.\tag{2.4.15}$$

这正是 Smolin 给出的 Weyl 时空引力理论. 可见，不考虑曲率平方项时，上述理论属于可度量时空共形规范理论的范畴.

由于共形不变性，场量中存在一个非动力学自由度. 不难验

证，在经典意义下，以 $\dot{g}_{\mu\nu}$为基本变量的共形不变 Einstein 方程(2.4.13)包含以 $g_{\mu\nu}(x)$，$\phi(x)$为基本变量的场方程的全部信息. 在理论中 $g_{\mu\nu}$，ϕ 为几何量，描述引力．

对于共形引力场中的粒子，为了满足共形不变性，其质量应以无量纲参数质荷 k 代替，

$$I=-\int k\mathrm{d}\dot{s}=-\int k\phi(x)\mathrm{d}s. \tag{2.4.16}$$

经典粒子运动方程则为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}\dot{s}^2}+\dot{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\dot{u}^\mu\dot{u}^\nu=0, \tag{2.4.17}$$

式中 $\dot{u}^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\dot{s}}$为共形不变四维速度. 定义

$$k^\lambda_{\mu\nu}=-\delta^\lambda_\mu\partial_\lambda\phi\cdot\phi^{-1}+g_{\mu\nu}\partial^\lambda\phi\cdot\varphi^{-1}. \tag{2.4.18}$$

运动方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\lambda}{\mathrm{d}s^2}+(\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+k^\lambda_{\mu\nu})\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s}=0. \tag{2.4.19}$$

定义四动量 $p_\mu=\frac{\partial I}{\partial x^\mu}=k\phi(x)u_\mu$，可以得到粒子在共形引力场中的雅可比方程

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial I}{\partial x^\mu}\frac{\partial I}{\partial x^\nu}+\phi^2k^2=0 \tag{2.4.20}$$

与黎曼时空方程比较，粒子惯性(运动)质量成为场，不再为基本参数，代之以粒子的质荷.

$$m=k\phi(x). \tag{2.4.21}$$

从这种意义讲，$\phi(x)$起惯性场的作用.

为了描述自旋 1/2 粒子在共形引力场中的运动，须建立 Weyl 几何的 Vielbein 形式. 在 Weyl 时空中引入局域 $O(3,1)$切空间，$e_{\mu a}$定义为

$$g_{\mu\nu}(x)=e_{\mu a}(x)e_{\nu a}(x). \tag{2.4.22}$$

相应于局域 Lorentz 变换的李西旋度系数

$$\bar{\omega}_{\mu ab}=\omega_{\mu ab}+\omega'_{\mu ab},\quad \omega_{\mu ab}=\nabla_\mu e_{\nu a}\cdot e^\nu_b,$$
$$\omega'_{\mu ab}=(e_{\mu a}e^\nu_b-e_{\mu b}e^\nu_a)\partial_\nu\phi\cdot\phi^{-1}. \tag{2.4.23}$$

旋量场 $\psi(x)$ 为局域 Lorentz 群旋量表示的变换对象. 由于其正则量纲

$$[\psi]=M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-\frac{1}{2}},$$

则其 Weyl 权重 $\omega=-3/2$. 即在 CT 下,

$$\psi'=\Omega^{-\frac{3}{2}}\psi,\ \bar{\psi}'=\Omega^{\frac{3}{2}}\bar{\psi}. \tag{2.4.24}$$

这时, 满足广义不变性的旋量场拉氏密度函数为

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}(\bar{\psi}\Gamma^{\mu}\overline{\mathscr{D}}_{\mu}\psi-\overline{\mathscr{D}}_{\mu}\bar{\psi}\Gamma^{\mu}\psi)-k\phi\bar{\psi}\psi\right\}, \tag{2.4.25}$$

式中, $\Gamma^{\mu}=e_{a}^{\mu}r_{a}$, 而

$$\overline{\mathscr{D}}_{\mu}\psi=\left(d_{\mu}-\frac{1}{2}\bar{\omega}_{\mu ab}I_{ab}\right)\psi. \tag{2.4.26}$$

采用式(2.4.23), 可以证明

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}(\bar{\psi}\Gamma^{\mu}\mathscr{D}_{\mu}\psi-\mathscr{D}_{\mu}\bar{\psi}\Gamma^{\mu}\psi)-k\phi\bar{\psi}\psi\right\}. \tag{2.4.27}$$

将此式与黎曼空间的拉格朗日比较, 可知除了质量项以外二者相同. 这表明, 对于 Dirac 粒子, $\phi(x)$ 仍然具有惯性因数场的意义; 还表明在 Weyl 规范场同位旋粒子的相互作用中, 不可能引入共形对称性. 这是 b_{μ} 和相因数规范场的本质区别.

对于么正李群 G, 引入规范势 $A_{\mu}(x)$, $A_{\mu}=e_{\mu a}A_{a}$: 由 $[A_{a}]=M^{1/2}T^{-1/2}$ 可知, $A_{a}(x)$ 场的 Weyl 权重应为 -1. 在局域变换下有

$$A_{a}'=\Omega^{-1}A_{a},\ e_{\mu a}'=\Omega e_{\mu a},\ A_{\mu}'=A_{\mu}. \tag{2.4.28}$$

即规范场 A_{μ} 的 Weyl 权重为零, 广义协变规范场张量和拉格朗日与黎曼时空相同, 即

$$\bar{F}_{\mu\nu}=F_{\mu\nu},$$

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\,\frac{1}{2}Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \tag{2.4.29}$$

即运动方程中不含与 b_{μ} 场的相互作用.

在方程(2.4.13)中, 令 $\lambda=0$, 我们讨论场源静止、弱场近似的情况, 以揭示参量 k 的物理意义. 只考虑经典粒子, 共形不变能-动张量为

$$\hat{T}^{\mu\nu}=\rho_{0}\dot{u}^{\mu}\dot{u}^{\nu}. \tag{2.4.30}$$

式中 ρ_0 为共形不变质荷密度．对方程(2.4.13)求迹得

$$\dot{R}^{\mu}_{\nu}=8\pi\left(\dot{T}^{\mu}_{\nu}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}\dot{T}\right),\ \dot{T}=\dot{g}^{\mu\nu}\dot{T}_{\mu\nu}. \tag{2.4.31}$$

对静止源，$\dot{u}^i=0(i=1,\ 2,\ 3)$，$\dot{T}^{\mu\nu}$中不为零的分量仅为

$$\dot{T}^{00}=\rho_0\dot{u}^0\dot{u}^0=\rho_0\phi^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2. \tag{2.4.32}$$

利用低速条件，即得弱场静止源引力场方程

$$\dot{R}^0_0=-4\pi\rho_0. \tag{2.4.33}$$

弱场条件下，可设

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu},\ h_{00}=-2\psi,\ \phi=\phi_0(1+\eta). \tag{2.4.34}$$

式中 $h_{\mu\nu}$，ψ，η 均为小量．由 $\phi(x)$场几何性质，当 $r\to\infty$时，$\phi(x)\to\phi_0\neq0$(常量)．取惯性系条件，且令 $\zeta=\psi+\eta$，则有

$$\dot{g}_{00}\approx-\phi_0^2(1+2\xi),\ \dot{g}_{ij}\approx\phi_0^2(1+2\eta)_{\eta_{ij}}. \tag{2.4.35}$$

代入方程(2.4.33)，可得

$$\nabla^2\xi=4\pi\phi_0^2\rho_0. \tag{2.4.36}$$

由此可得两个质荷分为 k，k'粒子，应有如下引力

$$F=-\frac{kk'}{r^2}. \tag{2.4.37}$$

此式表明了 k 的物理意义——引力荷．

求(2.4.31)的迹，可以得到

$$R-6\phi^{-1}\Box\phi=-8\pi\phi^{-2}T. \tag{2.4.38}$$

式中 $T=T^{\mu}_{\mu}$ 为可积 Weyl 时空外所有物质场能量动量张量的迹．由此可见，惯性因数场确实可以看成是由整个宇宙物质场所决定的量．考虑一个简单的宇宙模型，可以对 ϕ 的值做一大致估计．设宇宙为密度均匀的气体球，密度为 $\rho\approx10^{-29}\mathrm{g/cm^3}$，半径为宇宙表观半径 $a\approx10^{28}\mathrm{cm}$，则标曲率为 $R\approx-6/a^2$，由(2.4.38)式对宇宙取平均值

$$\langle\phi\rangle^2\approx-\frac{8\pi\langle T\rangle}{\langle R\rangle}=\frac{4\pi}{3}\rho a^2\approx10^{27}\mathrm{g/cm}. \tag{2.4.39}$$

这个值接近于引力常数的倒数 $1/G$.

下面讨论共形对称性自发破缺．

拉格朗日(2.4.15)可以写成形式

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha}{4}R\phi^2-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-(1+3\alpha)b^\mu\phi\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}(1+3\alpha)\phi^2b_\mu b^\mu-\frac{1}{4f^2}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}-\frac{\lambda}{4}\phi^4\right\}+\mathscr{L}_M. \tag{2.4.40}$$

相应的 ϕ, $g_{\mu\nu}$, b_μ 场运动方程为

$$\Box\phi+\frac{\alpha}{2}R\phi-(1+3\alpha)\phi b_\mu b^\mu+(1+3\alpha)\phi\nabla_\mu b^\mu-\lambda\phi^3=-Q,$$

$$\nabla_\mu H^\mu_\nu-f^2(1+3\alpha)(\phi\partial_\nu\phi+\phi^2b_\nu)=0,$$

$$\frac{\alpha}{4}\phi^2\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)+\frac{\alpha}{4}(\Box\phi^2\cdot g_{\mu\nu}-\nabla_\mu\nabla_\nu\phi^2)=\cdots,$$

$$Q=-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\mathscr{L}_M}{\delta\phi}.$$

由于描述共形引力时空的是几何量 $g_{\mu\nu}(x)$ 和 $\phi(x)$，它们的真空期望值不应为零. 理论中的物质场则有为零的真空期望值，即

$$\langle g_{\mu\nu}\rangle_0\neq0,\ \langle\phi\rangle_0\neq0,\ \langle A_\mu\rangle_0=\langle\psi\rangle_0=\langle b_\mu\rangle_0=0.$$

代入方程(2.4.42)，可得

$$\langle\phi\rangle_0\partial_\nu\langle\phi\rangle_0=0.$$

由此得到 $\langle\phi\rangle_0=$ 常量 ϕ_0. 这将导致在低能极限下共形对称性的真空自发破缺. 代入(2.4.40)式中，破缺后 Lagrangian 成为

$$\mathscr{L}=\sqrt{-g}\left\{\frac{\alpha\phi_0^2}{4}R-\frac{1}{4f^2}H_{\mu\nu}H^{\mu\nu}-\frac{1}{2}k_b^2\phi_0^2b_\mu b^\mu+\frac{\lambda}{4}\phi_0^4\right\}+\mathscr{L}_M,$$

$$\mathscr{L}_M=\mathscr{L}_M(\Phi^A,\ g_{\mu\nu},\ \phi_0).$$

即所有具有质荷 k 的物质粒子获得统一的惯性因数，其惯性质量成为 $m=k\phi_0$，Einstein 引力理论自然产生，引力常数为

$$G=\frac{1}{4\pi\alpha}\frac{1}{\phi_0^2}.$$

当取 $\alpha=1/4\pi$ 时，$G=1/\phi_0^2$，即 $\phi_0\approx10^{19}$GeV，给出共形对称性真空自发破缺的尺度.

牛顿引力成为 $F=-G\frac{mm'}{r^2}$. 即惯性质量等于引力质量. Weyl 规范场也获得质量 $m_B=fk_B\phi_0$.

§ 2.5 非稳态 Einstein-Maxwell 场

在本节中，我们将 Kerr-Newman 度规推广到非稳态情况[51].

Vaidya-Bonner 度规[52]具有形式

$$g_{00}=1-\frac{2m}{r}-\frac{Q^2}{r^2},$$
$$g_{01}=1,$$
$$g_{22}=-r^2,$$
$$g_{33}=-r^2\sin^2\theta. \tag{2.5.1}$$

式中 $m=m(u)$，$Q=Q(u)$，u 为延迟时间坐标. 此度规场源的质量和电荷为时间任意函数时，引力场的分布.

把(2.5.1)写成零标架形式：

$$g_{\mu\nu}=l_\mu n_\nu+n_\mu l_\nu-m_\mu\overline{m}_\nu-\overline{m}_\mu m_\nu, \tag{2.5.2}$$
$$l_\mu=\delta^0_\mu,$$
$$n_\mu=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m}{r}+\frac{Q^2}{r^2}\right)\delta^0_\mu+\delta^1_\mu,$$
$$m_\mu=-\frac{r}{\sqrt{2}}(\delta^2_\mu+i\sin\theta\delta^3_\mu). \tag{2.5.3}$$

式中 μ、$\nu=0$，…，3，分别代表 u、r、θ、φ. 求出(2.5.2)式的逆变形式并仿照 Newman 提出的方法进行复化，我们得到

$$l^\mu=\delta^\mu_1,$$
$$n^\mu=\delta^\mu_0-\frac{1}{2}\left[1-m\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\bar{r}}\right)+\frac{Q^2}{r\bar{r}}\right]\delta^\mu_1,$$
$$m^\mu=-\frac{1}{\sqrt{2}\,\bar{r}}(\delta^\mu_2+i\sin\theta\delta^\mu_3), \tag{2.5.4}$$

其中 r 可取复值，$\bar{r}$ 是 r 的复共轭.

做坐标变换

$$u' = u - ia\cos\theta,$$
$$r' = r + ia\cos\theta\,(a = \text{const}),$$
$$\theta' = \theta,$$
$$\psi' = \psi. \tag{2.5.5}$$

相应的变换矩阵为：

$$a'^{\mu}_{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ia\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & -ia\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.5.6}$$

再把变换后的 r' 和 u' 取为实值，就得到如下的零标架：

$$l'\mu = \delta^{\mu}_{1},$$
$$n'\mu = \delta^{\mu}_{0} - \frac{1}{2}(1 - 2mr\rho\bar{\rho} + Q^{2}\rho\bar{\rho})\delta^{\mu}_{1},$$
$$m^{\mu} = -\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta\delta^{\mu}_{0} - ia\sin\theta\delta^{\mu}_{1} + \delta^{\mu}_{2} + \frac{i}{\sin\theta}\delta^{\mu}_{3}\right). \tag{2.5.7}$$

式中 $$\rho = -\frac{1}{r - ia\cos\theta}. \tag{2.5.8}$$

去掉撇号并利用方程(2.5.2)，最后得到：

$$g^{00} = -a^{2}\sin^{2}\theta\rho\bar{\rho},$$
$$g^{01} = (a^{2} + r^{2})\rho\bar{\rho},$$
$$g^{03} = -a\rho\bar{\rho},$$
$$g^{11} = (2mr - Q^{2} - r^{2} - a^{2})\rho\bar{\rho},$$
$$g^{13} = a\rho\bar{\rho},$$
$$g^{22} = -\rho\bar{\rho},$$
$$g^{33} = -\frac{\rho\bar{\rho}}{\sin^{2}\theta}. \tag{2.5.9}$$

其协变形式是：

$$g_{00} = 1 - (2mr - Q^{2})\rho\bar{\rho},$$
$$g_{01} = 1,$$
$$g_{03} = a(2mr - Q^{2})\rho\bar{\rho}\sin^{2}\theta,$$

$$g_{13}=-a\sin^2\theta,$$

$$g_{22}=-\frac{1}{\rho\bar{\rho}},$$

$$g_{33}=\sin^4\theta\left[(Q^2-2mr)a^2\rho\bar{\rho}-\frac{a^2+r^2}{\sin^2\theta}\right]. \qquad (2.5.9')$$

这就是我们求得的新的时空度规. 它是 Kerr-Newman 度规的非稳态推广. 它与 Kerr Newman 度规的不同之处是:(2.5.8)和(2.5.9)中代表质量和电荷的 $m(u)$ 和 $Q(u)$ 是延迟坐标时 u 的任意函数, 而 Kerr-Newman 度规的 m 和 Q 都是常数.

为了研究引力场(2.5.9)并把结果与稳态 Kerr-Newman 度规和非稳态 Kerr 度规进行比较, 我们采用另一种零标架:度规(2.9)的零标架的逆变分量为

$$l^\mu=\delta_1^\mu,$$

$$n^\mu=\rho\bar{\rho}\left[(r^2+a^2)\delta_0^\mu+\frac{2mr-Q^2-(r^2+a^2)}{2}\delta_1^\mu+a\delta_3^\mu\right],$$

$$m^\mu=-\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left(ia\sin\theta\delta_0^\mu+\delta_2^\mu+\frac{1}{\sin\theta}\delta_3^\mu\right). \qquad (2.5.10)$$

其协变分量为

$$l_\mu=\delta_\mu^0-a\sin^2\theta\delta_\mu^3,$$

$$n_\mu=\rho\bar{\rho}\left[\frac{r^2+a^2+Q^2-2mr}{2}\delta_\mu^0+\frac{\delta_\mu^1}{\rho\bar{\rho}}+\right.$$
$$\left.\frac{2mr-Q^2-(r^2+a^2)}{2}a\sin^2\theta\delta_\mu^3\right],$$

$$m_\mu=-\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}\left[ia\sin\theta\delta_\mu^0-\frac{\delta_\mu^2}{\rho\bar{\rho}}-i(r^2+a^2)\sin\theta\delta_\mu^3\right].$$

$$(2.5.11)$$

根据旋系数的定义, 再利用附录中给出的 Christoffel 符号, 我们得到

$$\kappa=\varepsilon=\sigma=\lambda=0,$$

$$\rho=-\frac{1}{r-ia\cos\theta},$$

$$\pi=\frac{ia\sin\theta\rho^2}{\sqrt{2}},$$

$$\beta=-\frac{\cot\theta\bar{\rho}}{2\sqrt{2}},$$

$$\alpha=\pi-\bar{\beta},$$

$$\mu=-\frac{2mr-Q^2-(r^2+a^2)}{2}\rho^2\bar{\rho},$$

$$\nu=-\frac{ia\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho^2\bar{\rho},$$

$$\gamma=\mu+\frac{(r-m)\rho\bar{\rho}}{2},$$

$$\tau=-\frac{ia\sin\theta\rho\bar{\rho}}{\sqrt{2}}. \qquad (2.5.12)$$

我们注意到该度规的旋系数 ν 不为零，而在 Kerr-Newman 度规中它为零. 其余的旋系数与 Kerr-Newman 度规形式相同，不同的只是质量和电荷是可变的. 我们将看到，旋系数 ν 不为零将在其他的 Newman-Penrose 量中引起稳态 Kerr-Newman 度规没有的项.

Ricci 张量的标架分量 Φ_{00}、Φ_{01}、Φ_{02}、Φ_{11}、Φ_{12}、Φ_{22} 可用如下的 Newman-Penrose 方程计算：

$$D\rho-\bar{\delta}\kappa=(\rho^2+\sigma\bar{\sigma})+(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\rho-\bar{\kappa}\tau-\kappa(3\alpha+\bar{\beta}-\pi)+\Phi_{00},$$

$$D\alpha-\bar{\delta}\varepsilon=(\rho+\bar{\varepsilon}-2\varepsilon)\alpha+\beta\bar{\sigma}-\bar{\beta}\varepsilon-\kappa\lambda-\bar{\kappa}\gamma+ (\varepsilon+\rho)\pi+\Phi_{10},$$

$$D\lambda-\bar{\delta}\pi=(\rho\lambda+\bar{\sigma}\mu)+\pi^2+(\alpha-\bar{\beta})\pi-\nu\bar{\kappa}-(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\lambda+\Phi_{20},$$

$$D\gamma-\Delta\varepsilon+\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=(\tau+\bar{\pi})\alpha+(\bar{\tau}+\pi)\beta-(\varepsilon+\bar{\varepsilon})\gamma- (\gamma+\bar{\gamma})\varepsilon+\tau\pi-\nu\kappa+(\mu\rho-\lambda\sigma)+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-2\alpha\beta+ (\rho-\bar{\rho})\gamma+(\mu-\bar{\mu})\varepsilon+2\Phi_{11},$$

$$\delta\gamma-\Delta\beta=(\tau-\bar{\alpha}-\beta)\gamma+\mu\tau-\sigma\nu-\varepsilon\bar{\nu}-(\gamma-\bar{\gamma}-\mu)\beta+ \alpha\bar{\lambda}+\Phi_{12},$$

$$\delta\nu-\Delta\mu=(\mu^2+\lambda\bar{\lambda})+(\gamma+\bar{\gamma})\mu-\bar{\nu}\pi+(\tau-3\beta-\bar{\alpha})\nu+\Phi_{22}, \qquad (2.5.13)$$

Ricci 标量 $R=-24\Lambda$ 可用下式求出：

$$D\mu-\delta\pi+\delta\alpha-\bar{\delta}\beta=(\bar{\rho}+\rho)\mu+(\rho-\bar{\rho})\gamma-(\bar{\alpha}-\beta)\pi$$

$$-(\varepsilon\bar{\mu}+\bar{\varepsilon}\mu)-\nu\kappa+\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\pi\bar{\pi}-2\alpha\beta+\Phi_{11}+3\Lambda. \tag{2.5.14}$$

式中 D、Δ 和 δ 是导数. 根据其定义和(2.5.10)式给出的零标架，我们得到

$$D=\partial/\partial r,$$
$$\Delta=\rho\bar{\rho}\Big[(r^2+a^2)(\partial/\partial u)-\frac{1}{2}(r^2+a^2-2mr+Q^2)(\partial/\partial r)+a(\partial/\partial\varphi)\Big],$$
$$\delta=-\frac{\bar{\rho}}{\sqrt{2}}[\imath a\sin\theta(\partial/\partial u)+(\partial/\partial\theta)+\imath\operatorname{cosec}\theta(\partial/\partial\varphi)]. \tag{2.5.15}$$

把上式和方程(2.5.12)给出的旋系数代入(2.5.13)和(2.5.14)式得到

$$\Phi_{00}=\Phi_{01}=\Phi_{02}=0,$$
$$\Phi_{11}=\frac{Q^2}{2}(\rho\bar{\rho})^2,$$
$$\Phi_{12}=-\frac{\imath a\sin\theta}{\sqrt{2}}\left(\frac{\rho^2\bar{\rho}}{2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}+Q(\rho\bar{\rho})^2\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right),$$
$$\Phi_{22}=\frac{a^2\sin^2\theta(\rho\bar{\rho})^2}{2}\left[r\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}u^2}-Q\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}-\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]-r(\rho\bar{\rho})^2\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right), \tag{2.5.16}$$
$$R=-24\Lambda=0.$$

为了计算 Weyl 张量的零标架分量 ψ_0、ψ_1、ψ_2、ψ_3、ψ_4，我们采用下列 Newman-Penrose 方程

$$D\sigma-\delta\kappa=(\rho+\bar{\rho})\sigma+(3\varepsilon-\bar{\varepsilon})\sigma-\kappa(\tau-\bar{\pi}+\bar{\alpha}+3\beta)+\psi_0,$$
$$D\beta-\delta\varepsilon=(\alpha+\pi)\sigma+(\bar{\rho}-\bar{\varepsilon})\beta-(\mu+\gamma)\kappa-(\bar{\alpha}-\bar{\pi})\varepsilon+\psi_1,$$
$$\Delta\rho-\bar{\delta}\tau=-(\rho\bar{\mu}+\sigma\lambda)+(\bar{\beta}-\alpha-\bar{\tau})\tau+(\gamma+\bar{\gamma})\rho+\nu\kappa-\psi_2-2\Lambda,$$
$$\Delta\alpha-\bar{\delta}\gamma=(\rho+\varepsilon)\nu-(\tau+\beta)\lambda+(\bar{\gamma}-\bar{\mu})\alpha+(\bar{\beta}-\bar{\tau})\gamma-\psi_3,$$
$$\Delta\lambda-\bar{\delta}\nu=-(\mu+\bar{\mu})\lambda-(3\gamma-\bar{\gamma})\lambda+(3\alpha+\bar{\beta}+\pi-\bar{\tau})\nu-\psi_4, \tag{2.5.17}$$

把导数(3.6)和(3.3)式给出的旋系数代入方程(3.8)得

$$\psi_0=\psi_1=0,$$

$$\psi_2=\left(\frac{m}{\rho}+Q^2\right)\rho^3\bar{\rho},$$

$$\psi_3=-i\frac{\rho^2\bar{\rho}}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}+4\rho\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\right]a\sin\theta,$$

$$\psi_4=\left\{\left[r\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}u^2}-Q\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}-\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]\frac{\rho^3\bar{\rho}}{2}+\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho^4\bar{\rho}\right\}a^2\sin^2\theta. \tag{2.5.18}$$

注意 (2.5.16)和(2.5.18)中的 Φ_{12}、Φ_{22}、ψ_3、ψ_4 不为零，而这些量在 Kerr-Newman 度规中都为零.

把(2.5.12)、(2.5.15)、(2.5.16)、(2.5.18)代入文〔1〕中的 N-P 方程(3.8.11a)～(3.8.11r)和(3.8.12a)～(3.8.12k)，我们证明了度规(2.5.10)确是 Einstein-Maxwell 方程的严格解.

三个光学标量(剪切度、旋度和散度)为

$$\sigma=\left[\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu}-\Theta^2\right]^{1/2}=0,$$

$$\omega=\left[\frac{1}{2}l_{(\mu;\nu)}l^{\mu;\nu}\right]^{1/2}=-a\rho\bar{\rho}\cos\theta,$$

$$\Theta=-\frac{1}{2}l^{\mu}_{;\mu}=-r\rho\bar{\rho}. \tag{2.5.19}$$

很明显它们和 Kerr-Newman 度规相同. 下面我们将证明度规(2.5.9)是 Petrov Ⅱ 型，其重复的主零矢量为 l^μ. 因此，我们的解具有与 Kerr-Newman 相同的剪切度、旋度和零线汇.

我们现在计算在坐标系 u、r、θ、φ 中的 Ricci 张量. 由于 Ricci 标量为零(参见方程(2.5.16))，所以 $R_{\mu\nu}=R_{mn}Z^m_\mu Z^n_\nu=T_{\mu\nu}$. 于是，能-动张量由下式给出

$$T_{\mu\nu}=4Q^2(\rho\bar{\rho})^2[l_{(\mu}n_{\nu)}+m_{(\mu}\bar{m}_{\nu)}]-\left\{a^2\sin^2\theta(\rho\bar{\rho})^2\left[r\frac{\mathrm{d}^2m}{\mathrm{d}u^2}-Q\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}u^2}-\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)^2\right]+2r\rho\bar{\rho}^2\left(r\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\right\}l_\mu l_\nu-$$

$$\frac{4a\sin\theta}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}\rho\bar{\rho}Im(l_{(\mu}\overline{m}_{\nu)}\rho)-$$

$$\frac{8Q(\rho\bar{\rho})^2 a\sin\theta}{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}Im(l_{(\mu}\overline{m}_{\nu)}\rho). \tag{2.5.20}$$

利用方程(2.5.11)和(2.5.20)，我们可直接写出在坐标系u、r、θ、φ中的Ricci张量和能-动张量的各分量. 结果表明满足主能条件，这表明度规(2.5.9)是具有物理意义的.

下面讨论度规的代数分类. 我们采用Petrov分类的旋量形式对Weyl张量进行分类. 在时空的每一点，l^μ、n^μ、m^μ、$\overline{m}^\mu$都对应一个旋量基为l_A、n_A的切空间(满足$l_An^A=1$). 由旋量基可得到在5维复空间E_5中的另一组基

$$\begin{aligned}
&\xi_{0ABCD}=n_An_Bn_Cn_D,\\
&\xi_{1ABCD}=-4l_{(A}n_Bn_Cn_{D)},\\
&\xi_{2ABCD}=6l_{(A}l_Bn_Cn_{D)},\\
&\xi_{3ABCD}=-4l_{(A}l_Bl_Cn_{D)},\\
&\xi_{4ABCD}=l_Al_Bl_Cl_D.
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

利用这组基，Weyl旋量ψ_{ABCD}(它是等价Weyl张量$C_{\mu\nu\rho\sigma}$的旋量)可表示为

$$\psi_{ABCD}=\sum_{m=0}^{4}\psi_m\xi_{mABCD}. \tag{2.5.22}$$

式中α_m是Weyl旋量的标架分量. 由于本度规的$\psi_0=\psi_1=0$(参见方程(2.5.18))，用l^Cl^D缩并(2.5.22)式得到

$$\psi_{ABCD}l^Cl^D=\psi_2l_Al_B. \tag{2.5.23}$$

式中α_A和l_A成正比. 由此可知，若$\gamma_C\neq\delta_C$，度规是Petrov Ⅱ型；若$\gamma_C=\delta_C$，则度规为D型. 这里，容易证明$3\psi_2\psi_4\neq\psi_3^2$，从而有$\gamma_C\neq\delta_C$，因此我们的度规属于Petrov Ⅱ型.

注意 在(2.5.8)中：

第一类Christoffel符号的非零分量为

$$\Gamma_{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{2}[g_{\alpha\beta,\gamma}+g_{\alpha\gamma,\beta}-g_{\beta\gamma,\alpha}]=\Gamma_{\alpha\gamma\beta},$$

$$\Gamma_{000}=-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{001}=(2mr-Q^2)r\rho^2\bar{\rho}^2-m\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{002}=-(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$
$$\Gamma_{013}=-(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{023}=(2mr-Q^2)(r^2+a^2)a\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$
$$\Gamma_{033}=\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{100}=-(2mr-Q^2)r\rho^2\bar{\rho}^2+m\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{103}=(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{122}=r,$$
$$\Gamma_{123}=-a\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma_{133}=-(2mr-Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}+r\sin^2\theta,$$
$$\Gamma_{200}=(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$
$$\Gamma_{203}=-(2mr-Q^2)(r^2+a^2)a\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$
$$\Gamma_{212}=-r,$$
$$\Gamma_{213}=a\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma_{222}=a^2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma_{233}=(r^2+a^2)\sin\theta\cos\theta+(2mr-Q^2)(2a^2\sin^3\theta\cos\theta\rho\bar{\rho}+a^4\sin^5\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2),$$
$$\Gamma_{300}=2\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{301}=-(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{302}=(2mr-Q^2)(r^2+a^2)a\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$
$$\Gamma_{303}=-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho},$$
$$\Gamma_{312}=-a\sin\theta\cos\theta,$$
$$\Gamma_{313}=(2mr-Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}-r\sin^2\theta,$$
$$\Gamma_{323}=-(r^2+a^2)\sin\theta\cos\theta-(2mr-Q^2)(2a^2\sin^3\theta\cos\theta\rho\bar{\rho}+a^4\sin^5\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2). \tag{A1}$$

第二类 Christoffer 符号的非零分量为

$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}=g^{\mu\gamma}\Gamma_{\gamma\alpha\beta}$,

$$\Gamma^0{}_{00}=-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2-(mr^2-Q^2r)\rho^2\bar{\rho}^2+ ma^2\rho^2\bar{\rho}^2-(2mr-Q^2)ra^2\sin^2\theta\rho^3\rho^{-3},$$

$$\Gamma^0{}_{02}=-(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$

$$\Gamma^0{}_{03}=(2mr^2-Q^2r)a^3\sin^4\theta\rho^3\rho^{-3}+ (2mr-Q^2)ar\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0{}_{12}=a^2\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0{}_{13}=ra\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0{}_{22}=r(a^2+r^2)\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^0{}_{23}=(2mr-Q^2)a^3\sin^3\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$

$$\Gamma^0{}_{33}=-(mr^4-Q^2r^3-Q^2ra^2)a^2\sin^4\theta\rho^3\rho^{-3}- mr^2a^4\sin^6\theta\rho^3\rho^{-3}+ma^6\sin^4\theta\cos\theta- \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^4\sin^6\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ra^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}+r\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^1{}_{00}=(2mr^2-Q^2r)a^2\sin^2\theta\rho^3\rho^{-3}-(2mr-Q^2)^2r\rho^3\rho^{-3}+ \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+(2mr-Q^2)m\rho^2\bar{\rho}^2+ (2mr^2-Q^2r)\rho^2\bar{\rho}^2-ma^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2- \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)\rho\bar{\rho}-m\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1{}_{01}=(2mr-Q^2)r\rho^2\bar{\rho}^2-m\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1{}_{03}=(2mr-Q^2)^2ra\sin^2\theta\rho^3\rho^{-3}-(2mr- Q^2)ra^3\sin^4\theta\rho^3\rho^{-3}-(2mr-Q^2)ma\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2- (2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2- \left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1{}_{12}=-a^2\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1{}_{13}=-(2mr-Q^2)ra\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ma\sin^2\theta\rho\bar{\rho}-ra\sin^2\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^1{}_{22}=(2mr-Q^2)r\rho\bar{\rho}-ra^2\sin^2\theta\rho\bar{\rho}-r,$$

$$\Gamma^1{}_{33}=-(2mr-Q^2)^2ra^2\sin^4\theta\rho^3\rho^{-3}+$$

$$(2mr-Q^2)ra^4\sin^6\theta\rho^3\rho^{-3}+\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)$$

$$a^4\sin\theta\rho^2\bar{\rho}^2+(2mr-Q^2)ra^2\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+$$

$$(2mr-Q^2)ma^2\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2-ma^4\sin^6\theta\rho^2\bar{\rho}^2+$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}-ma^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}+$$

$$(2mr-Q^2)r\sin^2\theta\rho\bar{\rho}-ra^2\sin^4\theta\rho\bar{\rho}-r\sin^2\theta,$$

$$\Gamma^2{}_{00}=-(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^3\rho^{-3},$$

$$\Gamma^2{}_{03}=(2mr-Q^2)r^2a\sin\theta\cos\theta\rho^3\rho^{-3}+$$

$$(2mr-Q^2)a^3\sin\theta\cos\theta\rho^3\rho^{-3},$$

$$\Gamma^2{}_{12}=r\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^2{}_{13}=-a\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^2{}_{22}=-a^2\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^2{}_{33}=-(2mr-Q^2)a^4\sin^5\theta\cos\theta\rho^3\rho^{-3}-2(2mr-Q^2)$$

$$a^2\sin^3\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2-(r^2+a^2)\sin\theta\cos\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^3{}_{00}=-\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a\rho^2\bar{\rho}^2+ma\rho^2\bar{\rho}^2-$$

$$(2mr-Q^2)ra\rho^3\rho^{-3},$$

$$\Gamma^3{}_{02}=-(2mr-Q^2)a\cos\theta\operatorname{cosec}\theta\rho^2\bar{\rho}^2,$$

$$\Gamma^3{}_{03}=(2mr-Q^2)ra^2\sin^2\theta\rho^3\rho^{-3}-ma^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2+$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^2\sin^2\theta\rho^2\bar{\rho}^2$$

$$\Gamma^3{}_{12}=a\cos\theta\operatorname{cosec}\theta\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^3{}_{13}=r\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^3{}_{22}=ra\rho\bar{\rho},$$

$$\Gamma^3{}_{23}=(2mr-Q^2)a^2\sin\theta\cos\theta\rho^2\bar{\rho}^2+\cos\theta\operatorname{cosec}\theta,$$

$$\Gamma^3{}_{33}=-(2mr-Q^2)ra^3\sin^4\theta\rho^3\rho^{-3}-$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}u}r-Q\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}u}\right)a^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+$$

$$ma^3\sin^4\theta\rho^2\bar{\rho}^2+ra\sin^2\theta\rho\bar{\rho}. \tag{A2}$$

§2.6 Einstein-Maxwell 场的一个静磁解

我们曾在文〔40〕中给出一个一级近似解，描述含磁矩的质量源的外部场. 本节将给出一个严格解.

Einstein-Maxwell 场的第一个严格解是 G. Bonnor 于 1954 年获得的. 接着，Tauber 采用 Kerson 解构成一个含磁荷的中心质量的外部解. 1966 年，Bonnor 采用 Kerr 度规，用自己的关于稳态真空解和电磁真空解的对应关系，得到了一个含两个参量的解(含质量和磁偶极矩). 这个解在无限远是平直的，磁场趋近于磁偶极子的磁场. 但是 Bonnor 的解有一个问题，即当磁的参量为零时不能过渡到史瓦希解[53].

70 年代末，Herlt 求出了一个解簇，其中包括 Bonnor 解，也可退化为 R-N 解. 但是很遗憾，Herlt 的解不能描述磁偶极矩的静磁场.

下面将给出的解满足上述各个物理条件，描述质量-磁矩的外部场.

E-M 方程具有形式

$$\begin{aligned}
&R_{ik}=8\pi T_{ik},\ \frac{\partial}{\partial x^k}(\sqrt{-g}F_{lm}g^{il}g^{km})=0,\\
&F_{ik,l}+F_{kl,i}+F_{li,k}=0, \qquad (2.6.1)\\
&T_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(F_{il}F^l_k-\frac{1}{4}F_{lm}F^{lm}g_{ik}\right),\\
&F_{ik}=A_{k,i}-A_{i,k}=\frac{\partial A_k}{\partial x^i}-\frac{\partial A_i}{\partial x^k}.
\end{aligned}$$

静态辐射对称引力场度规的一般形式为

$$ds^2=f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2+dz^2)+\rho^2d\varphi^2]-fdt^2. \tag{2.6.2}$$

函数 f 和 r 只依赖于 ρ 和 z.

在所讨论的情况下，4 维势可写为 $A_\mu=A_3(\rho,z)$，其余分量为零. 这样，可将(2.6.1)改写为

$$f\Delta f=(\nabla f)^2+\frac{2f^3}{\rho^2}(\nabla A_3)^2,\ \nabla\left(\frac{f}{\rho^2}\nabla A_3\right)=0, \tag{2.6.3}$$

$$4\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\frac{\rho}{f^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{4f}{\rho}\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial A_3}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$2\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\frac{\rho}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial f}{\partial z}+4\frac{f}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\rho}\frac{\partial A_3}{\partial z}, \tag{2.6.4}$$

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\ \nabla\equiv\boldsymbol{p}_0\frac{\partial}{\partial\rho}+z_0\frac{\partial}{\partial z}.$$

式中 $\boldsymbol{p}_0$ 和 z_0 是单位矢量.

从(2.6.3)的第二个方程可以看出，由式

$$\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}=-\frac{f}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial z},\ \frac{\partial A_3'}{\partial z}=\frac{f}{\rho}\frac{\partial A_3}{\partial\rho} \tag{2.6.5}$$

给出的 A_3' 也满足场方程. 将 A_3' 代入，(2.6.3)和(2.6.4)改写为

$$f\Delta f=(\nabla f)^2+2f(\nabla A_3')^2,\ f\Delta A_3'=\nabla A_3'\cdot\nabla f, \tag{2.6.6}$$

$$\frac{4}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\frac{1}{f^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{4}{f}\left[\left(\frac{\partial A_3'}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}\right)^2\right], \tag{2.6.7}$$

$$\frac{2}{\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\frac{1}{f^2}\frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{4}{f}\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}\frac{\partial A_3'}{\partial z}.$$

再引入两个函数 ε_1 和 ε_2：

$$\varepsilon_1=u+A_3',\ \varepsilon_2=u-A_3',\ u=\sqrt{f}, \tag{2.6.8}$$

可将静磁场方程写成对称形式：

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Delta\varepsilon_1=2(\nabla\varepsilon_1)^2,\ (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Delta\varepsilon_2=2(\nabla\varepsilon_2)^2, \tag{2.6.9}$$

$$\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{4\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\rho}-\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z},$$

$$\frac{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}{4\rho}\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial z}\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\rho}. \tag{2.6.10}$$

我们发现，如果$(\bar{\varepsilon}_1,\bar{\varepsilon}_2)$是方程(2.6.9~10)的解，则

$$\varepsilon_1=\frac{-a+b\bar{\varepsilon}_1}{c-d\bar{\varepsilon}_1},\ \varepsilon_2=\frac{a+b\bar{\varepsilon}_2}{c+d\bar{\varepsilon}_2}, \tag{2.6.11}$$

也是方程(2.6.9~10)的解. 式中 a,b,c 和 d 都是任意的实常数.

令上式中 $c=0$，$a=-2dc$，$b=-d$，得到

$$\epsilon_1 = -\frac{2c_0}{\tilde{\epsilon}_1} + 1, \quad \epsilon_2 = -\frac{2c_0}{\tilde{\epsilon}_2} - 1. \tag{2.6.12}$$

这样，我们得到一个生成解定理：知道了场方程的一个解$(\tilde{f}, \tilde{A}_3')$，便可构造一个新解

$$f = 4c_0^2 \tilde{f} (\tilde{A}'^2_3 - \tilde{f})^{-2}, \quad A_3' = 1 - 2c_0 \tilde{A}_3' (\tilde{A}'^2_3 - \tilde{f})^{-1}. \tag{2.6.13}$$

由(2.6.10)和(2.6.12)可知$r = \tilde{r}$.

下面我们将获得一新的解簇.

把方程(2.6.6)改写为

$$f\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right] = \left(\frac{\partial f}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 2f\left[\left(\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_3'}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$f\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A_3'}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 A_3'}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial f}{\partial\rho}\frac{\partial A_3'}{\partial\rho} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial A_3'}{\partial z}. \tag{2.6.14}$$

引入两个函数ψ和χ，满足方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\chi}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho} + \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} = 0, \tag{2.6.15}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}. \tag{2.6.16}$$

不难证明，如果$F(\psi)$是常微分方程

$$F\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\psi^2} = \left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\psi}\right)^2 + 2F \tag{2.6.17}$$

的解，则

$$\tilde{A}_3' = \chi, \quad \tilde{f} = \rho^2 F(\psi)$$

就是方程(2.6.14)的解. (2.6.18)

解(2.6.17)，得到

$$F(\psi) = \frac{1}{b_0}\left(\frac{e^{\psi} + b_0 e^{-\psi}}{2}\right)^2, \quad b_0 = \text{const}. \tag{2.6.19}$$

令$b_0 = 1$，即$F = \mathrm{ch}^2\psi$，与(2.6.13)对应的(2.6.14)的解可以写成

$$f = \frac{4c_0^2\rho^2\mathrm{ch}^2\psi}{(\chi^2 - \rho^2\mathrm{ch}^2\psi)^2}, \quad A_3' = 1 - \frac{2c_0\chi}{\chi^2 - \rho^2\mathrm{ch}^2\psi}. \tag{2.6.20}$$

这时方程(2.6.7)可以改写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(2\gamma-2\ln \mathrm{ch}^2\psi-\ln\frac{\rho^2}{\kappa_0^2}\right)=$$
$$-2\left[\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2\right],$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(2\gamma-2\ln \mathrm{ch}^2\psi-\ln\frac{\rho^2}{\kappa_0^2}\right)=-\frac{4}{\rho^2}\frac{\partial\chi}{\partial\rho}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \qquad (2.6.21)$$

方程(2.6.5)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(2c_0A_3+\chi^2\mathrm{th}\psi)=\rho\frac{\partial\chi}{\partial z},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}(2c_0A_3+\chi^2\mathrm{th}\psi)=-\rho\frac{\partial\chi}{\partial\rho}+2\chi. \qquad (2.6.22)$$

方程(2.6.20～22)确定了E-M场方程的新的解簇.

令 $\rho=\kappa_0\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)},\ z=\kappa_0 xy,$ (2.6.23)

从Weyl坐标变至椭球坐标，再变至史瓦希坐标，(2.6.20)便退化为史瓦希解和R-N解. 由这一退化和解的渐近行为，便可确定解中各参量的物理意义. 下面我们就来做这一工作.

将(2.6.20～22)变至椭球坐标，我们有

$$\kappa_0\frac{\partial}{\partial\rho}\equiv\sqrt{(x^2-1)(1-y^2)}(x^2-y^2)^{-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}\right),$$
$$\kappa_0\frac{\partial}{\partial z}\equiv(x^2-y^2)^{-1}\left[(x^2-1)y\frac{\partial}{\partial x}+(1-y^2)x\frac{\partial}{\partial y}\right]. \qquad (2.6.24)$$

在坐标(x,y)中，度规(2.6.2)具有形式

$$ds^2=\kappa_0^2f^{-1}\left[e^{2\gamma}(x^2-y^2)\left(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2}\right)+(x^2-1)(1-y^2)d\varphi^2\right]-fdt^2, \qquad (2.6.25)$$

而解(2.6.20)和方程(2.6.15～16)具有形式

$$f=\frac{4c_0^2\kappa_0^2(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{ch}^2\psi}{[\chi^2-\kappa_0^2(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{ch}^2\psi]^2},$$
$$A_3'=1-\frac{2c_0\chi}{\chi^2-\kappa_0^2(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{ch}^2\psi}, \qquad (2.6.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi}\left[(x^2-1)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1-y^2)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right]=0,$$

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}=0, \tag{2.6.27}$$

$$k_0\frac{\partial \psi}{\partial x}=-\frac{1}{x^2-1}\frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad k_0\frac{\partial \psi}{\partial y}=\frac{1}{1-y^2}\frac{\partial \chi}{\partial x}. \tag{2.6.28}$$

为了得到史瓦希解，只要令

$$\chi=\kappa_0(x+1), \quad \psi=\frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}.$$

取 $c_0=k_0$，由(2.6.26)得

$$f=\frac{x-1}{x+1}, \quad A_3'=0.$$

变至史瓦希坐标：

$$x=(r-m_0)/k_0, \quad y=\cos\theta,$$

再令 $k_0=m_0$，得到

$$f=1-\frac{2m_0}{r}, \quad A_3'=0, \quad e^{2\gamma}=\frac{r^2-2m_0r}{r^2-2m_0r+m_0^2\sin^2\theta},$$

此即史瓦希解.

所获得的解簇(2.6.26)可以把史瓦希解推广至场源含磁参量的情况.

(2.6.27)中的函数 χ，我们选取为

$$\chi=\kappa_0(x+p_0+q_0y), \; q_0=\text{const}, \; p_0=\text{const}, \tag{2.6.29}$$

代入(2.6.28)，得到 ψ 的表示式

$$\psi=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+y}{1-y}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{q_0}\right]. \tag{2.6.30}$$

这时有 $\quad \mathrm{ch}^2\psi=\frac{M^2}{1-y^2}, \; M=\frac{1+y}{2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{q_0/2}+\frac{1-y}{2}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{q_0/2};$

$$\tag{2.6.31}$$

(2.6.8)中的函数 ε_1 和 ε_2 具有形式

$$\varepsilon_1=-\frac{2c_0}{u+\chi}+1, \; \varepsilon_2=-\frac{2c_0}{u-\chi}-1, \tag{2.6.32}$$

当 $c_0=m_0$ 时有

$$\varepsilon_1 = -\frac{2m_0}{k_0}\frac{1}{M\sqrt{x^2-1}+(x+p_0+q_0y)}+1,$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{2m_0}{k_0}\frac{1}{M\sqrt{x^2-1}-(x+p_0+q_0y)}-1. \qquad (2.6.33)$$

于是势 $f=\left(\frac{2m_0u}{\chi^2-u^2}\right)^2$, $A_3'=1-\frac{2m_0\chi}{\chi^2-u^2}$

的表示式为

$$f=\frac{4m_0^2(x^2-1)M^2}{k_0^2[(x+p_0+q_0y)^2-(x^2-1)M^2]^2},$$

$$A_3'=1-\frac{2m_0(x+p_0+q_0y)}{k_0[(x+p_0+q_0y)^2-(x^2-1)M^2]}. \qquad (2.6.34)$$

方程(2.6.21)在坐标(x, y)中具有形式

$$k_0^2(x^2-y^2)\frac{\partial\Gamma}{\partial x}=x\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2-\frac{x(1-y^2)}{x^2-1}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2-2y\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y},$$

$$k_0^2(x^2-y^2)\frac{\partial\Gamma}{\partial y}=\frac{y(x^2-1)}{1-y^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2-y\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2+2x\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial\chi}{\partial y},$$

$$(2.6.35)$$

$$\Gamma=2\ln\,\mathrm{ch}\psi+\frac{1}{2}\ln[(x^2-1)(1-y^2)]-\gamma.$$

积分上式，得到

$$(x+y)^{(1+q_0)^2}(x-y)^{(1-q_0)^2}e^{2\gamma}=M^4(x^2-1)^{1+q_0^2}. \quad (2.6.36)$$

把方程(2.6.22)变至椭球坐标系，得到

$$2m_0\frac{\partial A_3}{\partial x}=-\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial x}(\chi^2\mathrm{th}\psi)+2y\chi+(1-y^2)\frac{\partial\chi}{\partial y},$$

$$2m_0\frac{\partial A_3}{\partial y}=-\frac{1}{k_0}\frac{\partial}{\partial y}(\chi^2\mathrm{th}\psi)+2x\chi-(x^2-1)\frac{\partial\chi}{\partial x}. \quad (2.6.37)$$

在我们讨论的情况下，

$$\chi=k_0(x+p_0+q_0y),\ \mathrm{th}\psi=2\left[1+\frac{1-y}{1+y}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{q_0}\right]^{-1}-1.$$

积分(2.6.37)，得到

$$\frac{2m_0}{k_0^2}A_3=-(x+p_0+q_0y)^2\mathrm{th}\psi+y(x^2+1)+$$
$$q_0x(y^2+1)+2p_0xy+D_0. \qquad (2.6.38)$$

式中 D_0 是积分常数.

令 $D_0=2q_0p_0$，$p_0^2+q_0^2=1$，$k_0=m_0(1-q_0^2)^{-1/2}$，

$\sigma_0=q_0m_0(1-q_0^2)^{-1/2}$，

变回史瓦希坐标：

$$x=\frac{r-m_0}{k_0},\ y=\cos\theta,$$

便最后得到度规(2.6.2)和势 A_3 的具体形式：

$$ds^2=f^{-1}M^4N(dr^2+Kd\theta^2)+f^{-1}K\sin^2\theta d\varphi^2-fdt^2, \tag{2.6.39}$$

$$f=4m_0^2KM^2[(r+\sigma_0\cos\theta)^2-(r^2+2m_0r-\sigma_0^2)M^2]^{-2}, \tag{2.6.40}$$

$$m_0A_3=(\cos\theta-\mathrm{th}\psi)(r+\sigma_0\cos\theta)^2+\sigma_0(r+\sigma_0\cos\theta+m_0)\sin^2\theta. \tag{2.6.41}$$

式中 $K=r^2-2m_0r-q_0^2m_0^2(1-q_0^2)^{-1}$，

$$M=\sin^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)-m_0}{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)+m_0}\right]^{q_0/2}+\cos^2\frac{\theta}{2}\left[\frac{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)+m_0}{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)-m_0}\right]^{q_0/2}.$$

$$N=\left[\frac{(1-q_0^2)K}{(1-q_0^2)K+m_0^2\sin^2\theta}\right]^{q_0^2}\left[\frac{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)-m_0\cos\theta}{\sqrt{1-q_0^2}(r-m_0)+m_0\cos\theta}\right]^{2q_0}.$$

我们发现，当 $q_0=0$ 时，度规(2.6.39)退化为史瓦希度规. 由渐近行为

$$f^{-1}M^4N\to\left(1+\frac{2m_0}{r}\right),\ f^{-1}KM^4N\to r^2$$

可知，当 $r\to\infty$时，我们获得的度规趋近于史瓦希度规：

$$ds^2\approx\left(1+\frac{2m_0}{r}\right)dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2-\left(1-\frac{2m_0}{r}\right)dt^2.$$

由此可知，度规(2.6.39)是渐近平直的，参量 m_0 应即为引力源

的引力质量. 由函数 A_3 的渐近行为

$$A_3 \to -\frac{2}{3} m \ \sigma_0 \ \frac{1}{2} \sin^2\theta$$

可知，量

$$\sigma_0 = q_0 m_0 \sqrt{1-q_0^2}$$

应该是单位源质量的磁矩.

因此，我们获得的解描述具有磁荷和磁矩的中心质量的 Einstein-Maxwell 场.

3 生成解定理

§3.1 引　　言

广义相对论的发展很大程度上取决于爱因斯坦场方程的严格解和它们的物理解释. 专家们一方面在寻求场方程的新的严格解，另一方面尽量寻找一些变换，从一个已知解生成一个新解.

由 Ernst 和 Kinnersley 等人给出的定理，成功地从场方程的一个辐射对称真空解生成一个新解，因而使人们对辐射对称真空场方程的解特别感兴趣. 当然，人们对这类场感兴趣的另一个重要原因是它们在天体物理方面具有重要意义. 本章将讨论 Ernst 等人的生成技术，给出场方程的另外一些解.

前面我们曾讨论过具有辐射对称性的静态度规(Weyl 和 Levi-Civita 解)，将这些度规进行自然推广，可以得到具有辐射对称性的稳态度规. Lewis 和 Van Stockum 给出了一个这样的稳态度规，但是不满足渐近平直条件. Kerr 度规满足渐近条件. 在第 1 章中用复延拓方法得到了这一度规(§1.14)，又由直接解引力场方程的方法得到了这一度规(§1.15). 本章将用 Ernst 方法和孤立子方法给出它的解析推导.

在本章中，除了讨论 Ernst 的生成技术以外，还讨论 Kinnersley、Chandrasekhar 和 Ehlers 的生成技术以及参量变换技术，最后还将较详细地讨论孤立子方法，并用这些技术和方法获得一些新的严格解，其中包括著名的 Kerr 解和 Tomimatsu-Sato 解.

§3.2 轴对称度规

如果拉格朗日密度不含时间坐标 t 和方位坐标 φ，则这一稳定系统具有辐射对称性. 在经典场论中这包含角动量守恒定律：$J=\partial\mathscr{L}/\partial\varphi$ 对于坐标变换

$$t'=-t,\quad \varphi'=-\varphi \tag{3.2.1}$$

是不变量. 因此，所寻求的线元应不含有项 $dx^1d\varphi$, $dx^2d\varphi$, $dtdx^1$ 和 $dtdx^2$. 这样的线元可以写为

$$ds^2=g_{00}dt^2+g_{11}dx^{1^2}+g_{22}dx^{2^2}+g_{33}dx^{3^2}+ g_{03}dtd\varphi+2g_{12}dx^1dx^2. \tag{3.2.2}$$

式中度规张量的各分量均不依赖于 t 和 φ，且 x^1 和 x^2 是两个渐近类空坐标. 由于 Weyl 张量在二维空间中恒等于零(见附录§9)，所以面

$$ds_{11}^2=g_{11}dx^1+2g_{12}dx^1dx^2+g_{22}dx^{2^2} \tag{3.2.3}$$

是共形平直的. 和静态的情况一样，存在变换

$$x'^1=x'^1(x^1,x^2),$$
$$x'^2=x'^2(x^1,x^2), \tag{3.2.4}$$

使线元(3.2.3)变为对角形式：

$$ds_{11}^2=-e^{\mu}(dx'^{1^2}+dx'^{2^2}). \tag{3.2.5}$$

式中 $\mu=\mu(x'^1,x'^2)$. 这一变换不影响 t 和 φ 分量. 去掉撇号，(3.2.2)成为

$$ds^2=g_{00}dt^2+2g_{03}dtd\varphi-e^{\mu}(dx^{1^2}+dx^{2^2})+g_{33}d\varphi^2. \tag{3.2.6}$$

(3.2.6)是最一般的辐射对称稳态度规. 当 $g_{03}=0$ 时上式退化为静态度规.

我们将(3.2.6)写成形式

$$ds^2=Vdt^2-2Wdtd\varphi-e^{\mu}dx^{1^2}-e^{\mu}dx^{2^2}-Xd\varphi^2. \tag{3.2.7}$$

式中 V, W 和 X 只是 x^1 和 x^2 的函数.

由(3.2.7)可得

$$\sqrt{-g}=\rho e^{\mu},$$

$$\rho \equiv VX + W^2. \tag{3.2.8}$$

注意到 $$\frac{\partial^2}{\partial s^2} = \rho^{-2} X \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\rho^{-2} W \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \varphi} - e^{-\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} - e^{-\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} - \rho^{-2} V \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \tag{3.2.9}$$

可以得到 $g^{\mu\nu}$的表达式，从而可写出 $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$和 $R_{\mu\nu}$的表达式. 代入场方程 $R_{\mu\nu}=0$，得到所寻求的关于 V，W 和 X 的真空引力场方程：

$$2\rho_{,11} + (\rho_{,1}\mu_{,1} - \rho_{,2}\mu_{,2}) + \frac{1}{2\rho}[(V_{,1}X_{,1} + W^2_{,1}) - (V_{,2}X_{,2} + W^2_{,2})] = 0, \tag{3.2.10}$$

$$-2\rho_{,22} + (\rho_{,1}\mu_{,1} - \rho_{,2}\mu_{,2}) + \frac{1}{2\rho}[(V_{,1}X_{,1} + W^2_{,1}) - (V_{,2}X_{,2} + W^2_{,2})] = 0, \tag{3.2.11}$$

$$(\rho^{-1}V_{,\iota})_{,\iota} + \frac{V}{2\rho}[\rho^{-2}(V_{,\iota}X_{,\iota} + W_{,\iota}W_{,\iota}) + 2\nabla^2\mu] = 0, \tag{3.2.12}$$

$$(\rho^{-1}X_{,\iota})_{,\iota} + \frac{X}{2\rho}[\rho^{-2}(V_{,\iota}X_{,\iota} + W_{,\iota}W_{,\iota}) + 2\nabla^2\mu] = 0, \tag{3.2.13}$$

$$(\rho^{-1}W_{,\iota})_{,\iota} + \frac{W}{2\rho}[\rho^{-2}(V_{,\iota}X_{,\iota} + W_{,\iota}W_{,\iota}) + 2\nabla^2\mu] = 0. \tag{3.2.14}$$

式中脚标 $\iota=1, 2$；两个脚标重复表示取和；∇^2 是二维拉普拉斯算符：

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}}.$$

由(3.2.10)减去(3.2.11)，得到

$$\nabla^2\rho = 0, \tag{3.2.15}$$

即 ρ 为调和函数. 为了简化场方程，引入典型的柱坐标(ρ, z)，令

$$x^1 = \rho,\ x^2 = z. \tag{3.2.16}$$

式中 ρ 是方程(3.2.15)的一个任意解. 上式使方程(3.2.10)和(3.2.11)成为全同方程. 将(3.2.16)代入(3.2.10)，得到

$$\mu_{,1}=-\frac{1}{2\rho}[(V_{,1}X_{,1}+W^2_{,1})-(V_{,2}X_{,2}+W^2_{,2})]. \quad (3.2.17)$$

用 V 乘(3.2.13)，用 W 乘(3.2.14)，然后相加，得到

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\rho^2_{,1}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\rho^2_{,2}\right)-\frac{1}{\rho}(V_{,l}X_{,l}+W_{,l}W_{,l})+2\rho\nabla^2\mu=0.$$

上式左端前两项显然为零，故有

$$\nabla^2\mu=\frac{1}{2\rho^2}(V_{,l}X_{,l}+W_{,l}W_{,l}). \quad (3.2.18)$$

将上式代入(3.2.12)～(3.2.14)消去 μ，得到

$$V_{,ll}-\rho^{-1}V_{,1}=-\rho^{-2}V(V_{,l}X_{,l}+W_{,l}W_{,l}), \quad (3.2.19)$$

$$X_{,ll}-\rho^{-1}X_{,1}=-\rho^{-2}X(V_{,l}X_{,l}+W_{,l}W_{,l}), \quad (3.2.20)$$

$$W_{,ll}-\rho^{-1}W_{,1}=-\rho^{-2}W(V_{,l}X_{,l}+W_{,l}W_{,l}). \quad (3.2.21)$$

将(3.2.17)代入(3.2.18)，考虑到(3.2.19)～(3.2.21)，得到

$$\mu_{,22}=-\frac{1}{2\rho}(X_{,1}V_{,22}+X_{,12}V_{,2}+X_{,22}V_{,1}+X_{,2}V_{,12}+2W_{,1}W_{,22}+2W_{,12}W_{,2}), \quad (3.2.22)$$

积分得 $$\mu_{,2}=-\frac{1}{\rho}(V_{,1}X_{,2}+V_{,2}X_{,1}+2W_{,1}W_{,2}). \quad (3.2.23)$$

由(3.2.23)和(3.2.17)可确定 μ，积分常数由渐近平直条件确定.

考虑到(3.2.8)，可用两个函数 f 和 ω 代替 V，X 和 W：

$$V=f,$$
$$W=\omega f, \quad (3.2.24)$$
$$X=f^{-1}\rho^2-\omega^2 f.$$

代入(3.2.7)得到线元的表达式

$$ds^2=f(dt-\omega d\varphi)^2-f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2+dz^2)+\rho^2 d\varphi^2], \quad (3.2.25)$$

$$f^{-1}e^{2\gamma}=e^{\mu}. \quad (3.2.26)$$

线元(3.2.25)称为巴巴别特鲁(Papapetrou)度规.

将(3.2.24)代入(3.2.10)～(3.2.14)，得到场方程

$$\gamma_{1}=\frac{1}{4\rho}[f^{-2}\rho^{2}(f_{1}^{2}-f_{2}^{2})-2\omega(\omega_{1}f_{1}-\omega_{2}f_{2})-$$
$$(\omega_{1}f+\omega f_{1})^{2}+(\omega_{2}f+\omega f_{2})^{2}], \tag{3.2.27}$$

$$\gamma_{2}=\frac{1}{2\rho}[\rho^{2}f^{-2}f_{2}f_{1}+\omega(\omega_{2}f_{1}-\omega_{1}f_{2})-$$
$$(\omega_{1}f+\omega f_{1})(\omega_{2}f+\omega f_{2}), \tag{3.2.28}$$

$$f\left(f_{11}+f_{22}+\frac{f_{1}}{\rho}\right)=(f_{1}^{2}+f_{2}^{2})+f^{4}\rho^{-2}(\omega_{1}^{2}+\omega_{2}^{2}), \tag{3.2.29}$$

$$f^{2}\left(\omega_{11}+\omega_{22}-\frac{\omega_{1}}{\rho}\right)+2f(f_{1}\omega_{1}+f_{2}\omega_{2})=0. \tag{3.2.30}$$

由最后两个方程得到启发，我们可以引入和平直空间中算符∇形式相同的算符：

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{\rho}}\frac{\partial}{\partial\rho}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z},$$
$$\nabla^{2}=\frac{\partial^{2}}{\partial\rho^{2}}+\frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho},$$
$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_{\rho})+\frac{\partial A_{z}}{\partial z}.$$

从而将(3.2.29)和(3.2.30)表示为

$$f\nabla^{2}f=\nabla f\cdot\nabla f+\rho^{-2}f^{4}\nabla\omega\cdot\nabla\omega, \tag{3.2.31}$$
$$\nabla\cdot(\rho^{-2}f^{2}\nabla\omega)=0. \tag{3.2.32}$$

解这两个方程，确定函数 f 和 ω，代入前两个方程(3.2.27)和(3.2.28)中的任意一个，便可求出 γ，从而获得场方程的解(3.2.25).

§3.3 Ernst 方程

场方程(3.2.32)表明存在一个矢势 $\boldsymbol{A}$，它满足

$$\rho^{-2}f^{2}\nabla\omega=\nabla\times\boldsymbol{A}. \tag{3.3.1}$$

由于$\nabla\omega$垂直于半径方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$，于是有

$$(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n}=0, \tag{3.3.2}$$

即

$$\frac{\partial A_z}{\partial \rho}=\frac{\partial A_\rho}{\partial z}, \tag{3.3.3}$$

此式表明存在一函数 $F(\rho, z, \varphi)$：

$$A_\rho=\frac{\partial F}{\partial \rho},$$

$$A_z=\frac{\partial F}{\partial z}.$$

令 $\Psi=\frac{\partial F}{\partial \phi}-\rho A_\phi$，我们得到

$$\nabla\times \boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left(\boldsymbol{\rho}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-\hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial \Psi}{\partial \rho}\right). \tag{3.3.4}$$

将上式代入(3.3.1)得

$$\nabla \omega=\rho f^{-2}\boldsymbol{n}\times\nabla\Psi. \tag{3.3.5}$$

Ψ 称为扭(twist)势. 为了得到 Ψ 满足的方程，作矢量积 $\hat{\boldsymbol{n}}\times$(3.3.5)，得到

$$\rho^{-1}f^{-2}\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla\omega=-\nabla\Psi. \tag{3.3.6}$$

注意到 $\nabla\cdot(\rho^{-1}\hat{\boldsymbol{n}}\times\nabla\omega)=0$，可得

$$\nabla\cdot(f^{-2}\nabla\Psi)=0, \tag{3.3.7}$$

此即势 Ψ 满足的方程.

引入复势

$$\mathscr{E}=f+i\Psi. \tag{3.3.8a}$$

可将场方程(3.2.31)和(3.2.32)合写为一个复方程

$$(R_e\mathscr{E})\nabla^2\mathscr{E}=\nabla\mathscr{E}\cdot\nabla\mathscr{E}. \tag{3.3.9}$$

现在我们证明此方程与(3.2.31)～(3.2.32)等价. 将方程(3.3.5)代入(3.2.31)，得到

$$f\nabla^2 f=\nabla f\cdot\nabla f-\nabla\Psi\cdot\nabla\Psi.$$

由 $\mathscr{E}$ 的定义式可知，上式即

$$f\nabla^2 f+2i\nabla\Psi\cdot\nabla f=\nabla\mathscr{E}\cdot\nabla\mathscr{E}.$$

将(3.3.7)展开后代入上式，便得到(3.3.9).

引入新的复势 ζ：

$$\mathscr{E}=\frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \tag{3.3.8b}$$

方程(3.3.9)可改写为ζ的方程：

$$(\zeta\zeta^*-1)\nabla^2\zeta=2\zeta^*\nabla\xi\cdot\nabla\zeta. \tag{3.3.10}$$

式中ζ^*为ζ的复共轭. 此方程称为**恩斯特方程**.

由(3.3.8)、(3.3.6)、(3.2.31)和(3.2.32)，可以确定度规函数f，ω和γ与复势ζ的关系：

$$f=Re\frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \tag{3.3.11}$$

$$\nabla\omega=\frac{2\rho}{(\zeta^*\zeta-1)^2}Im[(\zeta^*-1)^2\hat{n}\times\nabla\zeta], \tag{3.3.12}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\rho}=\frac{\rho}{(\zeta^*\zeta-1)^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{\partial\zeta^*}{\partial\rho}-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\zeta^*}{\partial z}\right), \tag{3.3.13}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial z}=\frac{2\rho}{(\zeta^*\zeta-1)^2}Re\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\frac{\partial\zeta^*}{\partial z}\right). \tag{3.3.14}$$

为了解方程的方便，我们将方程(3.3.11)～(3.3.14)变换到椭球坐标系中. 作变换

$$\rho=k(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2}, \tag{3.3.15}$$

$$z=kxy,$$

或者

$$x=\frac{1}{2k}\{[(z+k)^2+\rho^2]^{1/2}+[(z-k)^2+\rho^2]^{1/2}\},$$

$$y=\frac{1}{2k}\{[(z+k)^2+\rho^2]^{1/2}-[(z-k)^2+\rho^2]^{1/2}\}. \tag{3.3.16}$$

式中k为任意常数. 在椭球坐标系中，算符∇和∇^2表示为

$$\nabla=\frac{k}{(x^2-y^2)^{1/2}}\left[\hat{x}(x^2-1)^{1/2}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}(1-y^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial y}\right], \tag{3.3.17}$$

$$\nabla^2=\frac{k^2}{x^2-y^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2-1)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(1-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\right].$$

方程(3.3.13)和(3.3.14)表示为

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{1-y^2}{(\zeta\zeta^*-1)^2(x^2-y^2)}\left[x(x^2-1)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}-x(1-y^2)\times\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}-y(x^2-1)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}\right)\right],$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{x^2-1}{(\zeta\zeta^*-1)^2(x^2-y^2)}\left[y(x^2-1)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}-y(1-y^2)\times\right.$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}-x(1-y^2)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta^*}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\zeta^*}{\partial x}\right)\Big].$$

(3.3.18)

当$\frac{\partial\zeta}{\partial x}$是纯实数，$\frac{\partial\zeta}{\partial y}$是纯虚数时，令$\zeta=\frac{u+iv}{m+in}$，$A=u^2+v^2-m^2-n^2$，得到

$$\frac{\partial\gamma}{\partial x}=\frac{x(1-y^2)}{A^2(x^2-y^2)}\Big[(x^2-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}m-\frac{\partial v}{\partial x}n-y\frac{\partial m}{\partial x}+v\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2$$
$$-(1-y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}n-\frac{\partial v}{\partial y}m-u\frac{\partial n}{\partial y}-v\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2\Big],\quad(3.3.19)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial y}=\frac{y(x^2-1)}{A^2(x^2-y^2)}\Big[(x^2-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}m-\frac{\partial v}{\partial x}n-u\frac{\partial m}{\partial x}+v\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2$$
$$-(1-y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y}n+\frac{\partial v}{\partial y}m-u\frac{\partial n}{\partial y}-v\frac{\partial m}{\partial y}\right)^2\Big].\quad(3.3.20)$$

上二式直接积分，得到

$$e^{2\gamma}=C\frac{A}{(x^2-y^2)^{\alpha}}.\quad(3.3.21)$$

式中C为积分常数．C和α由边界条件($x\to\infty$时$e^{2\gamma}\to1$)确定．

上面诸方程在以后的讨论中经常要用到．

下面讨论恩斯特方程的常相解．引入代换

$$\zeta=-e^{i\alpha}\coth\psi,\ \psi\in R,\quad(3.3.22)$$

代入恩斯特方程，可以得到

$$\nabla^2\psi=0.\quad(3.3.23)$$

我们设法求得ψ，便得到了势ζ和$\mathscr{E}$，进而得到度规函数f,ω和γ.

取椭球坐标，用分离变量法解(3.3.23)．令$\psi(x,y)=X(x)Y(y)$，方程(3.3.23)分解为两个勒让德(Legendre)方程，一般解表示为

$$\psi=\sum_{l=0}^{\infty}[a_lP_l(x)+b_lQ_l(x)][c_lP_l(y)+d_lQ_l(y)].$$

(3.3.24)

式中　　$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$,

$$Q_l(y)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}y^l}\left[(y^2-1)^l\ln\frac{y+1}{y-1}\right]-\frac{1}{2}P_l(y)\ln\frac{y+1}{y-1};\tag{3.3.25}$$

当 $x\to\infty$ 时有

$$P_l(x)\approx x^l,\qquad Q_l(y)\approx 0.\tag{3.3.26}$$

沿对称轴应有 $\psi(x,+y)=\psi(x,-y)$，所以(3.3.24)中的常数 $d_l=0$. 在无限远处，对于任意的 y，应有 $\zeta|_{x\to\infty}=\infty$，因而 $\psi\to 0$，所以 $a_l=0$. 于是(3.3.24)成为

$$\psi=\sum_{l=1}^{\infty}b_lQ_l(x)P(y).\tag{3.3.27}$$

代入(3.3.22)得到常相解. 现在由渐近平直条件得到 $\alpha=0$，即 ζ 为实数. 设 $\psi=-\coth\psi$，则有 $\zeta=\psi\cos\alpha+i\psi\sin\alpha$. 代入(3.3.11)得

$$f=1-\frac{2(\psi\cos\alpha+1)}{\psi^2+2\psi\cos\alpha+1}.$$

由渐近平直条件和场源质量不为零的要求，线元中项 $f\mathrm{d}t^2$ 应与史瓦希线元中对应项 $\left(1-\frac{2m}{r}\right)$ 有同样渐近行为，所以，当 $x\to\infty$ 时应有 $\Psi\approx r$(此处 r 为球坐标). 又由(3.3.12)得到

$$\nabla\omega=\frac{2r}{(\Psi^2-1)^2}(-\Psi^2+\Psi\cos\alpha+1)\sin\alpha(\hat{n}\times\nabla\Psi).$$

代入 $\Psi\approx r$，得 $\nabla\omega\approx-2r^{-1}\sin\alpha$，从而有 $\omega\approx-2\sin\alpha\ln r$. 由(3.2.25)可知，渐近平直条件要求 $\omega\approx 0$，所以有 $\alpha\approx 0$.

我们讨论一个极简单的解，即(3.3.27)中 $l=0$ 项对应的解：

$$\psi=\frac{1}{2}\delta\ln\frac{x+1}{x-1}.\tag{3.3.28}$$

式中 $\delta\equiv b_0$. 由此得

$$\zeta=\frac{(x+1)^\delta+(x-1)^\delta}{(x+1)^\delta-(x-1)^\delta}.\tag{3.3.29}$$

代回(3.3.11)，得到

$$f=\frac{(x-1)^\delta}{(x+1)^\delta};\tag{3.3.30}$$

由(3.3.18)得

$$e^{2\gamma}=\frac{(x^2-1)^{\delta}}{(x^2-y^2)^{\delta}}.\tag{3.3.31}$$

ξ 为实数，由(3.3.12)知

$$\omega=0.\tag{3.3.32}$$

采用椭球坐标常常是比较方便的. 巴巴别特鲁度规(3.2.25)在椭球坐标中具有形式

$$ds^2=f(dt-\omega d\varphi)^2-k^2f^{-1}\left[e^{2\gamma}(x^2-y^2)\left(\frac{dx^2}{x^2-1}+\frac{dy^2}{1-y^2}\right)+(x^2-1)(1-y^2)d\varphi^2\right].\tag{3.3.33}$$

由于史瓦希度规是辐射对称的，所以必存在$\{f,\omega,\gamma\}$的一组解，使之由(3.3.33)可以变到史瓦希度规

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).\tag{3.3.34}$$

我们来寻找这一变换

$$x=x(r),\qquad y=y(\theta).\tag{3.3.35}$$

由于方位坐标和时间坐标不变，必有 $g'_{00}=g_{00}$，$g'_{33}=g_{33}$，$g'_{03}=g_{03}$，因此

$$f=1-\frac{2m}{r},\tag{3.3.36}$$

$$k^2f^{-1}(x^2-1)(1-y^2)=r^2\sin^2\theta,\tag{3.3.37}$$

$$\omega=0.$$

由此得 $(x^2-1)(1-y^2)=\frac{1}{k^2}\left(1-\frac{2m}{r}\right)r^2\sin^2\theta.$

根据 $x=x(r)$和 $y=y(\theta)$，得到 $y=\cos\theta$. 从而有 $k^2(x^2-1)=r^2-2mr$，故知 $x=\frac{r}{m}-1$，$(k=m)$. 变换的具体形式是

$$x=\frac{r}{m}-1,$$

$$y=\cos\theta.\tag{3.3.38}$$

由(3.3.36)和(3.3.38)知

$$f=\frac{x-1}{x+1}. \tag{3.3.39}$$

(3.3.38)就是由椭球坐标到球坐标的变换.

§3.4 Curzon 解

在柱坐标系中解方程(3.3.23)，可得到一个特别简单的解：

$$\psi=m(\rho^2+z^2)^{-1/2}. \tag{3.4.1}$$

式中 m 为一常数. 可以证明，这个解可以写成(3.3.24)的形式. 将上式代入(3.3.22)和(3.3.11)可求得

$$f=\exp[-2m(\rho^2+z^2)^{-1/2}]. \tag{3.4.2}$$

代入(3.2.27)和(3.2.28)，积分得

$$\gamma=-\frac{m^2}{2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^2}. \tag{3.4.3}$$

由于$(\rho^2+z^2)^{1/2}=r$，我们可以由 $r\to\infty$时 f 的渐近形式与史瓦希解比较确定常数 m 的意义. 当 $r\to\infty$时将这里 f 的表达式展开并与史瓦希度规中的 $g_{00}=1-\dfrac{2m}{r}$比较，可知 m 即为源质量. 于是得到一度规

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\exp\left[-\frac{2m}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right]\mathrm{d}t^2-\exp\left[\frac{2m}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}\right]\times\\&\left\{\exp\left[-\frac{m^2\rho^2}{(\rho^2+z^2)^2}\right](\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2\right\}.\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

这一度规称为 Curzon 度规.

变换到球坐标系，由(3.3.39)有

$$\begin{aligned}&\rho=(r^2-2mr)^{1/2}\sin\theta,\\&z=(r-m)\cos\theta.\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

于是得到球坐标系中的 Curzon 度规：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\exp\left[-\frac{2m}{(r^2-2mr+m^2\cos^2\theta)^{1/2}}\right]\mathrm{d}t^2-\\&\exp\left[\frac{2m}{(r^2-2mr+m^2\cos^2\theta)^{1/2}}\right]\Big\{\exp\times\end{aligned}$$

$$\left[-\frac{m^2(r^2-2mr)\sin^2\theta}{2(r^2-2mr+m^2\cos^2\theta)^2}\right]\times(r^2-2mr+$$

$$m^2\sin^2\theta)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2-2mr}+\mathrm{d}\theta^2\right)+(r^2-2mr)\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\Big\}.$$

(3.4.6)

§3.5 由 Ernst 方程直接得到的几个解

恩斯特方程的一个重要优点是用标准解析方法导出 Kerr 度规. 恩斯特发现，线性组合

$$\zeta=px-\mathrm{i}qy, \tag{3.5.1}$$

$$p^2+q^2=1 \tag{3.5.2}$$

是恩斯特方程(3.3.10)的一个严格解，变到 Bayer-Lindquist 坐标后恰是通常的 Kerr 度规.

由方程(3.3.11)、(3.3.12)、(3.3.21)和(3.5.1)得到

$$f=\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}, \tag{3.5.3}$$

$$\omega=\frac{2q(1-y^2)(px+1)}{p^2x^2+q^2y^2-1}. \tag{3.5.4}$$

$$e^{2\gamma}=\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}. \tag{3.5.5}$$

从而得到度规

$$\mathrm{d}s^2=k^2\left\{\frac{p^2x^2+q^2y^2-1}{(px+1)^2+q^2y^2}\left[\mathrm{d}t-\frac{2q(1-y^2)(px+1)}{p^2x^2+q^2y^2-1}\mathrm{d}\varphi\right]^2-\right.$$

$$\frac{(px+1)^2+q^2y^2}{p^2}\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{x^2-1}+\frac{\mathrm{d}y^2}{1-y^2}\right)-$$

$$\left.\frac{(px+1)^2+q^2y^2}{p^2x^2+q^2y^2-1}(x^2-1)(1-y^2)\mathrm{d}\varphi^2\right\}. \tag{3.5.6}$$

由椭球坐标向 Boyer-Lindquist 坐标的变换表示为

$$px+1=\frac{r}{m},\ qy=\frac{a}{m}\cos\theta,\ \varphi'=\varphi,\ t'=t. \tag{3.5.7}$$

式中 $p=\dfrac{k}{m}$, $q=\dfrac{a}{m}$, $k=(m^2-a^2)^{1/2}$.

(3.5.7)将线元(3.5.6)变为

$$ds^2=dt^2-(r^2+\alpha^2\cos^2\theta)\left(d\theta^2+\frac{dr^2}{r^2+\alpha^2-2mr}\right)-$$

$$(r^2+\alpha^2)\sin^2\theta d\varphi^2-\frac{2mr}{r^2+\alpha^2\cos^2\theta}(dt-\alpha\sin^2\theta d\varphi)^2.$$

(3.5.8)

这正是通常形式下的 Kerr 度规(1.14.12).

Tomimatsu 和 Sato 寻找恩斯特方程的形如

$$\zeta=\frac{\alpha(x,y;p,q,\delta)}{\beta(x,y;p,q,\delta)} \qquad (3.5.9)$$

的解，其中 δ 是整数，α 和 β 分别是关于 x 和 y 的 δ^2 次和(δ^2-1)次复多项式，p 和 q 是两个实参量且满足 $p^2+q^2=1$.

对应于 $\delta=1,2,3,4$ 的显式解都已找到. $\delta=1$ 时 $\zeta=px+iqy$，前面已指出它导致 Kerr 度规. $\delta=2$ 时，有

$$\zeta=\frac{p^2x^4+q^2y^4-1-2ipqxy(x^2-y^2)}{2px(x^2-1)+2iqy(1-y^2)}. \qquad (3.5.10)$$

代入方程(3.3.11)、(3.3.12)、(3.3.19)和(3.3.20)，得到

$$f=\frac{A}{B}, \qquad (3.5.11)$$

$$\omega=\frac{2mq}{A}(1-y^2)C, \qquad (3.5.12)$$

$$e^{2\gamma}=\frac{A}{p^{2\delta}(x^2-y^2)^{\delta^2}}. \qquad (3.5.13)$$

式中 $$A\equiv p^4(x^2-1)^4+q^4(1-y^2)^4-2p^2q^2(x^2-1)(1-y^2)\times$$
$$[2(x^2-1)^2+2(1-y^2)^2+3(x^2-1)(1-y^2)],$$

(3.5.14)

$$B\equiv[p^2(x^4-1)-q^2(1-y^4)+2px(x^2-1)]^2+$$
$$4q^2y^2[px(x^2-1)+(px+1)(1-y^2)]^2,$$

(3.5.15)

$$C\equiv-p^3x(x^2-1)[2(x^4-1)+(x^2+3)(1-y^2)]-$$
$$p^2(x^2-1)[4x^2(x^2-1)+3(x^2+1)(1-y^2)]+$$
$$q^2(px+1)(1-y^2)^3. \qquad (3.5.16)$$

由(3.5.11)～(3.5.13)构成的解称为 Tomimatsu-Sato 度规. $\delta=3$, 4 的解已由 Kinnersley 和 Chitre 等(1978)获得.

§3.6 Ernst 生成解定理和几个生成解

恩斯特建立了一种由已知解生成新解的方法. 恩斯特方程的每一个解 ζ_0 乘以一个相因子 $e^{i\alpha}$将构成一个新解:

$$\zeta=e^{i\alpha}\zeta_0. \tag{3.6.1}$$

现在考虑由史瓦希解生成的解. 由(3.3.40)、(3.3.30)和(3.3.29)可知, 史瓦希解对应于 $\zeta_0=x$. 代入(3.6.1),

$$\zeta=e^{i\alpha}x. \tag{3.6.2}$$

令 $\zeta=\cos\alpha$, $\lambda=\sin\alpha$, 连同上式代入(3.3.8a)和(3.3.8), 得到

$$f=1-\frac{2(\zeta x+1)}{x^2+2\zeta x+1}, \tag{3.6.3}$$

$$\Psi=\frac{2\lambda x}{x^2+2\zeta x+1}. \tag{3.6.4}$$

将上二式代入(3.3.5), 得到

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}=-2k\lambda. \tag{3.6.5}$$

积分此式, 得到

$$\omega=-2k\lambda y. \tag{3.6.6}$$

式中 k 为场方程中出现的任意常数. 将(3.6.3)和(3.6.4)代入(3.3.19)和(3.3.20), 积分得到

$$e^{2\gamma}=\frac{x^2-1}{x^2-y^2}. \tag{3.6.7}$$

变换到 Boyer-Lindquist 坐标, 令

$$x=\frac{r-m}{k}, \qquad y=\cos\theta, \tag{3.6.8}$$

取 $\qquad k^2=m^2+l^2$,

得到度规

$$ds^2=\left[1-\frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}\right](dt-2l\cos\theta d\varphi)^2-$$
$$\left[1-\frac{2(mr+l^2)}{r^2+l^2}\right]^{-1}dr^{-2}-(r^2+l^2)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{3.6.9}$$

此解即 NUT-Taub(Newman-Unti-Tamburina 和 Taub)度规. 当 $l=0$ 时, 此解退化为史瓦希度规. 由于 $r\to\infty$ 时 $g_{t\varphi}$ 不等于零, 故 $l\neq 0$ 的解不是渐近平直的.

Demianski 和 Newman 用 Kerr 解生成了一个新解. 对应的相变换为

$$\zeta=e^{i\alpha}(px-qy), \tag{3.6.10}$$

令 $\zeta=\cos\alpha$, $\lambda=\sin\alpha$, 得到

$$f=1-2\frac{p\zeta x-q\lambda y+1}{p^2x^2+2p\zeta x+q^2y^2-2q\lambda y}, \tag{3.6.11}$$

$$\Psi=2\frac{q\zeta y+p\lambda x}{p^2x^2+2p\zeta x+q^2y^2-2q\lambda y}. \tag{3.6.12}$$

代入(3.3.5), 得到关于 ω 的方程:

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{2kq}{p}\frac{1-y^2}{A}\{\zeta p[(px+1)^2-q^2y^2]+$$
$$2p^2x(1-\zeta-q\lambda y)\}, \tag{3.6.13}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=-\frac{2kq}{p}\frac{x^2-1}{A}\left[2p^2y(\zeta px-q\lambda y+1)+\frac{p^2}{q}\lambda A\right], \tag{3.6.14}$$

$$A\equiv p^2x^2+q^2y^2-1. \tag{3.6.15}$$

积分, 得到 ω 的表达式:

$$\omega=-2\frac{kq}{p}\frac{1-y^2}{A}(q\lambda y-p\zeta x-1)-2\frac{k}{p}\lambda y. \tag{3.6.16}$$

从而得到 $e^{2\gamma}=\dfrac{p^2x^2+q^2y^2-1}{p^2(x^2-y^2)}$. (3.6.17)

下面变换到 Boyer-Lindquist 坐标. 作变换(3.6.8), 并取

$$p=\frac{k}{(m^2+l^2)^{1/2}},\qquad q=\frac{a}{(m^2+l^2)^{1/2}},$$
$$\zeta=\frac{m}{(m^2+l^2)^{1/2}},\qquad \lambda=\frac{l}{(m^2+l^2)^{1/2}}, \tag{3.6.18}$$

$$k = m^2 + l^2 - \alpha^2,$$

得到度规

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - 2\frac{mr + l^2 - \alpha l\cos\theta}{r^2 + \alpha^2\cos^2\theta + l^2 - 2\alpha l\cos\theta}\right) \times$$

$$\left[\mathrm{d}t - \left(2\alpha\sin\theta\frac{mr + l^2 - \alpha l\cos\theta}{r^2 - 2mr + \alpha^2 - l^2} - 2l\cos\theta\right)\mathrm{d}\varphi\right]^2 -$$

$$(r^2 + \alpha^2\cos^2\theta + l^2 - 2\alpha l\cos\theta)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{r^2 - 2mr + \alpha^2 + l^2} + \mathrm{d}\theta^2\right) -$$

$$\frac{(r^2 + \alpha^2\cos^2\theta + l^2 - 2\alpha l\cos\theta)(r^2 - 2mr + \alpha^2 - l^2)}{r^2 - 2mr + \alpha^2 - l^2} \times$$

$$\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2. \tag{3.6.19}$$

这一度规称为 Demianski-Newman 度规. 当其中参量 $l=0$ 时，此度规退化为 Kerr 度规(3.5.8)；$\alpha=0$ 时退化为 NUT-Taub 度规(3.6.9).

§3.7 Geroch-Kinnersley 生成解定理

前节中讨论的相变换可由一个已知解产生一个新解. 对应的引力场方程的两个解同属于辐射对称解. 这表明引力场存在一种内部对称性. Geroch(1971)发现，相变换是场方程更大的协变群的一个特例. Kinnersley(1973)将 Geroch 的工作推广到含电磁场的情况. 他研究了存在一个类时 Killing 矢量时爱因斯坦-麦克斯威场方程的对称性，证明了这些方程具有一个和 SU(2,1)同构的对称群，其中某些变换只引起规范变换，其余的变换则可用来产生场方程的新的解族；从而提出了一种新的生成技术(G-K 生成技术).

引入复麦克斯威张量

$$\overline{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu} + i\,\tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{3.7.1}$$

式中 $F_{\mu\nu}$是麦克斯威张量. 在无源区域，麦克斯威方程为

$$\overline{F}_{[\mu\nu;\sigma]} = 0. \tag{3.7.2}$$

引入复矢势$\overline{A}$，定义为

$$\overline{F}_{\mu\nu}=\overline{A}_{\nu,\mu}-\overline{A}_{\mu,\nu}. \tag{3.7.3}$$

式(3.7.2)即为$\overline{A}_\mu$存在的可积性条件.

如果$\overline{F}_{\mu\nu}$所在的空-时是稳定的，即存在一类时 Killing 矢量，则必存在一个坐标系，使所有可观测的物理量均不依赖于时间坐标. 这时辐射对称线元可表示为

$$ds^2=f(dt+w_i dx^i)^2-f^{-1}h_{ik}dx^i dx^k. \tag{3.7.4}$$

式中 f，w_i，h_{ik}均不含 t；通过适当的规范变换，也可使$\overline{A}_\mu$不含时间. 线元(3.7.4)与巴巴别特鲁度规(3.2.25)是一致的.

所有场方程均可写成度规张量为 h_{ik}的三维空间 H 中的方程. 令∇表示三维空间 H 中的协变导数算符，我们定义一个扭矢量

$$\tau=f^2\nabla\times\boldsymbol{w}+i(\Phi^*\nabla\Phi-\Phi\nabla\Phi^*). \tag{3.7.5}$$

式中 Φ 为复电磁势. 可以证明，只要知道$\overline{A}_\mu$的第零分量$\overline{A}_0$就足够了，故可令

$$\Phi=\overline{A}_0. \tag{3.7.6}$$

利用爱因斯坦方程的第(0 i)分量

$$G_{0i}=8\pi T_{0i}, \tag{3.7.7}$$

可以证明

$$\nabla\times\tau=0 \tag{3.7.8}$$

和电动力学中的情况类似，此式表明存在一个标量“扭势”Ψ，它由下式定义：

$$\tau=\nabla\Psi. \tag{3.7.9}$$

定义一个复引力标势——称为恩斯特势：

$$\mathscr{E}=f-\Phi\Phi^*+i\Psi, \tag{3.7.10}$$

其中右端第一项属于引力场，第二项属于电磁场，第三项是“扭势”.

一旦给定了 h_{ik}，则恩斯特势 $\mathscr{E}$ 便可完全确定度规张量，即确定引力场. 麦克斯威方程和其余的爱因斯坦方程均可用 $\mathscr{E}$ 和 Φ 的方程代替. 这些方程是

$$f\nabla^2\mathscr{E}=(\nabla\mathscr{E}+2\Phi^*\nabla\Phi)\cdot\nabla\mathscr{E},\tag{3.7.11}$$

$$f\nabla^2\Phi=(\nabla\mathscr{E}+2\Phi^*\nabla\Phi)\cdot\nabla\Phi.\tag{3.7.12}$$

还可以确定三维空间 H 的曲率张量：

$$f^2R^{(3)}_{ik}=\frac{1}{2}\mathscr{E}_{,(i}\mathscr{E}^*_{,k)}+\Phi\mathscr{E}_{,(i}\Phi^*_{,k)}+\Phi^*\mathscr{E}^*_{,(i}\Phi_{,k)}-(\mathscr{E}+\mathscr{E}^*)\Phi_{,(i}\Phi^*_{,k)}.\tag{3.7.13}$$

三维度规 h_{ik}具有很大的任意性，只要能保证上式是曲率张量即可.

为了显示出场方程(3.7.11)～(3.7.13)的对称性，可用三个复标量场 u,v 和 w 代替 $\mathscr{E}$ 和 Φ：

$$\mathscr{E}=\frac{u-w}{u+w},\qquad \Phi=\frac{v}{w+u}.\tag{3.7.14}$$

由于三个函数(u,v,w)描述两个量($\mathscr{E}$, Φ)，我们选取 w 满足任意条件，使 u 和 v 的方程尽量简单些. 为此，将(3.7.14)代入(3.7.11)和(3.7.12)，得到

$$\begin{aligned}(uu^*+vv^*-ww^*)\nabla^2u&=2(u^*\nabla u+v^*\nabla v-w^*\nabla w)\cdot\nabla u,\\(uu^*+vv^*-ww^*)\nabla^2v&=2(u^*\nabla u+v^*\nabla v-w^*\nabla w)\cdot\nabla v,\\(uu^*+vv^*-ww^*)\nabla^2w&=2(u^*\nabla u+v^*\nabla v-w^*\nabla w)\cdot\nabla w.\end{aligned}\tag{3.7.15}$$

我们引入一抽象的复三维空间 M，具有不定度规

$$\eta_{pq}=\mathrm{diag}(1,\ 1,\ -1);\tag{3.7.16}$$

将场 u, v, w 视为此空间中一矢量的分量：

$$Y^p=(u,\ v,\ w).\tag{3.7.17}$$

这就是说，空间 M 中的每一点(电磁场和引力场)决定空间 M 中的一个矢量，式(3.7.14)中只含有 u, v 和 w 的比值，因此它们的归一化并无意义，实际上只要关心空间 M 中的射线而不是矢量. 用(3.7.17)可将(3.7.15)写成矢量形式：

$$Y_pY^p\nabla^2Y^q=2Y^*_p\nabla Y^p\cdot\nabla Y^q.\tag{3.7.18}$$

空间 H 的曲率张量(3.7.13)表示为

$$R_{ik}=(Y_p^*Y^p)^{-2}V_{q(i}V_{k)}^{q*}, \tag{3.7.19}$$

式中 $$V_i^p\equiv Y_q^*Y_s\,\varepsilon^{pqs}. \tag{3.7.20}$$

考虑在空间 M 内作一常数幺正变换，即线性变换

$$Y'^p=A_q^pY^q, \tag{3.7.21}$$

$$Y'^*_pY'^p=Y_p^*Y^p, \tag{3.7.22}$$

且 A_q^p 不是空间 H 中位置的函数. 由(3.7.19)和(3.7.20)可知，R_{ij}在空间 M 中是一标量，因而具有确定值. 我们也可以假定 h_{ik} 的值确定. 在这样的情况下，方程(3.7.18)中的算符∇是作为空间 M 中的矢量变换的；若 Y^p 满足此方程，则 Y'^p 也是作为矢量变换的. 这样，如果(Y^p, h_{ik})确定一个稳态 Einstein-Maxwell 场方程的解，则(Y'^p, h_{ik})也是一个稳态解.

空间 M 中全部幺正变换 A_q^p 组成的变换群记为 $U(2, 1)$. 由于我们感兴趣的是空间 M 中的射线而不是矢量，所以给 Y^p 的分量加上一个普通的相因子是无关紧要的. 因此，我们可以只考虑 SU(2, 1)子群. 为了分析的方便，我们用 8 个实参量(如“欧勒角”)来细致地表示出最普遍的 SU(2, 1)矩阵. 这在 SU(2)甚至在 SU(3)中都是相当明显的，因为根据欧勒定理，任何有限转动均为绕某一固定轴的转动. 但是不定度规的出现要求我们考虑一些不同情况. 如在 Minkowski 空间就有一些例外的“零转动”，必须对它们单独处理. 最简单的办法是考查变换矩阵(A_q^p)的本征值问题. 对于幺正矩阵，通常的结果是，本征矢构成完备正交系，且所有本征值都是幺模的. 但是当出现零本征矢的时候，这条规则就有例外了. 对应于零本征矢的本征值是没有任何限制的，而且两个零本征矢不必正交. 对于 SU(2, 1)矩阵，只能有下列可能性：

1. 两个类空本征矢，一个类时本征矢；

2. 一个类空本征矢，两个不同的零本征矢；

3. 一个类空本征矢，一个(二重)零本征矢；

4. 一个(三重)零本征矢.

考虑以下 5 类简单的 SU(2, 1)变换：

(Ⅰ) $(u+w)\to(u+w)$,

$$v\to v+a(u+w), \tag{3.7.23}$$

$(u-w)\to(u-w)-2a^*v-aa^*(u+w)$;

(Ⅱ) $(u+w)\to(u+w)$,

$$v\to v, \tag{3.7.24}$$

$(u-w)\to(u-w)+i\alpha(u+w)$;

(Ⅲ) $(u+w)\to b(u+w)$,

$$v\to(b^*/b)v, \tag{3.7.25}$$

$(u-v)\to(1/b^*)(u-w)$;

(Ⅳ) $(u+w)\to(u+w)+i\beta(u-w)$,

$$v\to v, \tag{3.7.26}$$

$(u-w)\to(u-w)$;

(Ⅴ) $(u+w)\to(u+w)-2c^*v-cc^*(u-w)$,

$$v\to v+c(u-w), \tag{3.7.27}$$

$(u-w)\to(u-w)$.

式中 a, b 和 c 是任意复参量，α 和 β 是任意的实参量. (3.7.23)～(3.7.27) 表示相应类型的任意 SU(2, 1)矩阵. 为了表示矩阵(A)，我们首先将它的某一本征矢转到一标准位置，作进一步转动时这一本征矢固定不动. 然后将它转回初始位置.

对于情况(1)，使矩阵(A)的某一类空本征矢与 v 重合，写作

$$A=(\mathrm{I}\cdot\mathrm{V})\cdot(\mathrm{III}\cdot\mathrm{II}\cdot\mathrm{IV})\cdot(\mathrm{I}\cdot\mathrm{V})^{-1}. \tag{3.7.28}$$

对于情况(2)、(3)、(4)，至少有一个零本征矢，使之与($u-w$)重合. 矩阵(A)的形式为

$$A=(\mathrm{I}\cdot\mathrm{II})\cdot(\mathrm{III}\cdot\mathrm{IV}\cdot\mathrm{V})\cdot(\mathrm{I}\cdot\mathrm{II})^{-1}. \tag{3.7.29}$$

只要由一个解出发，其对称类的所有解均可由(3.7.28)或(3.7.29)得到.

现在讨论这些 SU(2, 1)变换对物理过程的影响. 由(3.7.10)和(3.7.14)可得

$$f=\frac{uu^*+vv^*-ww^*}{(u+w)(u^*+w^*)}. \tag{3.7.30}$$

属于(Ⅰ)，(Ⅱ)类的SU(2，1)矩阵具有特别简单的效应，因为它们保持$(u+w)$不变，因而也保持f不变．对于情况(Ⅰ)有

$$\Phi \to \Phi + a, \quad \mathscr{E} \to \mathscr{E} - 2a^* \Phi - a^* a, \qquad (3.7.31)$$
$$f \to f, \quad \tau \to \tau;$$

对于情况(Ⅱ)有

$$\Phi \to \Phi, \quad \mathscr{E} \to \mathscr{E} + \imath\alpha, \qquad (3.7.32)$$
$$f \to f, \quad \tau \to \tau;$$

这两类变换既不改变电磁场，也不改变空间几何性质．它们分别对应于电磁规范变换和引力规范变换．

在(Ⅲ)类变换下有

$$\mathscr{E} \to (bb^*)^{-1}\mathscr{E}, \quad \Phi \to (b^* b^{-2})\Phi. \qquad (3.7.33)$$

当$bb^*=1$时，变换为一个"二重旋转"，它将电场变换为磁场，将磁场变换为电场，但不影响空间几何性质．如果选取$bb^* \neq 1$，则由(3.7.33)可得

$$ds^2 \to (bb^*)^{-1} ds^2. \qquad (3.7.34)$$

这显然是一个均匀共形变换．对于真空或只存在零质量场的情况，这种变换往往导致场方程的新解．

(Ⅳ)类变换将静态真空场变换为稳态场．这类变换是Ehlers(1959)发现的．

(Ⅴ)类变换不属于真空的情况，对应于Harri-son(1968)发现的变换．

上述G-K生成技术的步骤可总结如下：给定一个稳态爱因斯坦-麦克斯威场方程的解之后，由度规确定f，w，h_{ik}．然后由已知的电磁场确定Φ，再代入(3.7.5)、(3.7.9)和(3.7.10)确定Ψ和$\mathscr{E}$．生成的5参量解族可由(3.7.28)和(3.7.29)直接得出〔或相继应用(3.7.23)～(3.7.27)〕．本节所述的变换(3.7.23)～(3.7.29)也可用$\mathscr{E}$和Φ的变换式重新表示出来．

Ernst，Geroch和Kinnersley的工作使严格解的研究大大向前迈进了一步．

作为G-K生成解定理的应用，我们给出一类辐射对称稳态真

空场的新解.

按照巴巴别特鲁度规(3.2.25)和场方程(3.2.27)～(3.2.32)，作代换

$$\varepsilon_1=\rho f^{-1}+\omega,\quad \varepsilon_2=\rho f^{-1}-\omega, \tag{3.7.35}$$

可将场方程(3.2.31)和(3.2.32)改写为

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\nabla^2\varepsilon_1=2(\nabla\varepsilon_1)^2, \tag{3.7.36}$$

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\nabla^2\varepsilon_2=2(\nabla\varepsilon_2)^2. \tag{3.7.37}$$

直接代入可以证明,式

$$\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=(\nabla\varepsilon_1)^2, \tag{3.7.38}$$

$$\nabla^2\left(\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\rho}\right)=0 \tag{3.7.39}$$

满足场方程(3.7.36)～(3.7.37).

设$(\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0)$是方程(3.7.36)～(3.7.37)的一组解,根据 G-K 定理,

$$\varepsilon_1=\frac{-a+b\varepsilon_1^0}{b-a\varepsilon_1^0},\qquad \varepsilon_2=\frac{a+b\varepsilon_2^0}{b+a\varepsilon_2^0} \tag{3.7.40}$$

也是场方程(3.7.36)～(3.7.37)的一组解. 这样,我们可以由下列各式获得一类新解:

$$f=2A\rho\left(\frac{-B+C\varepsilon_1^0}{C-B\varepsilon_1^0}+\frac{B+C\varepsilon_2^0}{C+B\varepsilon_2^0}\right)^{-1}, \tag{3.7.41}$$

$$2\omega=A\left(\frac{-B+C\varepsilon_1^0}{C-B\varepsilon_1^0}-\frac{B+C\varepsilon_2^0}{C+B\varepsilon_2^0}\right), \tag{3.7.42}$$

$$\nabla^2\left(\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1^0}{\partial\rho}\right)=0, \tag{3.7.43}$$

$$\varepsilon_2^0=(\nabla\varepsilon_1^0)^2\left(\rho^{-1}\frac{\partial\varepsilon_1^0}{\partial\rho}\right)^{-1}-\varepsilon_1^0. \tag{3.7.44}$$

式中 A, B, C 为任意常数; 度规系数 γ 可由 f 和 ω 求得〔见(3.2.27～28)〕. 选择(3.7.43)的解, 使生成解满足 $\rho\to\infty$, $z\to\infty$时的渐近条件. 所获得的这一类解是与各种已知解不同的一类新解. 应用§3.10 中的技术, 还可以由这类解生成 Einstein-Maxwell 场方程的一类新解.

§ 3.8 强磁场中的旋转双荷黑洞解

本节由 Kerr-Newman-Kasuya 度规(1.14.11)生成爱因斯坦-麦克斯威场方程的新解. 在新解中含有描述任意强度的外磁场参量 B_0.

在 Boyer-Lindquist 坐标中，Kerr-Newman-Kasuya 度规可表示为

$$\mathrm{d}s^2=\left\{1-\frac{2Mr-(e^2+q^2)}{\Sigma}\right\}\mathrm{d}t^2-\frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2-\Sigma\mathrm{d}\theta^2-\left\{\frac{[2mr-(e^2+q^2)]a^2\sin^2\theta}{\Sigma}+(r^2+a^2)\right\}\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+\frac{2a\sin^2\theta}{\Sigma}\{2mr-(e^2+q^2)\}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}t. \quad (3.8.1)$$

式中 $\Sigma=r^2+a^2\mathrm{con}^2\theta,\quad \Delta=r^2+a^2+e^2+q^2-2mr,$

$$a=\frac{J}{m},$$

m，e 和 q 分别表示源的质量，电荷和磁荷.

巴巴别特鲁度规(3.2.25)可写为

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2-\frac{1}{f}(2P^{-2}\mathrm{d}\zeta d\zeta^*+\rho^2\mathrm{d}t^2). \qquad (3.8.2)$$

式中 ζ 是子空间中的复坐标，P，ρ 和 ω 是实函数. 考虑到(3.7.4)和(3.8.2)、由(3.7.5)和(3.7.9)得到

$$i\nabla\Psi=\Phi\nabla\Phi^*-\Phi^*\nabla\Phi-\frac{f^2}{\rho}\nabla\omega. \qquad (3.8.3)$$

式中 Ψ 为扭势，∇ 为三维空间的协变导数算符

$$\nabla\equiv\Delta^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad (3.8.4)$$

由(3.7.10)可将爱因斯坦-麦克斯威方程(3.7.11)和(3.7.12)改写为

$$(Re\mathscr{E}+|\Phi|^2)\nabla^2\mathscr{E}=(\nabla\mathscr{E}+2\Phi^*\nabla\Phi)\nabla\mathscr{E}, \qquad (3.8.5)$$

$$(Re\mathscr{E}+|\Phi|^2)\nabla^2\Phi=(\nabla\mathscr{E}+2\Phi^*\nabla\Phi)\nabla\Phi. \qquad (3.8.6)$$

由已知的电磁场和已知的度规(3.8.1)可以得到复电磁势 Φ 和复引力势(恩斯特势)ξ 的表达式：

$$\Phi=\left(\frac{ae\sin^2\theta}{r+ia\cos\theta}-q\cos\theta\right)-i\left(\frac{aq\sin^2\theta}{r+ia\cos\theta}+e\cos\theta\right),\tag{3.8.7}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}=&-(r^2+a^2)\sin^2\theta-(e^2+q^2)\cos^2\theta+\\&2mai\cos\theta(3-\cos^2\theta)-\\&\frac{2a}{r+ia\cos\theta}\sin^2\theta[ma\sin^2\theta+i(e^2+q^2)\cos\theta].\end{aligned}\tag{3.8.8}$$

对 $\mathscr{E}$ 和 Φ 作变换

$$\mathscr{E}'=\Lambda^{-1}\mathscr{E},\quad \Phi'=\Lambda^{-1}\left(\Phi-\frac{1}{2}B_0\mathscr{E}\right).\tag{3.8.9}$$

式中 $B_0=\mathrm{const}$，Λ 的表达式取为

$$\begin{aligned}\Lambda=&1+B_0\Phi-\frac{1}{4}B_0^2\mathscr{E}=\\&1+\frac{B_0ea\sin^2\theta}{r+ia\cos\theta}-B_0q\cos\theta+\frac{B_0^2}{4}\Big[(r^2+a^2)\sin^2\theta+\\&(e^2+q^2)\cos^2\theta+\frac{2a^2m\sin^4\theta}{r+ia\cos\theta}\Big]-\\&\frac{iB_0}{4}\Big[2am\cos\theta(3-\cos^2\theta)-\frac{2a(e^2+q^2)\cos\theta\sin^2\theta}{r+ia\cos\theta}\Big]-\\&iB_0\left(\frac{aq\sin^2\theta}{r+ia\cos\theta}+e\cos\theta\right).\end{aligned}\tag{3.8.10}$$

类似地，将(3.8.10)、(3.8.7)和(3.8.8)代入(3.8.9)，得到 $\mathscr{E}'$ 和 Φ' 的表达式. 在变换(3.8.9)下，$P'=P$，$\rho'=\rho$. 由(3.7.10)和(3.8.3)可知 f 和 ω 的变换为

$$f'=Re\mathscr{E}'+\Phi'\Phi'^*=\Lambda\Lambda^*f,\tag{3.8.11}$$

$$\nabla\omega'=\Lambda\Lambda^*\nabla\omega+\frac{\rho}{f}(\Lambda^*\Delta\Lambda-\Lambda\Delta\Lambda^*).\tag{3.8.12}$$

显然，f' 的表达式可由前面诸式求出. 我们的任务是解方程(3.8.12)，求出 ω'，这样便求出了新解. 在求 ω' 之前，先求出电磁场的表达式.

在局部洛伦兹系中，电磁场表示为

$$H'_r + \imath E'_r = \frac{\Phi_{,\theta}}{C^{1/2}\sin\theta}, \quad H'_\theta + \imath E'_\theta = -\frac{\Delta_{1/2}\Phi_{,r}}{C^{1/2}\sin\theta}, \quad (3.8.13)$$

式中　$A \equiv (r^2+a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2\theta$.

由(3.8.9)和(3.8.10)有

$$\Phi_{,r} = \frac{1}{\Lambda^2}\left\{\left(1+\frac{1}{4}B_0^2\mathscr{E}\right)\Phi_{,r} - \frac{1}{2}B_0\left(1+\frac{1}{2}B_0\Phi\right)\mathscr{E}_{,r}\right\},$$

$$\Phi_{,\theta} = \frac{1}{\Lambda^2}\left\{\left(1+\frac{1}{4}B_0^2\mathscr{E}\right)\Phi_{,\theta} - \frac{1}{2}B_0\left(1+\frac{1}{2}B_0\Phi\right)\mathscr{E}_{,\theta}\right\}.$$

(3.8.14)

将(3.8.8)、(3.8.9)和(3.8.10)代入(3.8.13)和(3.8.14)，得到

$$H'_r + \imath E'_r = \frac{1}{\Lambda 2 C^{1/2}}\Big\{\Big[q + \frac{2ae\cos\theta}{r+\imath a\cos\theta} + \imath e - \frac{2\imath aq\cos\theta}{r+\imath a\cos\theta} +$$
$$\frac{(q+\imath e)a^2\sin^2\theta}{(r+\imath a\cos\theta)^2}\Big]\Big[1 - \frac{B_0^2}{4}\Big((r^2+a^2)\sin^2\theta +$$
$$(e^2+q^2)\cos^2\theta - 2ma\imath\cos\theta(3-\cos^2\theta) +$$
$$\frac{2ma^2\sin^4\theta + 2ia(e^2+q^2)\sin^2\theta\cos\theta}{r+\imath a\cos\theta}\Big)\Big] +$$
$$B_0\Big[1 - \Big(\frac{B_0}{2}q + \frac{\imath}{2}B_0 e\Big)\cos\theta + \frac{(e-\imath q)B_0 a\sin^2\theta}{2(r+\imath a\cos\theta)}\Big] \times$$
$$\big[(r^2+a^2-e^2-q^2)\cos\theta + 3ma\imath\sin^2\theta +$$
$$\frac{a}{r+\imath a\cos\theta}\Big(2\cos\theta + \frac{\imath a\sin^2\theta}{r+\imath a\cos\theta}\Big)(ma\sin^2\theta + \imath(e^2+q^2)$$
$$\cdot\cos\theta) + \frac{a\sin\theta}{r+ia\cos\theta}(ma\sin^2\theta - \imath(e^2+q^2)\sin\theta)\Big]\Big\},$$

(3.8.15)

$$H'_\theta + \imath E'_\theta = \frac{\Delta^{1/2}}{\Lambda^2 C^{1/2}}\Big\{\frac{(e-\imath q)a\sin\theta}{(r+\imath a\cos\theta)^2}$$
$$\Big[1 - \frac{B_0^2}{4}\Big((r^2+a^2)\sin^2\theta + (e^2+q^2)\cos^2\theta -$$
$$2ma\imath\cos\theta(3-\cos^2\theta) + \frac{2a\sin^2\theta}{r+\imath a\cos\theta}(ma\sin^2\theta +$$
$$\imath(e^2+q^2)\cos\theta\Big)\Big] - B_0\Big[1 - \frac{B_0}{2}(q+\imath e)\cos\theta +$$
$$\frac{B_0 a(e-\imath q)\sin^2\theta}{2(r+\imath a\cos\theta)}\Big]\Big[r\sin\theta -$$

$$\left.\left.\frac{a\sin\theta}{(r+ia\cos\theta)^2}(ma\sin^2\theta+i(e^2+q^2)\cos\theta)\right]\right\}. \qquad (3.8.16)$$

(3.8.15)和(3.8.16)是新解中电磁场的严格表达式，当 $B_0=0$，$q=0$ 时，此式恰与 Kerr-Newman 场的对应表达式相同.

下面求引力场的表达式. 比较(3.8.1)和(3.8.2)有

$$f=-\frac{C\sin^2\theta}{\Sigma},\ P=\frac{1}{C^{1/2}\sin\theta},$$

$$\rho=\Delta^{1/2},\ \omega=(2mr-e^2-q^2)\frac{\alpha}{C}, \qquad (3.8.17)$$

$$\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\Delta^{1/2}}+i\mathrm{d}\theta\right).$$

将此式中的 f、ω 和(3.8.4)代入(3.8.12)，得到

$$\omega'_{,r}=-\frac{\Delta_{1/2}q}{r}B_0^3\sin\theta\cos\theta-\frac{6\alpha m}{r^4}+\frac{2eB_0}{r^2}+\frac{1}{2}(eB_0^2+amB_0^4)(1+\cos^2\theta)-\frac{1}{8}amB_0^4\sin^4\theta, \qquad (3.8.18)$$

$$\omega'_{\theta}=-\frac{2\Delta^{1/2}qB_0}{r^2}-\frac{1}{2}\Delta^{1/2}qB_0^3(1+\cos^2\theta)-\frac{\Delta}{r}eB_0^3\sin\theta\cos\theta-\frac{\Delta}{2r}amB_0^4\sin\theta\cos\theta(3-\cos^2\theta). \qquad (3.8.19)$$

可以发现，当 $q\ll e=-2B_0J$ 时，(3.8.18)和(3.8.19)恰好满足

$$\omega'_{r\theta}=\omega'_{,\theta r}, \qquad (3.8.20)$$

即 $\omega'_{,r}\mathrm{d}r+\omega'_{\theta}\mathrm{d}\theta$ 为全微分. 此时积分，得到

$$\omega'(r,\theta)=-\frac{2eB_0}{r}+\frac{eB_0^3r}{2}+\frac{amB_0^4r}{2}+\frac{2am}{r^3}-\frac{1}{8r}\Delta amB_0^4\sin^4\theta+\frac{1}{8}\Delta eB_0^3\sin^2\theta+\frac{1}{4r}\Delta amB_0^4\sin^2\theta+\text{const}. \qquad (3.8.21)$$

由(3.8.7)～(3.8.11)可以得到 f' 的表达式. 于是得到新的度规

$$\mathrm{d}s^2=\Lambda\Lambda^*\left(\frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2+\Sigma\mathrm{d}\theta^2-\frac{\Sigma}{C}\Delta\mathrm{d}t^2\right)+$$

$$\frac{C\sin^2\theta}{\Sigma\Lambda\Lambda^*}(\mathrm{d}\varphi-\omega'\mathrm{d}t)^2. \qquad (3.8.22)$$

式中 ω' 已由(3.8.21)确定.

可以证明，当 $B_0=0$ 时，(3.8.21)退化为 Kerr-Newman 度规；当 $a=0$ 时，退化为 Ernst 解(不转动的情况)，故知 B_0 的物理意义是外磁场强度.

§ 3.9 Chandrasekhar 生成解定理

Chandrasekhar(1978)用两个实函数代替 Ernst 的复函数，对辐射对称稳态真空场方程进行了重新描述. 这种描述有很多优越性. 他以一个普遍的形式选取线元，直接导出了 Kerr 度规。这一工作提供了一种由已知解产生新解的生成技术.

把辐射对称线元写成

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\nu}\mathrm{d}t^2-e^{2\psi}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2-e^{2u_2}\mathrm{d}x^{2^2}-e^{2u_3}\mathrm{d}x^{3^2}. \qquad (3.9.1)$$

式中坐标(φ, x^2, x^3)为球坐标(φ, r, θ). 假设场是稳态的，ν, ψ, ω, u_2, 和 u_3 只是 x^2 和 x^3 的函数. 经过适当的变换，可将(3.9.1)变为

$$\mathrm{d}s^2=(\Delta\delta)^{1/2}\{\chi\mathrm{d}t^2+\chi^{-1}(\mathrm{d}\varphi-\omega\mathrm{d}t)^2\}+$$
$$\Delta^{-\frac{1}{2}}e^{u_2-u_3}(\mathrm{d}r^2+\Delta\mathrm{d}\theta^2), \qquad (3.9.2)$$

此时场方程可简化为

$$\frac{1}{2}(X+Y)\{(\Delta X_{,r})_{,r}+(\delta X_{,u})_{,u}\}=\Delta X_{,r}^2+\delta X_{,u}^2, \qquad (3.9.3)$$

$$\frac{1}{2}(X+Y)\{(\Delta y_{,r})_{,r}+(\delta y_{,u})_{,u}\}=\Delta y_{,r}^2+\delta y_{,u}^2. \qquad (3.9.4)$$

式中 $X\equiv\chi+\omega$, $y\equiv\chi-\omega$, $u\equiv\cos\theta$,

$$\Delta^{1/2}\equiv e^{u_3-u_2}, \quad \delta\equiv1-u^2, \quad \chi=\exp(-\psi+\nu). \qquad (3.9.5)$$

这一表述的优点是不必先假定正则坐标具有柱对称性.

为了便于生成新解，我们作变换

$$X=\frac{1+F}{1-F}, \quad Y=\frac{1+G}{1-G}, \qquad (3.9.6)$$

$$\eta=\frac{r-m}{(m^2-a^2)^{1/2}}, \quad \Delta=(m^2-a^2)(\eta^2-1). \tag{3.9.7}$$

容易看出，式中 η 和 u 与椭球坐标系中的空间坐标 x 和 y 是一致的. 可以把方程(3.9.3)和(3.9.4)写成下面的形式：

$$(1-FG)\{[(x^2-1)F_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)F_{,y}]_{,y}\}=$$
$$-2G[(x^2-1)F^2_{,x}+(1-y^2)F^2_{,y}], \tag{3.9.8}$$
$$(1-FG)\{[(x^2-1)G_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)G_{,y}]_{,y}\}=$$
$$-2F[(x^2-1)G^2_{,x}+(1-y^2)G^2_{,y}]. \tag{3.9.9}$$

这样，一旦获得了关于 F 和 G 的方程(3.9.8)和(3.9.9)的解，便得到了度规(3.9.2). 可以由 Chandrasekhar 表述得到一类新解. Bonnor(1979)已经证明，方程(3.9.8)和(3.9.9)的解也属于稳态辐射对称的电真空场. Chandrasekhar 通过简单的观察，从恩斯特方程得出了(3.9.8)～(3.9.9.)的解.

如果恩斯特方程的解可写成

$$\xi=f(x, y, \lambda)+i\lambda\phi(x, y, \lambda), \tag{3.9.10}$$
$$\lambda=\text{const}$$

的形式，便可以把(3.9.8)～(3.9.9.)分成两个独立的方程. 实际上，Tomimatsu-Sato 解，Kinnersley 和 Chitre 解都可以化为(3.9.10)的形式.

将(3.3.17)代入恩斯特方程(3.3.10)，得到椭球坐标中的恩斯特方程：

$$(1-\xi\xi^*)\{[(x^2-1)\xi_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)\xi_{,y}]_{,y}\}=$$
$$-2\xi^*[(x^2-1)\xi^2_{,x}+(1-y^2)\xi^2_{,y}]. \tag{3.9.11}$$

按(3.9.10)，将 $\xi=f+i\lambda\phi$ 代入(3.9.11)，分开实部和虚部，得到

$$(1-f^2-\lambda^2\phi^2)\{[(x^2-1)f_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)f_{,y}]_{,y}\}=$$
$$-2f[(x^2-1)(f^2_{,x}-\lambda^2\phi^2_{,x})+(1-y^2)(f^2_{,y}-\lambda^2\phi^2_{,y})]-$$
$$4\lambda^4\phi[(x^2-1)f_{,x}\phi_{,x}+(1-y^2)f_{,y}\phi_{,y}], \tag{3.9.12a}$$
$$(1-f^2-\lambda^2\phi^2)\{[(x^2-1)\phi_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)\phi_{,y}]_{,y}\}=$$
$$-4f[(x^2-1)f_{,x}\phi_{,x}+(1-y^2)f_{,y}\phi_{,y}]+$$
$$2\phi[(x^2-1)(f^2_{,x}-\lambda^2\phi^2_{,x}), +$$

$$(1-y^2)(f^2_{,y}-\lambda^2\phi^2_{,y}).\tag{3.9.12b}$$

类似地，把 F 和 G 写成 $F=f'+\kappa\phi'$ 和 $G=f'-\kappa\phi'$ ($\kappa=\text{const}$)，方程(3.9.8)～(3.9.9)便成为两个独立的方程：

$$\begin{aligned}&(1-f'^2+\kappa^2\phi'^2)\{[(x^2-1)f'_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)f'_{,y}]_{,y}\}=\\&\quad -2f'[(x^2-1)(f'_{,x}+k^2\phi'^2_{,x})+(1-y^2)(f'^2+k^2)]+\\&\quad 4k^2\phi'[(x^2-1)f'_{,x}\phi'_{,x}+(1-y^2)f'_{,y}\phi'_{,y}],\end{aligned}\tag{3.9.13a}$$

$$\begin{aligned}&(1-f'^2+\kappa^2\phi'^2)\{[(x^2-1)k\phi'_{,x}]_{,x}+[(1-y^2)k\phi'_{,y}]_{,y}\}=\\&\quad -4kf'[(x^2-1)f'_{,x}\phi'^2_{,x}+(1-y^2)(f'_{,y}\phi'_{,y}]+\\&\quad 2k\phi'[(x^2-1)(f'^2_{x}+k^2\phi'^2_{x})+(1-y^2)(f'^2_{,a}+k^2\phi'_{,a})].\end{aligned}\tag{3.9.13b}$$

比较表明，两对方程(3.9.12)和(3.9.13)是相互关联的. 解任何一对，均可获得场方程的解. 比较上面两对方程可以发现，将 f 和 ϕ 中的所有($\imath q$)换成 k，我们便得到 f' 和 ϕ'；由它们就能构成 F 和 G：

$$F=f'+q\phi',\tag{3.9.14}$$

$$G=f'-q\phi'.\tag{3.9.15}$$

下面我们讨论 Bonnor 给出的一种生成技术. 首先，把辐射对称线元表示成 Bonnor(1979)的形式：

$$ds^2=e^\lambda(du^2+d\theta^2)+a^{-2}\Delta^2 d\varphi^2+a^2dt^2.\tag{3.9.16}$$

式中 $x^1\equiv u$，$x^2\equiv\theta$，$x^3\equiv\varphi$；λ，Δ，a，只是 u 和 θ 的函数. 我们要解的引力场方程是

$$R_{\mu\nu}=2F^{\alpha}_{\mu}F_{\nu\alpha}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}.\tag{3.9.17}$$

Maxwell 方程为

$$R_{\mu\nu;\tau}+F_{\tau\nu;\mu}+F_{\tau\mu;\nu}=0,\tag{3.9.18}$$

$$F^{\mu\nu}_{;\nu}=0.\tag{3.9.19}$$

在静电问题中所有的场变量都不依赖时间($t\equiv x^0$). 令 4-矢量 A_μ 为

$$A_\mu=\delta^0_\mu\phi(x^\imath),\ \imath=1,2,3.\tag{3.9.20}$$

则(3.9.18)自然满足；式中 ϕ 为静电势. 可以证明，场方程的全

部解由下面两个方程确定：

$$R_{00}=2F^{\alpha}_{0}F_{0\alpha}-\frac{1}{2}g_{00}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}, \tag{3.9.21}$$

$$F^{0\nu}_{;\nu}=0. \tag{3.9.22}$$

令 $$X=\alpha+\phi, \quad Y=\alpha-\phi, \tag{3.9.23}$$

可将(3.9.21)～(3.9.22)写为

$$(X+Y)\nabla^2 X=2\nabla X\nabla X, \tag{3.9.24}$$

$$(X+Y)\nabla^2 Y=2\nabla Y\nabla Y. \tag{3.9.25}$$

这两个方程与 Chandrasekhar 给出的两个方程(3.9.8)～(3.9.9)完全等效. 实际上，引入椭球坐标

$$\eta=\cosh u, \ u=\cos\theta, \tag{3.9.26}$$

作代换(3.9.6)，把 X 和 Y 换成 F 和 G，上面两个方程便成为(3.9.8)～(3.9.9).

我们从 Kinnersley 和 Chitre(1978)给出的稳态辐射对称解出发. 此解按恩斯特符号表示为

$$\xi=\frac{(x^4-1)-2i\beta xy(x^2+y^2-2)-\beta^2(x^2-y^2)^2}{2x(x^2-1)+2i\beta y(x^2-y^2)}. \tag{3.9.27}$$

式中 $\beta=\mathrm{const}$. 按前面说明的 Chandrasekhar 生成技术，得到

$$F=\frac{(x^4-1)-2\beta xy(x^2+y^2-2)+\beta^2(x^2-y^2)^2}{2x(x^2-1)+2\beta y(x^2-y^2)}, \tag{3.9.28}$$

$$G=\frac{(x^4-1)+2\beta xy(x^2+y^2-2)+\beta^2(x^2-y^2)^2}{2x(x^2-1)-2\beta y(x^2-y^2)}. \tag{3.9.29}$$

采用变换(Chand，1978)

$$X\to X(1+C'X), \tag{3.9.30}$$

$$Y\to Y/(1-C'Y),$$

可以得到单极解，由 C-B 技术得

$$\alpha=\frac{1}{2}\ \frac{(a_2-a_1)(1-FG)}{a_1a_2+a_1^2G+a_2^2F+a_1a_2FG}, \tag{3.9.31}$$

$$\phi=\frac{1}{2}\ \frac{2a_1G+2a_2F+(a_1+a_2)(1+FG)}{a_1^2G+a_2^2F+a_1a_2(1+FG)}. \tag{3.9.32}$$

式中 a_1 和 a_2 为任意常数；

$$a_1=c'+1,\quad a_2=c'-1,$$

c'是(3.9.30)中的任意常数. 将(3.9.28)～(3.9.29)代入 α 和 ϕ 的表达式，其中含的任意常数可由变换 $t=(\mathrm{const})^{-1}t'$ 和 $\phi=(\mathrm{const})\phi'$ 消掉. 式(3.9.17)～(3.9.19)中 ϕ 总是以导数形式出现的，所以可以在 ϕ 的表达式中引入另一常数. 这样，便可保证在空间无限远处 α^2 为么模的和 ϕ 为零. α 和 ϕ 的渐近展开式为

$$\alpha=1-\frac{1}{x}\frac{2(a_1^2+a_2^2)}{a_1a_2(1+\beta^2)}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\cdots \tag{3.9.33}$$

$$\phi=-\frac{1}{x}\frac{4(a_1+a_2)}{(1+\beta^2)a_1a_2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)+\cdots \tag{3.9.34}$$

用变换 $x=\frac{1}{l}\left(r-\frac{m}{2}\right),\quad y=\mathrm{const},$ (3.9.35)

可将(3.9.33)～(3.9.34)表示为球坐标的形式，其中 l 和 m 是常量. 上面获得的新解是渐近平直的 3 参量解，3 个参量是(c', l, β). 此解描述一个带有电(磁)荷、偶极矩的孤立质量源的外部场. 场源的荷质比为

$$\frac{e}{m}=\frac{2c'}{(c'^2+1)}. \tag{3.9.36}$$

当 $c'=0$ 时，此解退化为 2 参量的偶极子解.

根据本节说明的生成技术，我们再由 Tomimatsu-Sato 解生成一个新解. 重复用本节的方法，由 T-S 解可得

$$F=\frac{(p^2x^2-q^2y^4-1)-2pqxy(x^2-y^2)}{2px(x^2-1)+2qy(y^2-1)}, \tag{3.9.37}$$

$$G=\frac{(p^2x^2-q^2y^4-1)+2pqxy(x^2-y^2)}{2px(x^2-1)-2qy(y^2-1)}. \tag{3.9.38}$$

经过同样冗长的但是直接的计算，得到

$$\alpha=\frac{a_2-a_1}{2}\frac{c^2-d^2-a^2+b^2}{a_1a_2(c^2-d^2+a^2-b^2)+(a_1^2+a_2^2)(ac+bd)+(a_1^2-a_2^2)(bc+ad)} \tag{3.9.39}$$

$$\phi=\frac{1}{2}\frac{\begin{array}{l}(a_1+a_2)(c^2-d^2+a^2-b^2)+\\ 2(a_1+a_2)(ac+bd)+\\ 2(a_1-a_2)(bc+ad)\end{array}}{\begin{array}{l}a_1a_2(c^2-d^2+a^2-b^2)+\\ (a_1^2+a_2^2)(ac+bd)+\\ (a_1^2-a_2^2)(bc+ad)\end{array}}. \tag{3.9.40}$$

式中
$$\begin{aligned}&a=p^2x^4-q^2y^4-1,\quad b=2pqxy(x^2-y^2),\\ &c=2px(x^2-1),\quad d=2qy(y^2-1),\\ &a_1=c'+1,\quad a_2=c'-1,\end{aligned} \tag{3.9.41}$$

c'即(3.9.36)中的常数.

α 和 ϕ 的渐近展开式为

$$\alpha=1-\frac{1}{px}\frac{2(a_1^2+a_2^2)}{a_1a_2}-\frac{1}{p^2x^2}\frac{4qy(a_1^2-a_2^2)}{a_1a_2}+\cdots, \tag{3.9.42}$$

$$\phi=-\frac{1}{px}\frac{(a_1+a_2)(a_1^2-a_2^2)}{a_1a_2}+o\left(\frac{1}{p^2x^2}\right)+\cdots, \tag{3.9.43}$$

为了使 α 和 ϕ 在空间无限远处是渐近平直的，在得到(3.9.39)～(3.9.40)的过程中对 ϕ 进行了适当的变换并附加了任意常数. 作变换(3.9.35)，变至球坐标即可明显看出，所得到的解是渐近平直的，而且描述偶极子的场. 荷质比与(3.9.36)相同. 这就是说，分别由 Kinnersley-Chitre 解和 T-S 解生成的两个电真空解具有相同的荷质比.

§3.10 参量变换方法

Bonnor(1966)由 Kerr 稳态真空解经过与上节类似的参量变换生成了一个爱因斯坦-麦克斯韦场方程的电真空解. 这一方法称为参量变换技术. Wang(1974)用这一技术由 Tomimatsu-Sato 解生成了一个电磁真空解. 后来这一技术又被用来获得更复杂的解. 本节给出它的另一表述.

对已知的某一稳态度规

$$ds^2=e^u(dt-\omega d\varphi)^2-e^{-u}[e^{2v}(d\rho^2+dz^2)+\rho^2dz^2] \tag{3.10.1}$$

中的某个常量进行适当变换，便可获得新的稳态电磁真空度规：

$$ds^2=e^{2\delta}dt^2-e^{-2\delta}[e^{2\nu}(d\rho^2+dz^2)+\rho^2 d\varphi^2]. \qquad (3.10.2)$$

在椭球坐标系中，与(3.10.1)对应的引力场方程组可以写为下面两个方程：

$$(x^2-1)u_{,11}+(1-y^2)u_{,22}+2xu_{,1}-2yu_{,2}=$$
$$-e^{-2u}[(x^2-1)\psi_{,1}^2+(1-y^2)\psi_{,2}^2], \qquad (3.10.3a)$$
$$(x^2-1)\psi_{,11}+(1-y^2)\psi_{,22}+2x\psi_{,1}-2y\psi_{,2}=$$
$$2[(x^2-1)u_{,1}\psi_{,1}+(1-y^2)u_{,2}\psi_{,2}]. \qquad (3.10.3b)$$

式中 u 是(3.10.1)中的度规系数，ψ 为扭势.

与(3.10.2)对应的电磁真空场方程组在椭球坐标系中可以写成下面一对方程：

$$(x^2-1)\delta_{,11}+(1-y^2)\delta_{,22}+2x\delta_{,1}-2y\delta_{,2}=$$
$$e^{-2\delta}[(x^2-1)\phi_{,1}^2+(1-y^2)\phi_{,2}^2], \qquad (3.10.4a)$$
$$(x^2-1)\phi_{,11}+(1-y^2)\phi_{,22}+2x\phi_{,1}-2y\phi_{,2}=$$
$$2[(x^2-1)\delta_{,1}\phi_{,1}+(1-y^2)\delta_{,2}\phi_{,2}. \qquad (3.10.4b)$$

式中 δ 是(3.10.2)中的度规系数，ϕ 为静电势.

比较(3.10.3)和(3.10.4)可以发现，除符号不同外，形式完全相同. 所以，只要作相应的参量变换即可由已知解(3.10.1)得到新解(3.10.2). 用这一技术，由 Kinnersley 和 Chitre(1978)的稳态解出发，可生成一新解：

$$e^{\delta}=1-\frac{4D}{E}, \quad \phi=4\beta y\frac{F}{E}. \qquad (3.10.5)$$

式中

$$D\equiv x(x^2-1)\{(x+1)^2(x^2-1)+\beta^2(x^2-y^2)\}+$$
$$2\beta^2y^2(x^2-y^2)(x+1)(x^2-2x+y^2),$$
$$E\equiv\{(x+1)^2(x^2-1)+\beta^2(x^2-y^2)\}^2-$$
$$4\beta^2y^2(x+1)^2(x^2-2x+y^2)^2, \qquad (3.10.6)$$
$$F\equiv(x^2-y^2)\{(x+1)^2(x^2-1)+\beta^2(x^2-y^2)^2\}+$$
$$2x(x^2-1)(x+1)(x^2-2x+y^2).$$

这是一个新解，它描述渐近平直静态偶极子的场.

用(3.9.35)变至球坐标，作渐近展开，得到[见度规

(3.9.16)]

$$e^{2\alpha}=1-\frac{1}{r}\frac{8l}{1-\beta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{4l\{8l-m(1+\beta^2)\}}{(1+\beta^2)^3}+$$

$$o\left(\frac{1}{r^3}\right)-\cdots \qquad (3.10.7)$$

$$\phi=\frac{4\beta(3+\beta^2)l^2}{(1+\beta^2)^2}\frac{\cos\theta}{r^2}+o\left(\frac{1}{r^3}\right)+\cdots$$

因此．这一新解描述一个质量为 $4l(1+\beta^2)$，偶极矩为 $\frac{4\beta(3+\beta^2)l^2}{(1+\beta^2)^2}$的源的外部场．当 $\beta=0$ 时静电势 $\phi=0$，退化为 $\delta=2$ 的爱因斯坦场方程的 Weyl 静态解．此解在极轴($x=1$，$y=\pm1$)方向有奇异性．

在这里我们指出一个有趣的情况．直接从 Kerr 解出发，按(3.9.14)和(3.9.15)的规则取

$$F=-px-qy, \qquad (3.10.8)$$

$$G=-px+qy.$$

在静电势 ϕ 的展开式中不含单极(电荷或磁荷)项．但是将变换(3.9.30)用于(3.10.8)却得到了单极解，其展开式为

$$\alpha=1-\frac{2(1+c'^2)}{1-c'^2}\frac{1}{px}-\frac{2}{p^2x^2}+\frac{4c'}{1-c'^2}\frac{qy}{p^2x^2}+\frac{q^2y^2}{p^2x^2}+\cdots \qquad (3.10.9)$$

$$\phi=1-\frac{4c'}{1-4c'}\frac{1}{px}-\frac{1}{p^2x^2}\left\{2qy\,\frac{1+3c'^2}{c'(c'^2-1)}+\frac{2(1+c'^2)}{c'^2-1}\right\}+\cdots$$

求得荷质比为

$$\frac{e}{m}=\frac{2c'}{1+c'^2}. \qquad (3.10.10)$$

这一新解可能与 Bonnor 解(1979)有某种联系．

§ 3.11 Ehlers-Bonnor 生成解定理

Ehlers 曾经证明，由爱因斯坦引力场方程的任意一个静态外部解，都可以生成一个新的稳态外部解. 设已知的度规为$g_{\mu\nu}$，则生成的外部解为

$$g'_{\mu\nu}=\cosh 2U(e^{2U}g_{\mu\nu}+\xi_\mu\xi_\nu)-(\cosh 2U)^{-1}u_\mu u_\nu, \quad (3.11.1)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\tau\lambda}U^{,\tau}\xi^\lambda=u_{[\mu;\nu]}, \quad u_\sigma\xi^\sigma=-1, \quad e^{2U}=-\xi_\sigma\xi^\sigma.$$

式中 ξ^μ 是类时 Killing 矢量. 在静场中一定存在一个矢量场$\boldsymbol{u}$，它满足条件

$$u_{\mu;\nu}=-u_\mu u_\nu, \quad u_{[\mu}u_{\nu]}=0, \quad u^\sigma u_\sigma=-1. \quad (3.11.2)$$

式中"一点"表示∇_u. 由此式和 $U_{,\mu}\xi^\mu=0$ 可知关于 u_μ 的方程是可积的.

在此基础上，Bonnor(1961)证明了，由一个爱因斯坦场方程的静态真空解，可以生成一个静态电磁真空解.

设度规

$$d\bar{s}^2=\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=e^U dx^{0^2}-e^{-U}h_{ij}dx^i dx^j \quad (3.11.3)$$

满足真空静态引力场方程 $\bar{R}_{\mu\nu}=0$，则借助于辅助度规

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=dx^{0^2}-h_{ij}dx^i dx^j. \quad (3.11.3a)$$

可以证明，下面的生成解描述真空爱因斯坦-麦克斯韦场

$$d\tilde{s}^2=\tilde{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu\equiv e^\zeta dx^{0^2}-e^{-\zeta}h_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.11.4)$$

$$e^\zeta=[16\pi(A^2+B^2)]^{-1}\left[sh\left(\frac{1}{2}U+C\right)\right]^{-2} \quad (3.11.5)$$

$$F_{ij}=A\in_{ijk}U^{,k}, \quad (3.11.6)$$

$$F_{i0}=Be^\zeta U_{,i}=-F_{0i}. \quad (3.11.7)$$

式中 A，B 和 C 为任意常数，且

$$\in_{ijk}\equiv(-g)^{1/2}\varepsilon_{ijk}, \quad (3.11.8)$$

U 满足下式：

$$R_{ik}+\frac{1}{2}U_{,i}U_{,k}=0, \quad U^{;\mu}_{;k}\equiv(g^{i\lambda}U_{,\lambda})_{;k}=0, \quad (3.11.9)$$

式中分号表示关于度规(3.11.3a)的协变微分.

下面证明生成解(3.11.4)～(3.11.9)确实满足场方程

$$\tilde{R}_{\mu\nu}=8\pi\left(F^{\sigma}_{\mu}F_{\sigma\nu}-\frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right), \tag{3.11.10}$$

$$F_{\mu\nu|\tau}+F_{\nu\tau|\mu}+F_{\tau\mu|\nu}=0, \tag{3.11.11}$$

$$F^{\mu\nu}_{|\nu}=0. \tag{3.11.12}$$

式中指标的上升和下降由$\tilde{g}^{\mu\nu}$和$\tilde{g}_{\mu\nu}$完成，$F_{\mu\nu|\tau}$表示 $F_{\mu\nu}$关于$g_{\alpha\beta}$取协变微分.

注意到

$$\tilde{g}^{\alpha\beta}\tilde{g}_{\beta\lambda}=\delta^{\alpha}_{\lambda},\quad g^{\alpha\beta}g_{\beta\lambda}=\delta^{\alpha}_{\lambda}, \tag{3.11.13}$$

由度规(3.11.3)和(3.11.4)得到

$$\begin{aligned}&\tilde{g}^{ik}=e^{\zeta}g^{ik},\\&\tilde{g}^{oi}=g^{oi}=0,\\&\tilde{g}^{oo}=e^{-\zeta};\end{aligned} \tag{3.11.14}$$

$$\begin{aligned}&\tilde{\Gamma}^{i}_{jk}=\Gamma^{i}_{jk}-\frac{1}{2}\delta^{i}_{j}\xi_{,k}=\frac{1}{2}\delta^{i}_{k}\xi_{,j}+\frac{1}{2}g_{jk}\xi_{,i},\\&\tilde{\Gamma}^{o}_{oi}=\frac{1}{2}\xi_{;i},\\&\tilde{\Gamma}^{i}_{oo}=-\frac{1}{2}e^{2\zeta}\xi^{;i},\\&\tilde{\Gamma}^{o}_{ij}=\tilde{\Gamma}^{i}_{jo}=\tilde{\Gamma}^{o}_{oo}=0.\end{aligned} \tag{3.11.15}$$

由此，可将场方程(3.11.10)化为

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ik}\equiv\;&R_{ik}+\frac{1}{2}\xi_{;i}\xi_{;k}-\frac{1}{2}g_{ik}\xi^{;\lambda}_{;\lambda}=\\&8\pi\{e^{\zeta}g^{ab}F_{ib}F_{ka}+\alpha^{-\zeta}F_{oi}F_{ok}-\\&\frac{1}{4}g_{ik}e^{\zeta}g^{am}g^{bn}F_{mn}F_{ab}-\frac{1}{2}e^{-\zeta}g_{ik}g^{ab}F_{oa}F_{ob}\},\end{aligned} \tag{3.11.16}$$

$$\tilde{R}_{oi}\equiv 8\pi e^{\zeta}g^{ab}F_{ia}F_{ab}=0, \tag{3.11.17}$$

$$\tilde{R}_{oo}\equiv\frac{1}{2}e^{2\zeta}\xi^{;a}_{;a}=4\pi e^{\zeta}\left\{g^{ab}F_{oa}F_{ob}-\frac{1}{2}e^{2\zeta}g^{ab}g^{mn}F_{am}F_{bn}\right\}. \tag{3.11.18}$$

将(3.11.4)～(3.11.9)直接代入，容易证明(3.11.16)～(3.11.18)成立，即生成解满足场方程(3.11.10).

由(3.11.4)～(3.11.5)，可将场方程(3.11.11)的左端化为

$$F_{ij|k}+F_{jk|i}+F_{ki|j}=F_{ij;k}+F_{jk;i}+F_{ki;j} \tag{3.11.19}$$

和

$$F_{0i|j}+F_{ij|0}+F_{j0|i}=F_{0i;j}+F_{j0;i}. \tag{3.11.20}$$

由(3.11.6)和(3.11.7)可知，上二式右边均为零(注意到 $\eta_{ijkl;u}=0$). 于是证明了生成解满足场方程(3.11.11). 同理可证，生成解也满足场方程(3.11.12).'方程(3.11.9)是 $\bar{R}_{\mu\nu}=0$ 的条件.

下面应用这一生成技术由 Weyl 解获得一新解. 可以把 Weyl 解写成 $\bar{g}_{\mu\nu}$:

$$d\bar{s}^2=e^{U}dt^2-e^{-U}[e^{w}(dz^2+d\rho^2)+\rho^2d\varphi^2], \tag{3.11.21}$$

其中 U 和 w 满足

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial\rho}=0, \tag{3.11.22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\rho\frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{3.11.23}$$

$$\frac{\partial w}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right)^2-\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right], \tag{3.11.24}$$

U 和 w 只含 ρ 和 z.

按上述生成技术，生成的电磁解为

$$\begin{aligned}
&d\bar{s}^2=e^{\xi}dt^2-e^{-\xi}[e^{w}(dz^2+d\rho^2)+\rho^2d\varphi^2],\\
&e^{\xi}=[16\pi(A^2+B^2)]^{-1}\left[\sinh\left(\frac{1}{2}U+C\right)\right]^{-2},\\
&F_{13}=A\rho\frac{\partial U}{\partial\rho},\\
&F_{23}=-A\rho\frac{\partial U}{\partial z},\\
&F_{01}=Be^{\xi}\frac{\partial U}{\partial z},\quad F_{02}=Be^{\xi}\frac{\partial U}{\partial\rho}.
\end{aligned} \tag{3.11.25}$$

式中 U 和 w 满足(3.11.22)～(3.11.24)；坐标取为

$$x^1=z,\ x^2=\rho,\ x^3=\varphi,\ x^0=t. \tag{3.11.26}$$

解(3.11.25)还可描述柱面电磁波.

令

$$A=i\alpha, B=i\beta, U=V+2\log i.$$

式中 α 和 β 是实常数，U 和 V 是 ρ 和 z 的函数. 作复变换

$$Z=it,\ T=iz.$$

则新解为

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}s^2=e^{w-\xi}\mathrm{d}T^2-e^{\xi}\mathrm{d}Z^2-e^{w-\xi}\mathrm{d}\rho^2-\rho^2\mathrm{d}\varphi^2,\\
&e^{\zeta}=[16\pi(\alpha^2+\beta^2)]^{-1}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}U+C\right)\right]^2, \qquad (3.11.27)\\
&F_{12}=\beta e^{\xi}\frac{\partial V}{\partial\rho},\ F_{23}=\alpha\rho\frac{\partial V}{\partial T},\\
&F_{01}=-\beta e^{\zeta}\frac{\partial V}{\partial T},\ F_{03}=\alpha\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}.
\end{aligned}$$

式中 V 和 w 满足

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}-\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}=0, \qquad (3.11.28)$$

$$\frac{\partial w}{\partial T}=\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\frac{\partial V}{\partial T}. \qquad (3.11.29)$$

$$\frac{\partial w}{\partial\rho}=\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right].$$

这里，$V(\rho, T)$就是柱面波方程(3.11.28)的一个实解.

与前面的证明过程类似，还可以证明一个生成解的定理.

定理 若已知一个真空解 $g_{\mu\nu}$(满足 $R_{\mu\nu}=0$)，则生成解为

$$\begin{aligned}
&e^{\zeta}=\{C-[4\pi(A^2+B^2)]^{1/2}U\}^{-2},\\
&F_{ij}=A\eta_{ijk}U_{,k}, \qquad (3.11.30)\\
&F_{0k}=Be^{\xi}U_{;k}=-F_{k0}.
\end{aligned}$$

式中 A, B 和 C 为任意常数；U 满足

$$U^{;i}_{;i}=0.$$

用完全类似的推导可以证明(3.11.30)满足 E-M 场方程(3.11.10)～(3.11.12).

现在我们对本节所述的生成技术进行一些必要讨论. 本节开头叙述的 Ehlers 证明的定理还可以换一种形式表述：

如果度规 $\widetilde{g}_{\mu\nu}$[见(3.11.3)]满足真空引力场方程 $\overline{R}_{\mu\nu}=0$，则

生成解可表示为

$$d\sigma^2 = e^{\mu}(dx^0 - u_i dx^i)^2 - e^{-\mu} h_{ij} dx^i dx^j, \qquad (3.11.31)$$

$$e^{\mu} = A^{-1}[\mathrm{ch}(U+C)]^{-1}, \qquad (3.11.32)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u_k}{\partial x^i} = A\epsilon_{ikl} U^{,l}.$$

式中 U 是(3.11.3)中出现的函数，它满足

$$R_{ik} + \frac{1}{2} U_{,i} U_{,k} = 0, \quad U^{;i}_{;i} = 0. \qquad (3.11.33)$$

可证明此解描述稳态真空场.

将解(3.11.31)～(3.11.33)和 $B=0$ 时的解(3.11.4)～(3.11.9)比较，我们发现二者形式相似. 前者描述稳态(包括旋转场源的)外部场，后者描述静态外部纯磁真空场. 二者形式相似暗示了磁源引力场和旋转质量的引力场之间存在某种对应关系.

当方程(3.11.9)的特解已知，U 的具体形式确定时，由前面的生成技术得到的一类解往往具有物理意义. 如果度规(3.11.3)具有辐射对称性，则可求得(3.11.9)的通解；生成解描述辐射对称的引力-电磁场，是具有电场和磁场的复合解.

应指出，虽然 Weyl 解(3.11.21)是静态辐射对称外部场的通解，但是生成解(3.11.25)却不是通解. 从物理的观点看，这个生成解只含有一个调和函数 U，它是用来引出电场，磁场和引力场三种场源的. 假设用 U 选择上述一种场源，如电场，则其他两种场源或者不存在或者与电场的相似. 例如我们选择 U 和任意常数使电场的场源为点电荷，则另外两种场源要么没有，要么是点质量和磁荷，不会出现具有磁偶极矩的点质量源.

由定理(3.11.30)得到的电磁场尽管在对称性方面没有受到限制，但其物理内容是很特殊的. 在(3.11.30)中令 $A=0$，场源就是一群粒子，每个粒子的荷质比都相同，于是作用于每个粒子上的引力和电场力相平衡.

§3.12 孤立子(Soliton)方法

在度规张量 $g_{\mu\nu}$仅依赖于两个变量的情况下，引力场方程的解法和散射问题相反. 稳态辐射对称引力场就属于这种情况. 解引力场方程的孤立子方法是本世纪 70 年代末由苏联学者创造并发展起来的(Belinsky 和 Zakharov 等，1978，1979，1983，…)，是一种十分简洁、优美的方法，有广泛的应用价值. 对于稳态辐射对称引力场，由一个初始解代入一组和引力场方程等效但简化了的微分方程，求出孤立子(极点)解，从而得到引力场方程的新解. 例如，把平直空-时度规作为初始解，用孤立子方法生成的 2-孤立子解即为 Kerr-NUT 解，生成的一个最简单的 n-孤立子解描述场源为$\frac{n}{2}$个史瓦希质量源和各阶质量多极矩的引力场. 这些史瓦希源很像由于平直空-时背景的"扰动"而形成的孤立子(极点). 本章后几节将较详细地讨论这种生成新解的方法.

稳态辐射对称度规可写为

$$ds^2=g_{ab}dx^a dx^b+f(d\rho^2+dz^2). \tag{3.12.1}$$

式中 g_{ab}和 f 都只含两个变量 ρ 和 z，坐标$(x^0, x^1, x^2, x^3)=(t, \varphi, \rho, z)$，取号差为$+2$，拉丁字母 $a,b,c,d=1,2$，分别对应于 t 和 φ; $i,j,k,l=1,2,3$，对应于空间坐标，希腊字母取值 0，1，2，3. 下面把矩阵(g_{ab})写成 g，(U_{ab})写成 U，…

不失一般性，可以给矩阵 g 加上附加条件(与号差$+2$ 对应)

$$\det g=-\rho^2. \tag{3.12.2}$$

可以证明，具有度规(3.12.1)和(3.12.2)的真空引力场方程可以分解为两组方程.

第一组用来确定 g：

$$(\rho g_{,\rho}g^{-1})_{,\rho}+(\rho g_{,z}g^{-1})=0. \tag{3.12.3}$$

第二组由(3.12.3)给出的解 g 来确定 f：

$$(\ln f)_{,\rho}=-\rho^{-1}+(4\rho)^{-1}Sp(U^2-V^2), \tag{3.12.4}$$

$$(\ln f)_{,z}=(2\rho)^{-1}Sp(UV). \tag{3.12.5}$$

式中 $U\equiv\rho g_{,\rho}g^{-1},\quad V\equiv\rho g_{,z}g^{-1}.$ (3.12.6)

§3.13 矩阵 g 的 n-孤立子解

定义可对易的微分算符 D_1 和 D_2：

$$D_1\equiv\partial_z-\frac{2\lambda^2}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda,\quad D_2\equiv\partial_\rho+\frac{2\lambda\rho}{\lambda^2+\rho^2}\partial_\lambda. \tag{3.13.1}$$

式中 λ 是不依赖于 ρ 和 z 的复参量．这时可以将矩阵方程(3.12.3)的 L-A 偶以变量 ρ，z 表示出来(Belinsky 和 Zakharov，1978)：

$$D_1\psi=\frac{\rho V-\lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\psi,\quad D_2\psi=\frac{\rho U+\lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\psi. \tag{3.13.2}$$

所要求的矩阵 $g(\rho,z)$ 即为 $\lambda=0$ 时的 $\psi(\lambda,\rho,z)$：

$$g(\rho,z)=\psi(0,\rho,z). \tag{3.13.3}$$

这样，解引力场方程便归结为解方程(3.12.3)．这一过程的程序是：由场方程的一个已知解 g_0，代入(3.12.6)求出 U_0，V_0，再代入方程(3.13.2)积分，求出一个初解 $\mu_0(\lambda,\rho,z)$；然后令

$$\psi=\chi\psi_0, \tag{3.13.4}$$

代入(3.13.2)，得到关于 χ 的方程：

$$D_1\chi=\frac{\rho V-\lambda U}{\lambda^2+\rho^2}\chi-\chi\frac{\rho V_0-\lambda U_0}{\lambda^2+\rho^2},$$
$$D_2\chi=\frac{\rho U+\lambda V}{\lambda^2+\rho^2}\chi-\chi\frac{\rho U_0+\lambda V_0}{\lambda^2+\rho^2}; \tag{3.13.5}$$

解此方程求出 χ，代回(3.13.4)和(3.13.3)，便获得了引力场方程的新解 g．

为了保证 $g_{\mu\nu}$ 是实的而且是对称的，应该给方程(3.13.5)加上适当的附加条件．令

$$\bar{\chi}(\bar{\lambda})=\chi(\lambda),\quad \bar{\psi}(\bar{\lambda})=\psi(\lambda), \tag{3.13.6}$$

便可保证 $g_{\mu\nu}$ 是实的，式中 $\bar{\lambda}$ 表示 λ 的复共轭．令

$$g=\chi(-\rho^2/\lambda)g_0\bar{\chi}(\lambda), \tag{3.13.7}$$

便可保证 $g_{\mu\nu}$是对称的，式中 $\tilde{\chi}$ 表示 χ 的转置. 此外，(3.13.7)和(3.13.3)相容，必有

$$\chi(\infty)=I. \tag{3.13.8}$$

式中 I 是单位矩阵.

矩阵 $\chi(\lambda, \rho, z)$的 n-孤立子解给出这样的图像：在参量 λ 的复平面内，矩阵 χ 有 n 个孤立奇点(极点). 这时 $\chi(\lambda, \rho, z)$具有形式

$$\chi = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{\lambda - \mu_k}. \tag{3.13.9}$$

式中矩阵 $R_k=R_k(\rho, z)$，函数 $\mu_k=\mu_k(\rho, z)$.

将表达式(3.13.9)代入方程(3.13.5)和(3.13.7)便得到关于函数 $\mu_k(\rho, z)$和矩阵 $R_k(\rho, z)$的方程. 在 $\lambda=\mu_k$ 处，式(3.13.5)的左端不应存在二阶极点，按这一要求，得到 μ_k 必须满足的方程

$$\begin{aligned} &\mu_{k,z}+2\mu_k^2(\mu_k^2+\rho^2)^{-1}=0, \\ &\mu_{k,\rho}-2\rho\mu_k(\mu_k^2+\rho^2)^{-1}=0. \end{aligned} \tag{3.13.10}$$

上二方程的解是二次代数方程

$$\mu_k^2-2(\omega_k-z)\mu_k-\rho^2=0 \tag{3.13.11}$$

的两个根，式中 ω_k 是任意复常数.

这样，每一个脚标 k(即对于每一个极点)有一个任意常数 ω_k，确定 $\mu_k(\rho, z)$的两个可能解：

$$\mu_k=\omega_k-z\pm[(\omega_k-z)^2+\rho^2]^{1/2}. \tag{3.13.12}$$

式(3.13.9)中的矩阵 R_k 是降秩了的，其分量可写为

$$(R_k)_{ab}=n_a^{(k)}m_b^{(k)} \tag{3.13.13}$$

的形式. 二维矢量 $m_a^{(k)}$ 可以根据在点 $\lambda=\mu_k$ 处满足方程(3.13.5)直接求出，然后由条件(3.13.7)便可确定 $n_a^{(k)}$. 结果，矢量 $m_a^{(k)}$ 用已知矩阵 $\psi_0(\lambda, \rho, z)$表示，其中 $\lambda=\mu_k$. 具体形式为

$$m_a^{(k)}=m_{c0}^{(k)}[\psi_0^{-1}(\mu_k, \rho, z)]_{ca}. \tag{3.13.14}$$

式中 $m_{c0}^{(k)}$为任意常数，ψ_0^{-1}表示 ψ_0 的逆矩阵，重复指标无论在上方还是在下方均表示取和(下同).

求出了 $m_a^{(k)}$ 以后，$n_a^{(k)}$ 由 n 阶线性代数方程组确定：

$$\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{kl}n_a^{(l)} = \mu_k^{-1}m_c^{(k)}(g_0)_{ca},\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

(3.13.15)

式中 Γ_{kl}为对称矩阵：

$$\Gamma_{kl}\equiv m_c^{(k)}(g_0)_{cb}m_b^{(l)}(\rho^2+\mu_k\mu_l)^{-1}. \tag{3.13.16}$$

引入 Γ_{kl}的逆矩阵 D_{kp}：

$$\sum_{p=1}^{n}D_{kp}\Gamma_{pl} = \delta_{kl}, \tag{3.13.17}$$

则(3.13.15)改写为

$$n_a^{(k)} \equiv \sum_{l=1}^{n}D_{lk}\mu_l^{-1}N_a^{(l)}. \tag{3.13.18}$$

式中 $$N_a^{(k)}\equiv m_c^{(k)}(g_0)_{cl}. \tag{3.13.19}$$

至此，新解 g_{ab}已完全确定. 由(3.12.7)、(3.12.8)和(3.12.13)有

$$g = \psi(0) = \chi_{(0)}\psi_{0(0)} = x_{(0)}g_0 = \left(I - \sum_{k=1}^{n}R_k\mu_k^{-1}\right)g_0.$$

(3.13.20)

现在讨论 g_{ab}的对称性和如何保证 g 是实矩阵的问题. 将(3.13.13)、(3.13.18)和(3.13.19)代入矩阵 g 的表达式，得到

$$g_{ab} = (g_0)_{ab} - \sum_{k}\sum_{l=1}^{n}D_{kl}\mu_k^{-1}\mu_l^{-1}N_a^{(k)}N_b^{(l)}. \tag{3.13.21}$$

由上式明显看出 $g_{ab}=g_{ba}$. 只要所有函数 $\mu_k(\rho, z)$和解中所含有的任意常数都取实数，即可保证 g_{ab}是实数. 实际上，初始解 $\psi_0(\lambda, \rho, z)$总满足(3.13.6)，因此在点 $\lambda=\mu_k$，$\psi_0(\lambda)$是实数. 又由(3.13.14)可知，任意常数 $m_{c0}^{(k)}$应该取实数. 假设函数 $\mu_k(k=1, 2, \cdots)$中有一些是复数，由(3.13.6)可知，所有的复数必须以共轭对的形式出现：每一个复极点 $\lambda=\mu$，都应该对应一个与它共轭的极点 $\lambda=\bar{\mu}$. 假设有一对这样的极点 $\lambda=\mu_p$ 和 $\lambda=\mu_q$，$\mu_p=\bar{\mu}_q$. 由(3.13.14)有

$$m_a^{(p)}=m_{c0}^{(p)}[\psi_0^{-1}(\mu_p, \rho, z)]_{ca},$$

$$m_a^{(q)}=m_{c0}^{(q)}[\psi_0^{-1}(\mu_q, \rho, z)]_{ca}.$$

只要把任意常数 $m_{c0}^{(p)}$ 和 $m_{c0}^{(q)}$ 取作共轭复数，就可以保证矩阵 g 是实的．由于 $\psi_0(\bar{\lambda})=\bar{\psi}_0(\lambda)$，所以此时矢量 $m_a^{(p)}$ 和 $m_a^{(q)}$ 也是共轭的．因此我们可以构成一个规则：为了保证矩阵 g 是实的，必须这样选择(3.12.14)中的任意常数 $m_{c0}^{(k)}$，使与实数极点 $\lambda=\mu_k$ 对应的矢量 $m_a^{(k)}$ 是实数，而与每一对共轭极点 $\lambda=\mu_p$ 和 $\lambda=\mu_q=\bar{\mu}_p$ 对应的矢量 $m_a^{(p)}$ 和 $m_a^{(q)}$ 是复数共轭的．

矩阵 g 除了满足对称性和实数的要求以外，还应满足条件(3.12.2)．计算矩阵 g 的行列式用(3.13.21)不方便，我们采用另外的方式．

分析表明，前面用 n-孤立子解描述的背景解(初始解)的扰动过程和下面要描述的一个一个地引入单孤立子的过程是等效的．这过程的第一步是由背景矩阵 g_0 向包含一个孤立子的矩阵跃迁，这对应于在矩阵 χ(即 χ_1)中只有一个极点 $\lambda=\mu_1$．由前面得到的一般结果，很容易得到单孤立子解．矩阵 $x_1(\lambda)$和它的逆 $x_1^{-1}(\lambda)$ 可写为

$$\begin{aligned}\chi_1&=I+(\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-1}(\lambda-\mu_1)^{-1}P_1,\\ \chi_1^{-1}&=I-(\mu_1^2+\rho^2)(\rho^2+\lambda\mu_1)^{-1}P_1.\end{aligned} \tag{3.13.22}$$

式中矩阵 P_1 的表示式为

$$(P_1)_{ab}=m_c^{(1)}(g_0)_{ca}m_b^{(1)}/m_d^{(1)}(g_0)_{df}m_f^{(1)}, \tag{3.13.23}$$

由此还可得到 P_1 的一些性质：

$$P_1^2=P_1,\ \mathrm{Sp}P_1=1,\ \det P_1=0. \tag{3.13.24}$$

函数 μ_1 和 $m_a^{(1)}$ 由(3.13.12)和(3.13.14)确定．我们得到

$$g_1=\chi_1(0)g_0=[I-(\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-2}P_1]g_0. \tag{3.13.25}$$

由任意二阶矩阵 F 满足的一般关系式

$$\det(I+F)=1+\mathrm{Sp}F+\det F$$

和性质(3.13.24)，得到

$$\det[I-(\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-2}P_1]=-\rho^2\mu_1^{-2}, \tag{3.13.26}$$

因此

$$\det g_1=-\rho^2\mu_1^{-2}\det g_0. \tag{3.13.27}$$

第二步是把解 g_1 看做新的"初始解"，即背景度规，再对它附加上一个与 $\lambda=\mu_2$ 对应的孤立子，重复前面的程序. 为此，先组成一个新的背景矩阵函数 $\psi=\chi_1\psi_0$，取它的逆 ψ^{-1}(在点 $\lambda=\mu_2$)，然后求得对应的矢量 $m_a^{(2)}$：

$$m_a^{(2)}=m_{c0}^{(2)}[\psi_1^{-1}(\mu_2,\ \rho,\ z)]_{ca},$$

并与(3.13.23)类似地构成 P_2：

$$(P_2)_{ab}=m_c^{(2)}(g_1)_{ca}m_b^{(2)}/m_d^{(2)}(g_1)_{df}m_f^{(2)},$$

P_2 具有和 P_1 同样的性质(3.13.24).

为了构成矩阵 $\chi_2(\lambda)$，只要将(3.12.26)中的脚标 1→2. 我们得到 2-孤立子解 g_2：

$$g_2=[I-(\mu_2^2+\rho^2)\mu_2^{-2}P_2][I-(\mu_1^2+\rho^2)\mu_1^{-2}P_1]g, \tag{3.13.28}$$

其中所有的 P_k 均满足条件：

$$P_k^2=P_k,\quad \mathrm{Sp}P_k=1,\quad \det P_k=0. \tag{3.13.29}$$

显然，随着孤立子个数 k 的增多，矩阵 P_k 的表达式越来越复杂. 因此，这种求解的方法不如前面直接求 n-孤立子解的方法简便. 但是把解表示成(3.13.28)的形式对于计算行列式 $\det g$ 却很有利，因为要计算 $\det g$ 只需用到 P_k 的性质(3.13.29)，不需要知道 P_k 的具体形式，(3.13.28)中每一个因子对 $\det g$ 的贡献都很容易算出，结果得到

$$\det g=(-1)^n\rho^{2n}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k^{-2}\right)\det g_0. \tag{3.13.30}$$

考虑到(3.12.2)，由上式可以断定 n 必为偶数，因为当 n 是奇数时将破坏度规的号差. 所以，在物理空-时背景上，静态辐射对称的孤立子只能成对地出现，形成束缚的 2-孤立子态.

现在的任务是使 g 满足(3.12.2)，这样的解我们称为物理解，以 $g^{(\phi)}$表示. 由(3.12.3)可得

$$\rho^{-1}[\rho(\ln\det g)_{,\rho}]_{,\rho}+(\ln\det g)_{,zz}=0.$$

根据上式容易证明，满足方程(3.12.3)和条件(3.12.2)的 $g^{(\phi)}$ 可写为

$$g^{(\phi)}=-\rho(-\det g)^{\frac{1}{2}}g. \tag{3.13.31}$$

将(3.13.30)和 $\det g_{}=-\rho^2$ 代入(3.13.21)，得到度规张量 $g^{(\phi)}$ 的表达式：

$$g^{(\phi)}=-\rho^n\Big(\sum_{k=1}^{n}\mu_k\Big)g,\ \det g^{(\phi)}=-\rho^2. \tag{3.13.32}$$

式中的 g 由(3.13.21)给出.

§3.14 度规系数 f 的计算

计算度规系数 $\tilde{f}$ 可分两步进行：第一步，将(3.13.21)得到的非物理解 g 代入(3.12.4)和(3.12.5)，然后求出 f. 第二步，在(3.12.4)和(3.12.5)中将 g 换为 $g^{(\phi)}$，从而得到 $f^{(\phi)}$.

与单孤立子解(3.13.22)～(3.13.27)对应的度规系数 f 以 f_1 表示，按上面的程序计算，得到

$$f_1=C_1f_0\rho\mu_1^2(\mu_1^2+\rho^2)^{-1}\Gamma_{11}. \tag{3.14.1}$$

式中 C_1 是任意常数，f_0 是初始解(背景度规系数)，与 g_0 对应，Γ_{11} 的表示式为

$$\Gamma_{11}=(\mu_1^2+\rho^2)^{-1}m_c^{(1)}(g_0)_{cb}m_b^{(1)}, \tag{3.14.2}$$

矢量 $m_a^{(1)}$ 由(3.13.14)得到($k=1$).

接着，把 g_1 和 f_1 当作初始解，重复上面的过程，得到与 2-孤立子解(极点 $\lambda=\mu_1$ 和 $\lambda=\mu_2$)相对应的度规系数 f_2. 这一过程实际上只要作些代数运算，积分只在由 $(g_0, f_0)\to(g_1, f_1)$ 的过程中用. 经过不复杂的代数运算，得到

$$f_2=C_2f_0\rho^2\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1^2+\rho^2)^{-1}(\mu_2^2+\rho^2)^{-1}(\Gamma_{11}\Gamma_{22}-\Gamma_{12}^2). \tag{3.14.3}$$

式中 C_2 是任意常数，f_0 即(3.14.1)中的背景解 Γ_{11} 和 Γ_{22}，Γ_{12} 即矩阵(3.13.16)的分量.

(3.14.1)和(3.14.3)告诉我们，在 n-孤立子的情况下，度规系数 f 应具有形式

$$f_n = C_n f_0 \rho^l \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k^2 \right) \left[\prod_{k=1}^{n} (\mu_k^2 + \rho^2) \right]^{-1} \det \Gamma_{kl}. \quad (3.14.4)$$

式中 k，$l=1$，2，…，n. 此式的证明我们在下节最后给出.

现在确定系数 $f_n^{(\phi)}$. 在式(3.12.4)和(3.12.5)中，将 g 代之以(3.13.32)中的 $g^{(\phi)}$，便得到 $f^{(\phi)}$. 首先由(3.12.6)和(3.13.31)得到 $U^{(\phi)}$ 和 $V^{(\phi)}$ 的表达式：

$$U^{(\phi)} = \rho g^{(\phi)}_{,\rho} g^{(\phi)-1} = U + \left[1 - \frac{1}{2} \rho (\ln \det g)_{,\rho} \right] I,$$

$$V^{(\phi)} = \rho g^{(\phi)}_{,z} g^{(\phi)-1} = V - \frac{1}{2} \rho (\ln \det g)_{,z} I.$$

将上式代入(3.12.4)和(3.12.5)中(替换 U 和 V)，得到

$$f_n^{(\phi)} = f_n \rho^{1/2} Q^{-1}. \quad (3.14.5)$$

式中 f_n 是按 g 计算的度规系数(3.14.4)，函数 Q 满足方程

$$(\ln Q)_{,z} = \frac{1}{4} \rho (\ln \det g)_{,\rho} (\ln \det g)_{,z},$$

$$(\ln Q)_{,\rho} = \frac{1}{8} \rho [(\ln \det g)^2_{,\rho} - (\ln \det g)^2_{,z}].$$

在上式中代入 $\det g$ 的表达式(3.13.30)，积分得

$$Q^{-1} = A \rho^{-(n^2+2n+1)/2} \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k \right)^{n-1} \times$$

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (\mu_k^2 + \rho^2) \prod_{k,l=1}^{n} (\mu_k - \mu_l)^2 \right]. \quad (3.14.6)$$

式中 A 为常数. 将(3.14.6)和(3.14.4)代入(3.14.5)，得到物理的度规系数 $f_n^{(\phi)}$ 的明显表达式：

$$f_n^{(\phi)} = C_n^{(\phi)} f_0 \rho^{-n^2/2} \left(\prod_{k=1}^{n} \mu_k \right)^{n+1} \times$$

$$\left[\prod_{k>l=1}^{n} (\mu_k - \mu_l)^2 \right]^{-1} \det \Gamma_{kl}. \quad (3.14.7)$$

我们给出乘积 $\prod_{k>l=1}^{n} (\mu_k - \mu_l)^2$ 的前几个表达式：

$$\prod_{k>l=1}^{n} (\mu_k - \mu_l)^2 =$$

$$\begin{cases} 1 & \text{当 } n=1; \\ (\mu_2^2-\mu_1^2)^2 & \text{当 } n=2; \\ (\mu_3-\mu_1)^2(\mu_3-\mu_2)^2(\mu_2-\mu_1)^2, & \text{当 } n=3; \\ \cdots & \cdots \end{cases}$$

(3.14.8)

n-孤立子解的最后形式为

$$\mathrm{d}s^2=f_n^{(\phi)}(\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2)+g_{ab}^{(\phi)}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b. \tag{3.14.9}$$

式中 $f_n^{(\phi)}$ 由式(3.14.7)给出，$g_{ab}^{(\phi)}$ 由式(3.13.32)和(3.13.21)给出.

作为普遍方法(孤立子方法)的应用，下面我们由平直度规生成 2-孤立子解和 n-孤立子解，它们将给出 Kerr-NUT 解和多个史瓦希源以及多极矩的解.

§3.15 平直时空背景上的 2-孤立子解

本节中仍取号差为(+2). 平直空-时度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+\rho^2\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}\rho^2+\mathrm{d}z^2, \tag{3.15.1}$$

即 $f_0=1$, $g_0=\mathrm{diag}(-1,\ \rho^2)$；显然有 $\det g_0=-\rho^2$. 容易得到 $V_0=0$, $U_0=\mathrm{diag}(0,\ 2)$. 代入(3.13.2)得到

$$\psi_0=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \rho^2-2z\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{3.15.2}$$

显然满足条件 $\psi_0(0)=g_0$. 由此式和(3.13.14)、(3.13.11)，容易得到

$$m_0^{(k)}=C_0^{(k)},\ m_1^{(k)}=C_1^{(k)}\mu_k^{-1}. \tag{3.15.3}$$

式中 $C_0^{(k)}$ 和 $C_1^{(k)}$ 是任意常数. 再把所得各式代入(3.13.16)，得到 Γ_{kl}：

$$\Gamma_{kl}=(-C_0^{(k)}C_0^{(l)}+C_1^{(k)}C_1^{(l)}\mu_k^{-1}\mu_l^{-1}\rho^2)(\rho^2+\mu_k\mu_l)^{-1}. \tag{3.15.4}$$

由(3.13.19)得到 $N_a^{(k)}$ 的表达式：

$$N_0^{(k)}=-C_0^{(k)},\ N_1^{(k)}=C_1^{(k)}\mu_k^{-1}\rho^2. \tag{3.15.5}$$

μ_k 由(3.13.12)给出. 至此，我们已获得构成 $f^{(\phi)}$ 和 $g^{(\phi)}_{ab}$ 所需要的全部量.

引入两个新的任意常数 z_1 和 σ 代替(3.13.11)和(3.13.12)中的 w_1 和 w_2：

$$w_1 \equiv z_1 + \sigma, \quad w_2 \equiv z_1 - \sigma, \tag{3.15.6}$$

引入坐标 r 和 θ 代替 ρ 和 z：

$$\rho \equiv [(r-m)^2 - \sigma^2]^{1/2}\sin\theta,\ z - z_1 = (r-m)\cos\theta. \tag{3.15.7}$$

式中 m 为任意常数. 由(3.13.12)可将 μ_k 用 r, θ 表示出来(根号前取负号)：

$$\mu_1 = 2(r-m+\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2},\ \mu_2 = 2(r-m-\sigma)\sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{3.15.8}$$

由上式和(2.15.5)求出 $N_a^{(1)}$ 和 $N_a^{(2)}$，由(3.15.4)求出 Γ_{kl} 和它们的逆矩阵 $D_{kl}(k, l=1, 2)$，然后由(3.13.32)和(3.13.21)求出 $g^{(\phi)}_{ab}$，由(3.14.7)得到 $f_2^{(\phi)}$，从而得到 $g_{\mu\nu}$. 再用一个简单的线性坐标变换，便得到 Boyer-Lindguist 坐标中的 Kerr-NUT 度规.

为了变到 B-L 坐标系(使 r 表示径向坐标)，我们令(3.15.3)中的任意常数满足条件

$$C_1^{(1)}C_0^{(2)} - C_0^{(1)}C_1^{(2)} = \sigma,\ C_1^{(1)}C_0^{(2)} + C_0^{(1)}C_1^{(2)} = -m. \tag{3.15.9}$$

引入两个任意常数 a 和 b：

$$C_1^{(1)}C_1^{(2)} - C_0^{(1)}C_0^{(2)} = -b, C_1^{(1)}C_1^{(2)} + C_0^{(1)}C_0^{(2)} = a. \tag{3.15.10}$$

由上二式可得

$$\sigma^2 = m^2 - a^2 - b^2. \tag{3.15.11}$$

最后得到度规(3.14.9)：

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \omega\Delta^{-1}dr^2 + \omega d\theta^2 - \omega^{-1}\{(\Delta - a^2\sin^2\theta)d\tau^2 - \\ & [4\Delta b\cos\theta - 4a\sin^2\theta(mr+b^2)]d\tau d\varphi + \\ & [\Delta(a\sin^2\theta + 2b\cos\theta)^2 - \sin^2\theta(r^2+b^2+a^2)^2]d\varphi\}. \end{aligned} \tag{3.15.12}$$

式中 $\quad \tau = t + 2a\varphi, \qquad (3.15.13)$

$$\omega \equiv r^2+(b-a\cos\theta)^2,\ \Delta \equiv r^2-2mr+a^2-b^2. \tag{3.15.14}$$

此即 Kerr-NUT 度规. 代入 $b=0$ 便得到 Kerr 度规. 这里, 只有 Kerr 解有物理意义($b=0$), $b\neq 0$ 时(3.15.12)不满足渐近平直条件.

在获得(3.15.8)时, 我们在(3.13.12)中对于 μ_1 和 μ_2 都取根号前为负号的情况, 如果对于 μ_1 和 μ_2, 根号前取不同符号, 不难证明, 也导致同一个度规.

现在我们用数学归纳法证明(3.14.4).

设(3.14.4)当 $n=m$ 时成立, 只须证明当 $n=m+1$ 时成立. 假设从初始解〔背景度规〕g_n, f_n, ψ_n 引入 m 个孤立子, 生成了新解 g_{n+m}, f_{n+m}, ψ_{n+m}, m 个孤立子对应于极点 $\lambda=\mu_{n+1}$, $\lambda=\mu_{n+2}$, $\cdots$, $\lambda=\mu_{n-m}$, 则有

$$f_{n+m}=C_{n+m}f_n\rho^{m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mu_{n+m}^2\right)\left[\prod_{k=1}^{m}(\mu_{n+m}^2+\rho^2)\right]^{-1}D_{n+m}. \tag{3.15.15}$$

式中 $D_{n-m}=\det\Gamma_{n+k,\,n-l}(k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$, 而

$$\Gamma_{n+k,\,n-l}=m_a^{(n+k)}(g_n)_{ab}m_b{}^{(n+1)}(\rho^2+\mu_{n+k}\mu_{n+l})^{-1}. \tag{3.15.16}$$

按(3.13.14)有

$$m_a^{(n+k)}=m_{c_0}^{(m-k)}[\psi_n^{-1}(\mu_{n+k},\ \rho,\ z)]ca. \tag{3.15.17}$$

由(3.13.4)和(3.13.3)有

$$\psi_n=[I+(\mu_i^2+\rho^2)\mu_n^{-1}(\lambda-\mu_n)^{-1}P_n]\psi_{n-1},$$

$$\psi_n^{-1}=\psi_{n-1}^{-1}[I-(\mu_n^2+\rho^2)(\rho^2+\lambda\mu_n)^{-1}P_n], \tag{3.15.18}$$

$$g_n=\psi_n(0)=[I-(\mu_n^2+\rho^2)\mu_n^{-2}P_n]g_{n-1}. \tag{3.15.19}$$

矩阵 P_n 由(3.13.22)得到:

$$P_n=l_c^{(n)}(g_{n-1})l_{ab}^{(n)}/c_f^{(n)}(g_{n-1})_{fd}l_d^{(n)}. \tag{3.15.20}$$

式中 l_a 定义为

$$l_a^{(n)}\equiv m_{c0}^{(n)}[\psi_{i-1}^{-1}(\mu_n,\ \rho,\ z)]_{ca}, \tag{3.15.21}$$

$$l_a^{(n+k)}\equiv m_{c0}^{(n+k)}[\psi_{n-1}^{-1}(\mu_{n-k},\ \rho,\ z)]_{ca}. \tag{3.15.22}$$

由(3.15.17), (3.15.18)和(3.15.20)可得

$$m_a^{(n+k)} = l_a^{(n+k)} - E_{n,n}^{-1} E_{n\ n+k} l_a^{(n)}. \tag{3.15.23}$$

式中 $$E_{n+\alpha\ n+\beta} \equiv l_c^{(n+\alpha)} (g_{n-1})_{cb} l_b^{(n+\beta)} (\rho^2 + \mu_{n+\alpha}\mu_{n+\beta})^{-1}$$

$$(\alpha,\ \beta = 0,\ 1,\cdots,\ m). \tag{3.15.24}$$

将(3.15.23)和(3.15.19)代入(3.15.16)中，得到

$$\Gamma_{n+k,\ n+l} = E_{n+k\ n+l} - E_{n\ n}^{-1} E_{n,\ n+k} E_{n\ n+l}. \tag{3.15.25}$$

由上式可得

$$\det E_{n+\alpha\ n+\beta} = E_{n,\ n} \det \Gamma_{n+k\ n+l}. \tag{3.15.26}$$

根据(3.14.1)和(3.14.2)有

$$f_n = C_n f_{n-1} E_{n\ n} \rho \mu_n^2 (\mu_n^2 + \rho^2)^{-1}. \tag{3.15.27}$$

将此式代入(3.15.15)并利用(3.15.26)和 $D_{n-m} = \det \Gamma_{n+k\ n+l}$，我们得到

$$f_{n+m} = \text{conts} \cdot f_{n-1} \rho^{m+1} \Big(\prod_{\alpha=0}^{m} \mu_{n+\alpha}^2 \Big) \times$$

$$\Big[\prod_{\beta=0}^{m} (\mu_{n+\beta}^2 + \rho^2) \Big]^{-1} \det E_{n+\alpha,\ n+\beta}. \tag{3.15.28}$$

将(3.15.24)、(3.15.21)和(3.14.22)代入(3.14.28)便得到与 g_{n+m}，f_{n+m}和 ψ_{n+m}对应的$(m+1)$-孤立子解(3.14.4). 至此，我们证明了式(3.14.4)的正确性.

§3.16 平直时空背景上的 n-孤立子解

本节我们研究一种类型的 n-孤立子解及其一般性质. 取平直空-时度规

$$ds^2 = -dt^2 + \rho^2 d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2 \tag{3.16.1}$$

为背景度规(初始解)，引入偶数个孤立子(极点 $\lambda = \mu_1$，μ_2，…，μ_n)，生成新解. 函数 μ_k 成对出现，以希腊字母 σ 标记，$\sigma = 1$，3，5，…，$n-1$. 这样，共有 $n/2$ 对极点$(\mu_\sigma,\ \mu_{\sigma+1})$.

为了使物理意义更明显，首先研究矩阵 g 为对角的这一特殊情况(静态 n-孤立子解). 为此，设(3.15.3)中的所有任意常数 $C_0^{(k)} = 0$，此时所有的 $m_0^{(k)} = 0$. 由(3.13.15)可得所有的 $n_0^{(k)} = 0$，

由(3.13.13)得到

$$R_k=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & n_1^{(k)}m_1^{(k)}\end{pmatrix}.$$

这表明(3.13.28)中的所有矩阵 P_k 具有形式

$$P_k=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

与(3.13.29)相符. 在这种情况下，由(3.13.28)和(3.13.32)得到

$$g_{00}^{(\phi)}=\rho^{-n}\prod_{k=1}^{n}\mu_k,\ g_{01}^{(\phi)}=0,\ g_{11}^{(\phi)}=-\rho^2/g_{00}^{(\phi)}. \tag{3.16.2}$$

要由(3.14.7)求 $f_n^{(\phi)}$，须先计算矩阵 Γ_{kl} 的行列式. 由于(3.16.2)很简单，可以直接由(3.12.4)和(3.12.5)积分，求得 $f_n^{(\phi)}$：

$$\begin{aligned}f_n^{(\phi)}=\ &\text{const}\cdot\rho^{(n^2+2n)/2}\Big[\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\Big]\times\\ &\Big(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\Big)^{1-n}\Big[\prod_{k=1}^{n}(\mu_k^2+\rho^2)\Big]^{-1}.\end{aligned} \tag{3.16.3}$$

现在由(3.13.11)和(3.13.12)确定函数 μ_k. 对于每一对极点 μ_σ 和 $\mu_{\sigma+1}$，我们取式中根号前相反的符号：

$$\begin{aligned}\mu_\sigma&=w_\sigma-z+[(w_\sigma-z)^2+\rho^2]^{1/2},\\ \mu_{\sigma+1}&=w_{\sigma+1}-z-[(w_{\sigma+1}-z)^2+\rho^2]^{1/2}.\end{aligned} \tag{3.16.4}$$

引入新的任意常数 z_σ 和 m_σ 代替 ω_σ 和 $\omega_{\sigma+1}$：

$$w_\sigma=z_\sigma-m_\sigma,\qquad w_{\sigma+1}=z_\sigma+m_\sigma. \tag{3.16.5}$$

对于每一对极点，引入一对函数 $r_\sigma(\rho,z)$ 和 $\theta_\sigma(\rho,z)$，作为它们的"径坐标"和"角坐标". 这 $\left(\dfrac{n}{2}\right)$ 对函数由下式定义：

$$\begin{aligned}\rho&=[r_\sigma(r_\sigma-2mr_\sigma)]^{1/2}\sin\theta_\sigma,\\ z-z_\sigma&=(r_\sigma-m_\sigma)\cos\theta_\sigma.\end{aligned} \tag{3.16.6}$$

这时由(3.16.4)得

$$\mu_\sigma = 2(r_\sigma - 2m_\sigma)\sin^2\frac{\theta_\sigma}{2},$$
$$\mu_{\sigma+1} = -2(r_\sigma - 2m_\sigma)\cos^2\frac{\theta_\sigma}{2}. \tag{3.16.7}$$

将上式代入(3.16.2)，得到

$$g_{00}^{(\phi)} = -\left(1-\frac{2m_1}{r_1}\right)\left(1-\frac{2m_3}{r_3}\right)\cdots\left(1-\frac{2m_{n-1}}{r_{n-1}}\right). \tag{3.16.8}$$

当 $n=2$(2-孤立子解)，式中只有一个因子，即史瓦希度规的 g_{00}. 这时由(3.16.3)求得 $f_2^{(\phi)}$，**得到的解 $g_{\mu\nu}$ 恰为史瓦希度规**. 这一结果表明，如果在 § 3.15 的 2-孤立子解的一般形式中，取任意常数满足条件 $C_0^{(1)}=C_0^{(2)}=0$(μ_k 式中根号前取相反的符号)，便可由 Kerr-NUT 解退化为史瓦希解.

为了分析 $g_{00}^{(\phi)}$的物理意义，必须选择径向坐标. 原则上 $r_\sigma(\rho, z)$中的任何一个都可以作为径向坐标. 但最自然的选择应该使引力势在远离系统的展开式中不含偶极矩. 由(3.16.8)可知，引力势 U 由下式给出：

$$2U = 1-\left(1-\frac{2m_1}{r_1}\right)\left(1-\frac{2m_3}{r_3}\right)\cdots\left(1-\frac{2m_{n-1}}{r_{n-1}}\right). \tag{3.16.9}$$

设"真空的"径向坐标和极角坐标由下式确定：

$$\rho = [r(r-2m)]^{1/2}\sin\theta,\quad z-z_0 = (r-m)\cos\theta. \tag{3.16.10}$$

上式与(3.16.6)形式相同，但是引入了新的常数 m 和 z_0. 由(3.16.10)和(3.16.6)可以求出 r_σ 和 θ_σ，并且可以按 r^{-1}展开(当 $r\to\infty$，在一级近似下得到 $r_\sigma=r$，$\theta_\sigma=\theta$). 将这些展开式代入(3.16.9)，由不存在偶极矩这一要求便可以确定 m 和 z_0. 用这一方法得到

$$m = \sum_{\sigma=1}^{n-1} m_\sigma,\quad z_0 = \left(\sum_{\sigma=1}^{n-1} m_\sigma z_\sigma\right)\Big/\sum_{\sigma=1}^{n-1} m_\sigma, \tag{3.16.11}$$
$$2U = 2mr^{-1} + Q(3\cos^2\theta-1)r^{-3}+\cdots.$$

式中 Q 为系统的四极矩. 当 $n=4$ 时(4-孤立子解)有

$$Q = m_1m_3[(z_1-z_3)^2-m^2](m_1+m_3)^{-1}.$$

这些结果表明，静态 n-孤立子解是在渐近平直空-时中的局

部扰动. 对于远处观察者，这样的场可以看作是由具有辐射对称性的 $n/2$ 个史瓦希质量源(位于局部)所产生的外部场. 这些源质量中第 σ 个具有质量 m_σ，位于 z_σ 处. 这些场源质量的质心公式和经典力学中的相同. 系统的四极矩也由常量 m_σ 和 z_σ 表示.

如果场源绕对称轴旋转，则矩阵 $g^{(\phi)}$ 不是对角的，$g_{01}^{(\phi)}\neq 0$. 在 $n=2$ 的特殊情况下，场源由静止过渡到绕对称轴转动，对应于由史瓦希度规过渡到克尔度规.

§ 3.17 两个 Kerr 解的迭加

前一节研究了以平直空-时度规为背景度规，引入 $\left(\frac{n}{2}\right)$ 对孤立子所获得的一类 n-孤立子解的一般性质. 本节将对 4-孤立子解的结构作进一步的分析. 为了讨论的方便，我们将某些符号和相应的表述作一些简化.

在 § 3.14 中，我们给出了由已知解 $g_0^{(\phi)}$ 生成新解 $g_n^{(\phi)}$ 的一般方法. 新解依赖于 n 个任意常数 w_k 和 n 个矢量 $C_k=(A_k, B_k)$[即矢量 $m_a^{(k)}$]. 极点 μ_k 为方程

$$\mu_k^2+2(w_k-z)\mu_k-\rho^2=0 \tag{3.17.1}$$

的一个根. 度规系数 f 的表达式为

$$f=C\rho^{\ n^2/2}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)^{n-1}\left[\prod_{k>l=1}^{n}(\mu_k-\mu_l)^2\right]^{-1}\det\Gamma_{kl}. \tag{3.17.2}$$

取背景度规为(3.15.1)时，Γ_{kl}的表达式为(3.15.4)：

$$\Gamma_{kl}=\frac{-A_kA_l+\rho^2B_kB_l\mu_k^{-1}\mu_l^{-1}}{\rho^2+\mu_k\mu_l}\quad (\text{对 } k,\ l \text{ 不取和}). \tag{3.17.3}$$

此时不难证明，g_{ab}可表示为

$$g_{ab}=\rho^{-n}\left(\prod_{k=1}^{n}\mu_k\right)\det\Gamma_{\alpha\ \beta}^{\ a\ b}/\det\Gamma_{ij}. \tag{3.17.4}$$

式中 $\Gamma^{a\,b}_{\alpha\,\beta}$是由矩阵 Γ_{kl}“扩展”得到的$(n+1)\times(n+1)$矩阵，定义如下：

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^{a\,b}_{kl}=\Gamma_{kl}(k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\\
&\Gamma^{0\,1}_{k\ n+1}=\Gamma^{0\,0}_{k\ n-1}=\Gamma^{0\,0}_{n+1\,k}=\mu_k^{-1}A_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\\
&\Gamma^{0\,1}_{n+1\,k}=\Gamma^{1\,1}_{k\ n+1}=\Gamma^{1\,1}_{n+1\,k}=\rho^2\mu_k^{-1}B_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).
\end{aligned}
\tag{3.17.5}
$$

孤立子的个数 n 为偶数时，生成解才具有物理意义(具有正确的号差)．在 2-孤立子的情况下，§3.15 给出了 Kerr-NUT 解族．这一解族包含的参量有质量 m，比角矩 a，物体的位置 z_0 和 NUT 参量 b(“磁体质量”)．这些参量和实常数 w_1、w_2、$(A_1,\ B_1)$、$(A_2,\ B_2)$之间的关系可以表示为

$$
\begin{aligned}
&m=(w_1-w_2)/2\cos(\alpha_1-\alpha_2),\\
&a=m\sin(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}(w_1-w_2)\mathrm{tg}(\alpha_1-\alpha_2),\\
&b=m\sin(\alpha_1+\alpha_2),\\
&\alpha_i\equiv\arctan(A_i/B_i).
\end{aligned}
\tag{3.17.6}
$$

仅当 $b=0$ 时新解才是渐近平直的．我们设 $w_1>w_2$，$0\leqslant A_i<B_i$，$0\leqslant\alpha_i<\dfrac{\pi}{4}$．仅当 $\alpha_2=-\alpha_1=\arctan(A/B)$时才有 $b=0$．这时有

$$
\begin{aligned}
&m=(w_1-w_2)(B^2+A^2)/2(B^2-A^2),\\
&a=AB(w_1-w_2)/(B^2-A^2).
\end{aligned}
\tag{3.17.7}
$$

由上述诸式可见，孤立子参量取实数值时，新解描述慢速转动情况：$a<m$．下面只研究这种情况．

我们要研究的 4-孤立子解对应于两个物理状态，分别由两组参量确定．(1) $w_4=-w_1$，$w_3=-w_2$，$w_1>|w_2|$，$C_1=C_3=(A,\ B)$，$C_2=C_4=(-A,\ B)$；(2) $w_4=-w_1$，$w_3=-w_2$，$w_1>|w_2|$，$C_1=C_4=(A,\ B)$，$C_2=C_3=(-A,\ B)$．对于所研究的情况($n=4$)，μ_k 的表达式(3.13.12)中根号前的正负号应这样选取：当 $k=$ 奇数时取负号，k 为偶数时取正号；其他的选择都不能生成有物理意义的解．

情况(1)的解是两个克尔解的非线性迭加，两个场源物体具

有相同的质量和相同的转矩(3.17.7). 情况(2)的两个场源物体的质量相同而转矩异号. 下面我们分析这些解在不同区域的行为.

(i) 在无限远处，由(3.17.4)和(3.17.5)，当 $r=\sqrt{\rho^2+z^2}\to\infty$时，$g_{00}=-1+o(r^{-1})$，$g_{01}=\alpha+\beta z/r+o(r^{-1})$，$g_{11}=\rho^2[1+o(r^{-1})]$. 参量 β 与 Kerr-NUT 解族中的 NUT 参量 b 相似，渐近平直条件要求 $\beta=0$. 由(3.17.4)和(3.17.5)可以得到 α 和 β 的表达式. 情况(1)：$\alpha=4AB(w_1-w_2)/(B^2-A^2)$，$\beta=0$；情况(2)：$\alpha=0$，$\beta=\left[\frac{(A^2+B^2)^2}{4w_1w_2}+\frac{(B^2-A^2)}{(w_1-w_2)^2}\right]^{-1}AB(A^2+B^2)\left(\frac{1}{w_1}+\frac{1}{w_2}\right)$. 在情况(2)中，$\beta=0$ 导致 $A=0$ 或 $B=0$，此时由(3.17.7)知 $a=0$，即不旋转. 即情况(2)与渐近平直条件矛盾. 下面我们只研究情况(1).

作变换 $t'=t-\nu p$，$\phi'=\varphi$. 式中 $\nu\equiv 4AB(w_1-w_2)/(B^2-A^2)$. 为了得到渐近平直解，应有 $f\to1$，由此确定(3.17.2)中的常数 C：

$$C=2^{12}w_1^2w_2^2(w_1-w_2)^4/(B^2-A^2)^4.$$

保留$\frac{M}{r}$阶项，得到度规 g_{ab}的表达式：

$$g_{00}=-1+\frac{2M}{r}+o(r^{-2}),\ M=(w_1-w_2)(B^2+A^2)/(B^2-A^2)=2m, \tag{3.17.8}$$

$$g_{01}=-\frac{4Ma}{r}\ \frac{\rho^2}{r^2}+o(r^{-2}),\ a=\frac{AB(w_1-w_2)}{B^2-A^2}.$$

由上式可知，系统的质量 M 等于两个物体质量之和，系统的转矩等于二物体转矩之和($Ma=2ma$).

(ii) 在对称轴的外部区域($0<\rho<\infty$). 由(3.17.2～4)可以发现，度规的奇异性只能出现在 $\rho=0$ 和 $\det\Gamma_{ij}=0$. 系统是辐射对称的，可以认为对称轴外的奇异性位于平面 $z=0$ 上. 这时 $\det\Gamma_{ij}$简化为

$$\det\Gamma_{ij}(\rho,0)=16\rho^8\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)^4(\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2)^{-4}\times$$
$$(\rho^4-\mu_1^4)^{-2}(\rho^4-\mu_2^4)^{-2}[AB\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}(\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2)-$$

$$\rho(A^2+\rho^2B^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1})(\mu_1-\mu_2)]^2[AB\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}\times$$
$$(\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2)+\rho(A^2+\rho^2B^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1})(\mu_1-\mu_2)]^2. \quad (3.17.9)$$

由上式可知 $\det\Gamma_{ij}\geqslant 0$. $\det\Gamma_{ij}=0$ 只可能使上式右端后两个因子等于零. 又因为

$$\mu_1\mu_2<0,\ \mu_1-\mu_2<0,$$

$$|\mu_1\mu_2|=\rho^2\left|\frac{w_2+\sqrt{w_2^2+\rho^2}}{w_1+\sqrt{w_1^2+\rho^2}}\right|<\rho^2,$$

所以
$$F(k,\rho)\equiv k(\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2)-\rho(k^2\mu_1\mu_2+\rho^2)(\mu_2-\mu_1)=0,$$
$$k\equiv A/B.$$

$F(k,\rho)$是 k 的二次三项式，二次项系数$-\rho(\mu_1-\mu_2)\mu_1\mu_2<0$. $k=0$时有

$$F(0,\rho)=-\rho^2(\mu_2-\mu_1)<0.$$

$k=1$ 时有

$$F(1,\rho)=\rho^4-\mu_1^2\mu_2^2-\rho(\mu_1\mu_2+\rho^2)(\mu_2-\mu_1)=$$
$$(\rho^2+\mu_1\mu_2)(\rho+\mu_1)(\rho-\mu_2).$$

由于
$$\rho^2+\mu_1\mu_2>0,\ \rho+\mu_1=\omega_1+\rho-\sqrt{w_1^2+\rho^2}>0,$$

所以 $F(1,\rho)$的符号决定于 $\rho-\mu_2=\rho-w_2-\sqrt{w_2^2+\rho^2}$的符号，即决定于 w_2 的符号. 因此

$$F(1,\rho)<0,\ \text{当}\ w_2>0,$$
$$F(1,\rho)>0,\ \text{当}\ w_2<0.$$

$w_2=0$ 时得到克尔解($M=2m$, $Ma=2ma$).

考虑到 F 是 k 的二次函数，由上面的分析可知，当 $w_2>0$ 时，在对称轴外的平面 $z=0$ 上 $\det\Gamma_{ij}\neq 0$，度规没有奇点. 当 $w_2<0$时，有奇点(环)$\rho(a)$.

$$\rho(a)\to\infty\quad \text{当}\ a\to m,$$
$$\rho(a)\to 0\quad \text{当}\ a\to 0.$$

在奇点 $\rho(a)$，曲率标量为无限大. 因此，$w_2<0$ 时的物理图像和 Tomimatsu-Sato 解的一样. 在我们所研究的解中令 $w_2\to w_1$，便

得到 T-S 解.

在平面 $z=0$ 以外，在一般情况下 $\det\Gamma_{ij}$的恒正性没有证明. 但是如果 $w_2>0$，则可以证明当 $k=A/B$ 的值足够小(即转矩足够小)时，轴外不存在奇点.

(iii) 在轴附近的区域. 首先考虑 $w_2>0$ 的情况. 在轴上有五个不同区域，如图所示



图 3-2

a) 区域 I. 当 $z=\rho=0$ 时，度规为

$$g_{00}=-\frac{(A^2w_1-B^2w_2)^2}{(A^2w_2-B^2w_1)^2},$$

$$g_{01}=2AB\frac{(w_1-w_2)^2(A^2w_1-B^2w_2)(B^2+A^2)}{(A^2w_2-B^2w_1)^2(B^2-A^2)},$$

$$g_{11}=-4A^2B^2\frac{(w_1-w_2)^4}{(A^2w_2-B^2w_1)^2}\left(\frac{B^2+A^2}{B^2-A^2}\right)^2.$$

当 $A\neq 0$ 时，$g_{\varphi\varphi}=g_{11}<0$. 即在轴附近有一些闭合的类时曲线. Carter(1968)证明了，在这种情况下通过空间任何一点都有一类时的闭合环，而且不可能用普通空间区域的单连通复盖将闭合环打开. 因此，因果条件被破坏. 即在区域 I 中度规是奇异的，而且不允许从 $\rho>0$ 的区域延拓到区域 I 的邻域.

b) 区域 II. 度规系数 f 和 g_{ab}有正常的行为，并且 f，g_{00}和 g_{11}都是正的(当 $z=w_k$，$\rho=0$ 时有 $g_{ab}=0$). 变换到建立在一个物体上的球坐标系(r,θ)：

$$=[(r-m)^2-\sigma^2]^{1/2}\sin\theta,\ z=z_0+(r-m)\sin\theta.$$

式中 $\quad\sigma=\frac{1}{2}(w_1-w_2),\ z_0=\frac{1}{2}(w_1+w_2),$

度规变为 $\mathrm{d}s^a=\tilde{g}_{ab}(r,\theta)\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b+$

$$\tilde{f}[(r-m)^2-\sigma^2\cos^2\theta]\left\{\frac{\mathrm{d}r^2}{(r-m)^2-\sigma^2}+\mathrm{d}\theta^2\right\},$$

$$\tilde{g}_{ab}(r, \theta)=g_{ab}(\rho(r, \theta), z(r, \theta)),$$
$$\tilde{f}(r, \theta)=f(\rho(r, \theta), z(r, \theta)).$$

由 f 和 g_{ab}的表达式可知，在 $\rho=0$ 的邻域内按 ρ 展开时，展开式中只含 ρ 的偶次项，所以在面$(r-m)-\sigma=0$(与区域 Ⅱ 对应的一段)的邻域内，$\tilde{g}_{ab}$和$\tilde{f}$是 r 和 θ 的解析函数. 这个面是零面.

区域Ⅲ和区域Ⅱ的情况相同.

区域Ⅳ和Ⅴ中，$g_{00}\sim\rho^0$，$g_{01}\sim\rho^2$，$g_{11}\sim\rho^2$，$f\sim\rho^0$，所以在这两个区域中度规是正常的. 这时由(3.12.4～5)可知 $\rho^2 f g_{11}^{-1}=$ const$=1$，从而得到空-时是局部平直和正常的.

当 $w_2<0$(且转矩 $a\neq0$)时，解的行为与 $w_2>0$ 时没有本质区别. 其中，当 $z=0$，有 $g_{11}=-(4B^2/A^2)(w_1-w_2)^2$，即存在许多闭合的类时曲线. 我们指出，当转矩 $a=0$ 时，在区域Ⅰ中，$w_2>0$ 和 $w_2<0$ 两种情况是根本不同的.

Sato(1978)对 T-S 解性质的分析是不完全的，因为没有给出在区域Ⅰ的轴上存在裸奇点的结论. 所谓裸奇点，就是不被视界面包围的内禀奇点. 我们发现，对于所讨论的旋转场源的所有解，在对称轴上，曲率标量都是正常的(见第 5 篇).

在所研究的 4-孤立子解中，包括一些渐近平直的、在轴外无奇点的解. 但是所有这些解(除了在极限情况下得到的克尔度规)在一段有限长的轴上都有裸奇点. 很自然地假设，在所有 n-孤立子解中，只有 2-孤立子解(即 Kerr 度规)没有裸奇点.

4 旋转引力效应

旋转现象经常展现出有趣的和内禀的物理效应. 在存在奇异性的广义相对论框架内更是如此. 惯性系拖动是一个常被归于时空结构的典型旋转引力效应. 这类效应可通过对试验物体轨道的几何描述揭示出来，也可在陀螺进动的相关现象中表现出来.

本章利用第一章中的几个解，讨论相应时空中的陀螺进动问题，以期揭示时空的某些几何性质.

§4.1 陀螺进动的 Frenet-Serret 描述

我们用 F-S 形式表征 4 维时空的 Killing 轨迹，其中的三个几何参数，曲率等同于试验物体的加速度，两个挠率则与陀螺进动直接相关. 同时，F-S 标架提供了一个描述相关物理现象的方便的参考系. 因此用这个形式研究具有时空对称性的类时积分曲线，可以以自然而优美的方式对陀螺进动做完整的分析和讨论.

F-S 形式(用于 Killing 轨道)可以直接推广到准 Killing 线汇中去. 该线汇由非常系数的 Killing 矢量组合构成. 一个重要的例子是 Kerr 时空中的无旋线汇. 借助于这个扩展的形式，可以对不同条件下的陀螺进动进行研究.

本节和下面几节我们将讨论(i)应用于准 Killing 轨道的 F-S 形式，沿该轨道运动的陀螺的进动以及它们与线汇涡度的关系；(ii)稳态轴对称时空，且主要集中于整体类时 Killing 轨道，特别是对于 Kerr 时空，给出一个惯性系拖动的直接证明；(iii)采用旋转坐标系，考察一个沿圆轨道以任意常数角速度运动的陀螺进

动，然后通过连续的具体化，得到 Schiff 进动，以 Fokker-de Sitter 进动为特例的史瓦希时空中的进动，闵可夫斯基时空中的 Thomas 进动. 讨论无旋线汇，得到相应轨道的 F-S 参数. 把一般形式应用于 de Sitter 时空；(iv)细致地处理稳态柱对称时空的一般情况，该时空中一般的准 Killing 轨道是螺旋线，做为特例，讨论 Godel 时空和一般的真空度规.

从 Thomas 开始，在广义相对论和狭义相对论中许多作者讨论过引力场中的进动现象. 本节和后几节给出一个统一的，协变的，几何处理方案，用一个直接的和完整的方式进行推导. 这里空时指标用拉丁字母代表，取值 0，1，2，3. 而空间指标用希腊字母表示，取值 1，2，3. 相应的标架指标加上括号：(a)，(b)，…[(α)，(β)，…].

§4.2 准 Killing 轨道

1. Frenet-Serret 形式

考虑具有类时 Killing 矢量 ξ 和一组类空 Killing 矢量 $\eta(A)$ $(A=1, 2, \cdots, m)$的时空. 组合

$$\chi^a\equiv\xi^a+\omega(A)\eta^a(A) \tag{4.2.1}$$

称为准 Killing 矢量，式中第二项表示对(A)取和，且有

$$\mathop{\mathscr{L}}_{\chi}\omega(A)=0. \tag{4.2.2}$$

如果 χ^a 是类时的，且有

$$e^a_{(0)}\equiv u^a\equiv e^\psi\chi^a, \tag{4.2.3}$$

则
$$e^{-2\psi}=\chi_a\chi^a,\ \psi_{,a}\chi^a=0, \tag{4.2.4}$$

和
$$\dot e^a_{(0)}\equiv e^a_{(0);b}e^b_{(0)}=F^a{}_b e^b_{(0)}, \tag{4.2.5}$$

式中
$$F_{ab}\equiv e^\psi(\xi_{a;b}+\omega(A)\eta(A)_{a;b}). \tag{4.2.6}$$

利用 Kiling 方程和对任意 Killing 矢量都成立的关系式

$$\xi_{a;b;c}=R_{abcd}\xi^d$$

容易证明

$$F_{ab}=-F_{ba}, \quad \dot{F}_{ab}=0. \tag{4.2.7}$$

F-S 方程[27, 28]为

$$\begin{aligned}
&\dot{e}^a_{(0)}=\kappa e^a_{(1)},\\
&\dot{e}^a_{(1)}=k e^a_{(0)}+\tau_1 e^a_{(2)},\\
&\dot{e}^a_{(2)}=-\tau_1 e^a_{(1)}+\tau_2 e^a_{(3)},\\
&\dot{e}^a_{(3)}=-\tau_2 e^a_{(2)}.
\end{aligned}\tag{4.2.8}$$

式中 k 是曲率，τ_1，τ_2 是第一和第二挠率. F-S 方程(4.2.8)和(4.2.5～7)表明，沿着 χ^a，F-S 标量 κ，τ_1，τ_2 是常数，F-S 基矢量 $e^a_{(i)}$满足方程

$$\dot{\kappa}=\dot{\tau}_1=\dot{\tau}_2=0, \tag{4.2.9}$$

$$\dot{e}^a_{(i)}=F^a_b e^b_{(i)}. \tag{4.2.10}$$

注意这里 $F_{ab}\neq e^\psi \chi_{a;b}$. 我们有

$$\kappa^2=F^2_{ab}e^a_{(0)}e^b_{(0)}, \tag{4.2.11}$$

$$\tau_1^2=\kappa^2-\frac{F^4_{ab}e^a_{(0)}e^b_{(0)}}{\kappa^2}, \tag{4.2.12}$$

$$\tau_2^2=-\frac{(\kappa^2-\tau_1^2)^2}{\tau_1^2}+\frac{F^6_{ab}e^a_{(0)}e^b_{(0)}}{\kappa^2\tau_1^2}. \tag{4.2.13}$$

式中 $$(F^n)_{ab}\equiv F^{a_1}_a F^{a_2}_{a_1}\cdots F_{a_{n-1}b} \tag{4.2.14}$$

另外，我们还有

$$\alpha\equiv\frac{1}{2}F^a_b F^b_a=\kappa^2-\tau_1^2-\tau_2^2. \tag{4.2.15}$$

在讨论下一步之前，我们先考虑由(4.2.1)给出的准 Killing 线汇. 在稳态轴对称时空中，η 可以选为轴向 Killing 矢量，而 ω 为 r 和 θ 的任意函数. 例如，可以选择 ω，使线汇是短程线汇或者是无旋线汇. 从空间上说，这些将代表圆轨道. 在柱对称时空中，除了轴向 Killing 矢量以外，我们还可以加上产生 z 向平移的 Killing 矢量，系数为坐标 ρ 的任意函数. 从空间上说，这些将代表螺旋轨道. 在允许其他空间 Killing 矢量的时空中，如 de Sitter 和 Godel 时空，可以产生更复杂的 Killing 轨道. 但是沿着任何特定的属于 Killing 线汇的轨道，ω 都保持为一常数.

2. Frenet-Serret 挠率和陀螺进动

对于沿着任意世界线运动的观测者，运动规律可写为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}(e^a_{(i)}) = -\Omega^a_b e^b_{(i)}. \tag{4.2.16}$$

Ω 分解为 Fermi-Walker 部分和空间转动部分：

$$\Omega^{ab} = \Omega^{ab}_{(FW)} + \Omega^{ab}_{(SR)},$$

$$\Omega^{ab}_{(FW)} \equiv a^a u^b - a^b u^a,$$

$$\Omega^{ab}_{(SR)} \equiv u_c \omega_d \epsilon^{cdab}. \tag{4.2.17}$$

式中 ω 是与四维速度正交的矢量．可以选择标架的时间轴，沿着世界线的四维速度方向．如果一个标架系 $f_{(b)}$ 沿着同样的世界线做 F-W 移动，则空间 3 矢 $e_{(a)}$ 相对于空间 3 矢 $f_{(a)}$ 以角速度 ω 转动，即

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}\tau}(e_{(\mu)} - f_{(\mu)}) = \omega \times e_{(\mu)}. \tag{4.2.18}$$

将 F-S 方程(4.2.8)与(4.2.16～18)比较，容易证明，F-S 系相对于 F-W 系以角速度

$$\omega_{(FS)} = \tau_2 e_{(1)} + \tau_1 e_{(3)}. \tag{4.2.19}$$

转动

F-W 系在物理上由一陀螺实现，因而相对于 F-S 系的进动由 $-\omega_{(FS)}$ 给出：

$$\Omega_{(g)} = -\omega_{(FS)} = -(\tau_2 e_{(1)} + \tau_1 e_{(3)}). \tag{4.2.20}$$

进一步，用 F-S 方程(4.2.8)可以证明

$$\omega^a_{(FS)} = \tilde{F}^{ab} e_{(0)b}. \tag{4.2.21}$$

式中 $\tilde{F}^{ab} \equiv \frac{1}{2\sqrt{-g}} \epsilon^{abcd} F_{cd}$

是 F_{cd} 的对偶张量．我们称 $\omega_{(FS)}$ 为 F-S 转动．应当注意，$\omega_{(FS)}$ 是沿着一条给定曲线定义的，不受存在线汇的约束，它给出 F-S 系相对于 F-W 系的转动．

由式(4.2.8)和(4.2.10)，我们有

$$\kappa e^a_{(1)} = F^a_b e^b_{(0)}, \tag{4.2.22}$$

此式表明，与电磁场类比，$F^a_b e^b_{(0)}$ 可以解释为具有 4 速度的观测者所看到的引力电场．方程(4.2.18)和(4.2.21)与电磁的“自旋进动”方程类比，表明 $\tilde{F}^{ab} e_{(0)b}$ 是相应的引力磁场．

3. 涡度和陀螺进动

我们可以把一个给定的轨道看做某曲线线汇中的一条曲线. 在几何上，线汇的涡度用来度量线汇的扭量. 沿着一个轨道的陀螺进动与线汇的涡度有关. 本节在一些细节上讨论这个关系. 可以证明，对于 Killing 线汇中一个轨道，F-S 旋度等于线汇的涡度. 相应地，沿一个 Killing 轨道的陀螺进动由 Killing 线汇的涡度确定.

下面我们将看到，在这方面，准 Killing 轨道不同于 Killing 轨道. 线汇的涡度定义为

$$\Omega^a \equiv \frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}e_{(0)b}e_{(0)c;d}=$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}e_{(0)b}[F_{cd}+e^{\psi}\omega_{(A),d}\eta_{(A)c}]= \qquad (4.2.23)$$

$$\omega^a_{(FS)}+\tilde{D}^{ab}e_{(0)b}. \qquad (4.2.24)$$

式中 $$\tilde{D}^{ab}=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}D_{cd},$$

$$D_{cd}\equiv e^{\psi}\omega_{(A)[d}\eta^{(A)}_{c]}. \qquad (4.2.25)$$

我们知道，在物理上，涡度 Ω^a 表示固连矢量相对于沿着线汇作 F-W 移动的一个正交空间标架的角速度. 另一方面，F-S 旋转 $\omega^a_{(FS)}$表示内禀的 F-S 系相对于无旋转的 F-W 系的进动. 在准 Killing 的情况下，一般说来两者是不一样的. 沿着准 Killing 轨迹的陀螺进动不同于对应的准 Killing 线汇的固连矢量的旋转. 但是由(4.2.23)可知，如果 $\omega_{(A)}$是常数，则线汇 χ^a 变成 Killing 线汇，$\Omega^a=\omega^a_{(FS)}$，陀螺进动与固连矢量的旋转一致.

上面两种情况(Killing 和准 Killing)的不同，也可以通过两种情况下沿 $e_{(0)}$的基矢量 lie 导数来理解. 在 Killing 情况下有

$$\mathop{\mathscr{L}}_{e_{(0)}} e_{(a)}=\kappa e_{(0)}\delta^{(1)}_{(a)}. \qquad (4.2.26)$$

F-S 系沿 $e_{(0)}$被 Lie 拖动. 另一方面，在准 Killing 情况下有

$$\mathop{\mathscr{L}}_{e_{(0)}} e_{(a)}=\kappa e_{(0)}\delta^{(1)}_{(a)}+e^{\psi}(\mathop{\mathscr{L}}_{e_{(a)}}\omega_{(A)})\times$$

$$[(\eta_{(A)}\cdot e_{(0)})e_{(0)}-\eta_{(A)}], \qquad (4.2.27)$$

F-S 系沿 $e_{(0)}$ 不被 Lie 拖动. 但是由定义可知, 固连矢量总是被 Lie 拖动的, 即

$$\mathscr{L}_{e_{(0)}} c = 0. \tag{4.2.28}$$

下面, 作为应用, 我们讨论几个特殊情况.

§4.3 稳态轴对称时空

现在, 我们具体到稳态轴对称时空. 这样的时空除了类时 Killing 矢量 ξ 以外, 还有类空 Killing 矢量 η. 进一步假定正交传递性, 在对应于 Killing 矢量 ξ 和 η 的坐标系中, 一般形式的度规可以写为

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{03}dtd\phi + g_{33}d\phi^2 + g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2. \tag{4.3.1}$$

式中 g_{ab} 只是 r 和 θ 的函数.

度规的逆变分量可以由

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 = \frac{g_{33}}{\Delta_3}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - 2\left(\frac{g_{03}}{\Delta_3}\right)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{g_{00}}{\Delta_3}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^2 + \frac{1}{g_{11}}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{g_{22}}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2. \tag{4.3.2}$$

式中

$$\Delta_3 \equiv g_{00}g_{33} - g_{03}^2, \tag{4.3.3}$$

$$\det g_{ab} \equiv g = g_{11}g_{22}\Delta_3. \tag{4.3.4}$$

采用式(4.2.11)~(4.2.13)和(4.3.1)~(4.3.4), 经过直接计算, 可以得到沿类时 Killing 矢量 ξ 的 F-S 不变量:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{4}g^{ab}(\ln g_{00})_{,a}(\ln g_{00})_{,b} = -\frac{1}{4g_{00}^2}[g^{11}g_{00,1}^2 + g^{22}g_{00,2}^2], \tag{4.3.5}$$

$$\tau_1^2 = \frac{g_{03}^2}{4\Delta_3}\frac{[g^{ab}g_{00,a}(\ln\frac{g_{03}}{g_{00}})_{,b}]^2}{[g^{ab}g_{00,a}g_{00,b}]}, \tag{4.3.6}$$

$$\tau_2^2 = \frac{1}{4\Delta_3 g_{11}g_{22}}\frac{[g_{00,1}g_{03,2} - g_{00,2}g_{03,1}]^2}{[g^{ab}g_{00,a}g_{00,b}]}. \tag{4.3.7}$$

在这种情况下, F-S 基由下式给出:

$$e_{(0)}^{a}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(1,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$e_{(1)}^{a}=-\frac{1}{2\kappa g_{00}}(0,\ g^{11}g_{00,1},\ g^{22}g_{00,2},\ 0),$$

$$e_{(2)}^{a}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}\sqrt{-\Delta_3}}(-g_{03},\ 0,\ 0,\ g_{00}),$$

$$e_{(3)}^{a}=\frac{\sqrt{g^{11}g^{22}}}{2\kappa g_{00}}(0,\ -g_{00,2},\ g_{00,1},0). \tag{4.3.8}$$

式(4.3.5)～(4.3.8)完全地描述了一个稳态观测者的世界线以及由他携带的陀螺的进动. κ 和 τ_1 取正的，τ_2 取(4.3.7)右边正的平方根，以使 $e_{(1)}$，$e_{(2)}$和 $e_{(3)}$构成一个右手系 3 基矢. 我们现在把这些公式用于 Kerr 时空的特殊情况.

Kerr 时空的度规为

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)\mathrm{d}t^2-\frac{\Sigma}{\Delta}\mathrm{d}r^2-\Sigma\mathrm{d}\theta^2+\frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma}\mathrm{d}\phi\mathrm{d}t-\left(r^2+a^2+\frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2, \tag{4.3.9}$$

式中　　$\Delta\equiv r^2+a^2-2Mr$；$\Sigma\equiv r^2+a^2\cos^2\theta$.

将此度规代人(4.3.5)～(4.3.8)，得到

$$\kappa^2=\frac{M^2}{\Sigma^5}(\Delta\epsilon^2+4r^2a^4\cos^2\theta\sin^2\theta)\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)^2}, \tag{4.3.10}$$

$$\tau_1^2=\frac{M^2a^2\sin^2\theta}{\Sigma}\ \frac{\Delta}{\left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)^2}\times\frac{1}{(\Delta\epsilon^2+4r^2a^4\cos^2\theta\sin^2\theta)}, \tag{4.3.11}$$

$$\tau_2^2=\frac{4M^2a^2r\ \cos^2\theta\epsilon^2}{\Sigma^3}\cdot\frac{1}{(\Delta\epsilon^2+4r^2a^4\cos^2\theta\sin^2\theta)}. \tag{4.3.12}$$

式中 $\epsilon\equiv r^2-a^2\cos^2\theta$,

$$e_{(0)}^{a}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2Mr}{\Sigma}}}(1,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$e^a_{(1)}=\frac{1}{\sqrt{\Sigma(\Delta c^2+4r^2a^4s^2c^2)}}(0,\ \Delta c,\ -2ra^2sc,\ 0),$$

$$e^a_{(2)}=\frac{1}{s\sqrt{\Delta\left(1-\dfrac{2Mr}{\Sigma}\right)}}\times\left[-\frac{2Mras^2}{\Sigma},\ 0,\ 0,\ \left(1-\frac{2Mr}{\Sigma}\right)\right],$$

$$e^a_{(3)}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\Sigma}{\Delta}(\Delta c^2+4r^2a^4s^2c^2)}}(0,\ 2ra^2sc,\ c,\ 0),\quad (4.3.13)$$

$s\equiv\sin\theta$, $c\equiv\cos\theta$.

式(4.3.10)～(4.3.13)表明，具有固定空间坐标的观测者(即世界线沿着 t 线)，不仅有加速度($\kappa\neq0$)，而且相对于非转动(由一组陀螺指示)的局部标准系有一角速度. 这证明了 Kerr 时空中的拖动现象. 对于赤道面上的观测者$\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$，(4.3.11)～(4.3.12)退化为

$$\tau_1=\frac{Ma}{r^3}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},\quad (4.3.14)$$

$$\tau_2=0.\quad (4.3.15)$$

因为稳态观测者的基矢量沿 Killing 轨道是 Lie 拖动的，所以它们总指向固定的恒星. 它们可以由一组瞄准遥远恒星的望远镜来具体化. 这些基矢量可以构成确定稳态观测者的 Killing 线汇的固连矢量. 因此稳态观测者将发现. 陀螺以(每单位本征时间)角速度 $-\tau_1$ 相对于遥远恒星进动. 下面，我们讨论由一个稳态观测者在固连于它的静止参考系中测得的由它携带的沿圆轨道运动的陀螺的进动. 为了测量一个稳态观测者携带的陀螺的进动，应该考虑由上面提到的拖动引起的进动. 当然，对于静态时空，静态观测者(瞄准遥远恒星)，陀螺并不进动.

值得指出的是，离开赤道平面时，并不涉及额外的计算. 因此，我们可以给在所有情况下的一般表达式.

§4.4 旋转坐标和圆轨道陀螺的进动

前面已指出，当观测者的世界线为一稳态时空中类时 Killing 矢量的积分曲线时，我们可以算出 κ，τ_1，τ_2. 该观测者位于确定的$(\gamma, \theta, \varphi)$处. 本节我们证明采用"旋转"坐标，可以把上节中的表达式推广到准 Killing 线汇（这线汇代表沿圆轨道以任意常数角速度运动的观测者的世界线）. 这表明 Rindler 方法和 Perlick 方法是一致的.

由对应于 Killing 矢量 ξ 和 η 的度规(9.3.1)出发，注意到当 ω 为常数时，$\xi+\omega\eta$ 也是一个 Killing 矢量. 通过坐标变换

$$\phi=\phi'+\omega t', \; t=t', \tag{4.4.1}$$

可以得到与 $\xi'\equiv\xi+\omega\eta$ 对应的坐标系，此时度规变为

$$ds^2=g_{0'0'}dt'^2+2g_{0'3'}d\phi dt'+g_{3'3'}d\phi'^2+g_{11}dr^2+g_{22}d\theta^2, \tag{4.4.2}$$

式中 $$g_{0'0'}=g_{00}+2\omega g_{03}+\omega^2 g_{33}\equiv A, \tag{4.4.3}$$

$$g_{0'3'}=g_{03}+\omega g_{33}\equiv\mathscr{B}, \tag{4.4.4}$$

$$g_{3'3'}=g_{33}. \tag{4.4.5}$$

$\xi'=(1, 0, 0, 0)$是这个度规的 Killing 矢量. 应用(4.3.5)～(4.3.7)，可以得到沿这个世界线的 κ，τ_1，τ_2. 又由于 ξ' 对应于 $\xi+\omega\eta$（在无撇的坐标系中），所以我们可以在(4.3.10)～(4.3.12)中用 $g_{0'0'}$，$g_{0'3'}$，$g_{3'3'}$ 分别代换 g_{00}，g_{03}，g_{33}，计算沿轨迹 $\xi+\omega\eta$ 的 κ，τ_1，τ_2. 更重要的是，当 ω 不是常数，仅满足 $\mathscr{L}_\chi\omega=0$ 的情况下，这个表述仍然成立. 只要注意到 F-S 不变量在准 Killing 情况下不涉及 ω 的导数，便可得到上述结论. 可以证明，不论由 $\xi+\omega\eta$ 出发，还是用 ξ 的表达式，把 ω 作为常数，以 $g_{a'b'}$ 代替 g_{ab}，都可以得到相同的 κ，τ_1，τ_2 的表达式. 因此，沿着 $\xi+\omega\eta$ 的轨迹，我们得到

$$\kappa^2=-\frac{1}{4}\frac{(g^{11}\mathscr{A}^2_{(1)}+g^{22}\mathscr{A}^2_{(2)})}{\mathscr{A}^2}, \tag{4.4.6}$$

$$\tau_1^2=\left(\frac{\mathscr{B}^2}{4\Delta_3(g^{11}\mathscr{A}_{(1)}^2+g^{22}\mathscr{A}_{(2)}^2)}\right)\times$$
$$\left(\frac{g^{11}\mathscr{A}_{(1)}\mathscr{B}_{(1)}+g^{22}\mathscr{A}_{(2)}\mathscr{B}_{(2)}}{\mathscr{B}}-\right.$$
$$\left.\frac{g^{11}\mathscr{A}_{(1)}^2+g^{22}\mathscr{A}_{(2)}^2}{\mathscr{A}}\right)^2, \tag{4.4.7}$$

$$\tau_2^2=\frac{g^{11}g^{22}(\mathscr{A}_{(1)}\mathscr{B}_{(2)}-\mathscr{A}_{(2)}\mathscr{B}_{(1)})^2}{4\Delta_3(g^{11}\mathscr{A}_{(1)}^2+g^{22}\mathscr{A}_{(2)}^2)}. \tag{4.4.8}$$

式中
$$\mathscr{A}_{(a)}\equiv g_{00,a}+2\omega g_{03,a}+\omega^2 g_{33,a},\ a=1,2, \tag{4.4.9}$$
$$\mathscr{B}_{(b)}\equiv g_{03,b}+\omega g_{33,b},\quad b=1,2. \tag{4.4.10}$$

为了得到与 χ 相连的标架，只要在式(4.3.8)中用 g_{ab} 代替 g_{ab}，就得到带撇系中的F-S标架. 通过一个矢量变换，便可得到不带撇系中的分量. 最后我们得到

$$e_{(0)}^a=\frac{1}{\sqrt{\mathscr{A}}}(1,0,0,\omega),$$
$$e_{(1)}^a=-\frac{1}{2\kappa\mathscr{A}}(0,g^{11}\mathscr{A}_{(1)},g^{22}\mathscr{A}_{(2)},0),$$
$$e_{(2)}^a=\frac{1}{\sqrt{\mathscr{A}}\sqrt{-\Delta_3}}(B,0,0,-C),$$
$$e_{(3)}^a=\frac{\sqrt{g^{11}g^{22}}}{2\kappa\mathscr{A}}(0,-\mathscr{A}_{(2)},\mathscr{A}_{(1)},0). \tag{4.4.11}$$

式中 $\mathscr{A}\equiv g_{00}+\omega g_{03}$.

为了后面的讨论，我们写出对偶基的表达式：

$$\omega^{(0)}=\frac{1}{\sqrt{\mathscr{A}}}[\mathscr{C}\mathrm{d}t-\mathscr{B}\mathrm{d}\phi],$$
$$\omega^{(1)}=\frac{1}{2\kappa\mathscr{A}}[\mathscr{A}_{(1)}\mathrm{d}r+\mathscr{A}_{(2)}\mathrm{d}\theta],$$
$$\omega^{(2)}=\sqrt{\frac{-\Delta_3}{\mathscr{A}}}[\omega\mathrm{d}t-\mathrm{d}\phi],$$
$$\omega^{(3)}=\frac{1}{2\kappa\mathscr{A}}\left[\sqrt{\frac{g_{22}}{g_{11}}}\mathscr{A}_{(2)}\mathrm{d}r-\sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}}}\mathscr{A}_{(1)}\mathrm{d}\theta\right]. \tag{4.4.12}$$

现在，我们把上面的公式应用于各种特殊情况，并修正已知的陀螺进动. 许多公式是一般的，离开赤道面也有效. 同时，诸

公式用统一的框架表述.

1. Kerr 场

(1) 一般情况

首先讨论 Kerr 时空中一观测者沿一准 Killing 轨道运动的情况下的加速度和陀螺进动. 直接计算给出：

$$\kappa^2=\frac{\mathscr{K}_1}{\Sigma\mathscr{K}_2},\tag{4.4.13}$$

$$\tau_1^2=\frac{\Delta}{\Sigma}\frac{\mathscr{K}^3}{\mathscr{K}_1\mathscr{K}_2}s^2,\tag{4.4.14}$$

$$\tau_2^2=\frac{M^2\mathscr{K}_4}{\Sigma^5\mathscr{K}_1}c^2.\tag{4.4.15}$$

式中

$$\mathscr{K}_1=\Delta\left[\frac{M\epsilon}{\Sigma^2}(1-a\omega s^2)^2-rs^2\omega^2\right]^2+c^2s^2\left[\frac{2Mr}{\Sigma^2}\{(r^2+a^2)\omega-a\}^2+\Delta\omega^2\right]^2,\tag{4.4.16}$$

$$\mathscr{K}_2=\left[1-(r^2+a^2)s^2\omega^2-\frac{2Mr}{\Sigma}(1-a\omega s^2)^2\right]^2,\tag{4.4.17}$$

$$\mathscr{K}_3=\left[\left\{\frac{M\epsilon}{\Sigma^2}(1-a\omega s^2)-rs^2\omega^2\right\}\left[r\omega-\frac{2Mr^2}{\Sigma}(1-a\omega s^2)\omega-\frac{M\epsilon}{\Sigma^2}(1-a\omega s^2)\{(r^2+a^2)\omega-a\}\right]+c^2\left\{\frac{2Mra}{\Sigma^2}(1-a\omega s^2)^2-\omega\right\}\times\left\{\frac{2Mr}{\Sigma^2}[(r^2+a^2)\omega-a]^2+\Delta\omega^2\right\}\right],\tag{4.4.18}$$

$$\mathscr{K}_4=\left[\frac{2Mr\epsilon a}{\Sigma}(1-a\omega s^2)^2-\epsilon\omega(r^2+a^2)(1-a\omega s^2)+2as^2\omega r^2\{(r^2+a^2)\omega-a\}\right]^2.\tag{4.4.19}$$

基矢量由式(4.4.11)给出，其中的 $\mathscr{A}$，$\mathscr{A}_{(1)}$，$\mathscr{A}_{(2)}$，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}$ 由下式给出：

$$\mathscr{A}=1-\omega^2s^2(r^2+a^2)-\frac{2Mr}{\Sigma}(1-a\omega s^2)^2,$$

$$A_{(1)}=\frac{2Mr}{\Sigma^2}(1-a\omega s^2)^2-2r\omega^2 s^2,$$

$$\mathscr{A}_{(2)}=-2cs\left[\Delta\omega^2+\frac{2Mr}{\Sigma^2}\{(r^2+a^2)\omega-a\}^2\right],$$

$$\mathscr{B}=\frac{2Mras^2}{\Sigma}(1-a\omega s^2)-(r^2+a^2)\omega s^2,$$

$$\mathscr{C}=1-\frac{2Mr}{\Sigma}(1-a\omega s^2). \tag{4.4.20}$$

前面已指出，当 $\omega=0$，式(4.4.13)～(4.4.19)退化为沿 ξ 运动的式(4.3.10)～(4.3.13)，ξ 是确定稳态观测者的整体类时 Killing 矢量.

(2) 赤道面 $\left(\theta=\frac{\pi}{2}\right)$ 上的情况

在赤道面上，上面的表达式退化为

$$\kappa^2=\frac{\Delta M^2}{r^6}\frac{\left[(a\omega-1)^2-\frac{r^3\omega^2}{M}\right]^2}{\left[1-(r^2+a^2)\omega^2-\frac{2M(a\omega-1)^2}{r}\right]^2}, \tag{4.4.21}$$

$$\tau_1^2=$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\left\{\frac{Ma}{r^2}-\left[\frac{(r^2+2a^2)M}{r^2}-r\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]\omega+\frac{Ma(3r^2+a^2)\omega^2}{r^2}\right\}^2}{\left[1-(r^2+a^2)\omega^2-\frac{2M(a\omega-1)^2}{r}\right]^2}, \tag{4.4.22}$$

$$\tau_2^2=0. \tag{4.4.23}$$

在(4.4.11)～(4.4.20)中，令 $s=1$，$c=0$，可以得到基矢量的表达式.

可见陀螺进动是环绕 $e_{(3)}$ 的，$e_{(3)}$ 垂直于赤道面；进动频率由上面的 τ_1 给出.

(3) 短程线运动和 Schiff 进动

沿短程线有

$$\kappa=0,$$

$$\omega^{-1}=a\pm\sqrt{\frac{r^3}{M}}. \tag{4.4.24}$$

这给出 Kepler 频率(在 Kerr 情况下)和沿这短程线运动的不变量

$$\tau_1^2=\frac{M}{r^3}. \tag{4.4.25}$$

在(4.4.24)中，正负号分别对应于顺旋和逆旋轨道．分析表明，对于类时轨道，r 的取值范围要求 a 的绝对值小于$\sqrt{r^3/M}$．注意到当 ω 接近 Kepler 值时，式 $\mathscr{A}_{(1)}/\kappa A$ 仍有意义，这要求 $\boldsymbol{e}_{(1)}$ 和 $\boldsymbol{e}_{(3)}$均不依赖于 ω．于是我们可以把短程线运动看作更一般运动的特殊情况．

因此，陀螺进动频率$\mp|\tau_1|$就是$\mp\sqrt{M/r^3}$．这一进动是环绕 $\boldsymbol{e}_{(3)}$，而 $\boldsymbol{e}_{(3)}$和 z 轴一致，顺旋轨道观测者测量相对于 $\boldsymbol{e}_{(1)}$的进动，$\boldsymbol{e}_{(1)}$和径矢量一致，且以(4.4.24)给出的角速度旋转．这样，在旋转系中计算的单位本征时间进动角为

$$\Delta\phi'=\mp\frac{M}{r^3}\sqrt{g_{00}}\,\frac{2\pi}{|\omega|}, \tag{4.4.26}$$

ω 是以坐标时计算的旋转角频率．这个结果和 Rindler 和 Perlick 的结果一致，他们在旋转坐标系中计算了相对于基线的进动．基线和赤道面上的 F-S 矢量 $\boldsymbol{e}_{(1)}$一致，所以他们得到了相同的进动角．为了计算相对于固连在恒星系上的参考系的进动，我们必须减去 $\boldsymbol{e}_{(1)}$相对于稳态观测者旋转一周期的进动值，即 2π 角．于是得到 Kerr 时空中的陀螺进动：

$$\Delta\phi=\mp\,2\pi\left[\left(1-\frac{3M}{r}\pm 2a\sqrt{\frac{M}{r^3}}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right] \tag{4.4.27}$$

在线性近似下，此式退化为 Schiff 进动．

正如 §4.3 中讨论的，人们也许要轨道陀螺相对于稳态观测者的基准陀螺的进动．在轨道陀螺的一个周期中，后一进动由于拖动而引起的附加进动值为

$$\Delta\phi_{(\mathrm{drag})}=(-\tau_1)\sqrt{g_{00}}\,\frac{2\pi}{|\omega|}. \tag{4.4.28}$$

式中 τ_1 由(4.3.14)给出，代入得

$$\Delta\phi_{(\mathrm{drag})}=-\frac{2\pi Ma}{r^3}\left(\frac{\sqrt{r^3}}{M}\pm a\right)\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.4.29}$$

2. Schwarzschild 场

（1）Schwarzschild 场的一般情况

在式(4.4.13)～(4.4.20)中令 $a=0$，得到

$$\kappa^2=r^2\frac{\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right)^2+\omega^4s^2c^2\right]}{\left(1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2s^2\right)^2},\tag{4.4.30}$$

$$\tau_1^2=$$

$$\omega^2s^2\frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right)\left(1-\frac{3M}{r}\right)-\omega^2c^2\right]^2}{\left(1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2s^2\right)^2\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right)^2+\omega^4s^2c^2\right]},\tag{4.4.31}$$

$$\tau_2^2=\frac{\omega^2M^2c^2}{r^6\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right)^2+\omega^4s^2c^2\right]}.\tag{4.4.32}$$

F-S 标架系由下式给出：

$$e^a_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2s^2}}(1,\ 0,\ 0,\ \omega),$$

$$e^a_{(1)}=\frac{1}{\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right)^2+\omega^4s^2c^2\right]^{1/2}}\times$$
$$\left(0,\ \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right),\ \frac{\omega^2cs}{r},\ 0\right),$$

$$e^a_{(2)}=\frac{1}{rs\sqrt{\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1-\frac{2M}{r}-\omega^2r^2s^2\right)}}\times$$
$$\left(\omega r^2s^2,\ 0,\ 0,\ -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right),$$

$$e^a_{(3)}=\frac{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}{r\left[\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2s^2\right)^2+\omega^4c^2s^2\right]^{1/2}}\times$$

$$\left(0,\ csr\omega^2,\ \frac{M}{r^3}-\omega^2 s^2,\ 0\right). \tag{4.4.33}$$

（2）赤道面上的情况

令 $\theta=\frac{\pi}{2}$，(4.4.30)～(9.4.32)退化为

$$\kappa^2=\frac{r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{M}{r^3}-\omega^2\right)^2}{\left(1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2\right)^2}, \tag{4.4.34}$$

$$\tau_1^2=\omega^2\frac{\left(1-\frac{3M}{r}\right)^2}{\left(1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2\right)^2}, \tag{4.4.35}$$

$$\tau_2^2=0. \tag{4.4.36}$$

令 $s=1$，$c=0$，由(4.4.33)可以得到基矢量的表达式. 前面讲到的 ω 与 $e_{(1)}$、$e_{(2)}$无关. 在这一情况下看得更清楚. 这种情况下陀螺进动的表达式为

$$\tau_1=\omega\left(1-\frac{3M}{r}\right)\left(1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2\right)^{-1}, \tag{4.4.37}$$

$$\Delta\phi=-2\pi\left[\left(1-\frac{3M}{r}\right)\left(1-\frac{2M}{r}-r^2\omega^2\right)^{1/2}-1\right]. \tag{4.4.38}$$

（3）Fokker-de Sitter 进动

沿着短程线有 $\kappa=0$，于是得到 Kepler 频率

$$\omega^2=\frac{M}{r^3}.$$

在这种情况下有

$$\tau_1^2=\omega^2,$$

所以轨道陀螺进动频率为 ω，与角速度 ω 相同. 在一个轨道周期中，这一陀螺的旋转角为

$$\Delta\phi=-2\pi\left[\left(1-\frac{3M}{r}\right)^{1/2}-1\right]. \tag{4.4.39}$$

3. Minkowski 时空

（1）一般情况

在(4.4.30)～(4.4.32)中，令 $M=0$，得到

$$\kappa^2=\frac{r^2\omega^4 s^2}{(1-r^2\omega^2 s^2)^2},\tag{4.4.40}$$

$$\tau_1^2=\frac{\omega^2}{(1-\tau^2\omega^2 s^2)^2},\tag{4.4.41}$$

$$\tau_2^2=0.\tag{4.4.42}$$

此时式(4.4.33)退化为

$$e^a_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{1-r^2s^2\omega^2}}(1,\ 0,\ 0,\ \omega),$$

$$e^a_{(1)}=\left(0,\ -s,\ \frac{c}{r},\ 0\right),$$

$$e^a_{(2)}=\frac{1}{rs\sqrt{1-\omega^2r^2s^2}}(\omega r^2s^2,\ 0,\ 0,\ -1),$$

$$e^a_{(3)}=\left(0,\ c,\ -\frac{s}{r},\ 0\right).\tag{4.4.43}$$

注意 τ_2 恒为零，因此进动是绕轨道平面法线的．这和时空对称性相一致．

（2）Thomas 进动

令 $\theta=\frac{\pi}{2}$，前面的诸式退化为

$$\kappa^2=\frac{r^2\omega^4}{(1-r^2\omega^2)^2},\tag{4.4.44}$$

$$\tau_1^2=\frac{\omega^2}{(1-r^2\omega^2)^2},\tag{4.4.45}$$

$$\tau_2^2=0,\tag{4.4.46}$$

这导致我们熟习的 Thomas 进动的表达式

$$\Delta\phi=-2\pi[(1-r^2\omega^2)^{-1/2}-1].\tag{4.4.47}$$

正如期望的，"Keplerian"类比为$\omega=0$，即在这种情况下没有进动．

4．整体超曲面正交稳态轨道

Kerr 时空允许存在一个符合准 Killing 矢量场定义的重要线汇．沿着该线汇的观测者称为局部非旋转观测者或零角动量观测者．如果允许更广泛的正交传递性，则可以证明这个线汇包括整体超曲面正交稳态轨道(GHOST)．$t=$常数是它们与之正交的超曲面．因此线汇的涡度恒为零，两个相邻轨道之间的连接矢量并

不发生相对于 F-W 移动的进动.

与上述观测者对应的准 Killing 矢量定义为

$$\chi=\xi+\omega\eta, \tag{4.4.48}$$

$$\omega=-\frac{\xi\cdot\eta}{\eta\cdot\eta}=-\frac{g_{03}}{g_{33}}. \tag{4.4.49}$$

注意 χ 是类时的，在事件视界上变为零.

由于线汇的涡度为零，所以

$$\Omega^a_{\mathrm{GHOST}}=0=\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}u_b u_{c;d}= \tag{4.4.50}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}u_b F_{cd}+\frac{e^{2\psi}}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{abcd}\xi_b\eta_c\omega_{,d}=$$

$$\omega^a_{(FS)}+\Omega^a_{(\mathrm{prec})}. \tag{4.4.51}$$

在一个局部非旋转观测者的情况下，与 u^a 正交的矢量的 F-W 时间导数为

$$D_t M=\alpha^{-1}\left[\mathscr{L}_t M+\omega\mathscr{L}_m M+\frac{1}{2}(m\times\nabla\omega)\times M\right]. \tag{4.4.52}$$

式中 $\quad m\equiv\eta,\ \alpha=\sqrt{\chi\cdot\chi}.$ $\quad$ (4.4.53)

应用式(4.4.6)～(4.4.11)，可以得到陀螺相对于整体超曲面正交稳态轨道(GHOST)上的 F-S 标架的进动公式：

$$\kappa^2=-\frac{1}{4}\frac{g^{ab}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,a}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,b}}{\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)^2}, \tag{4.4.54}$$

$$\tau_1^2=\frac{g_{33}^2}{4\Delta_3}\frac{\left[g^{ab}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,a}\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)_{,b}\right]^2}{g^{ab}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,a}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,b}}, \tag{4.4.55}$$

$$\tau_2^2=\frac{g_{33}^2}{4\Delta_3 g_{11}g_{22}}\frac{\left[\left(\frac{\Delta_3}{g_{32}}\right)_{,1}\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)_{,2}-\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,2}\left(\frac{g_{02}}{g_{33}}\right)_{,1}\right]^2}{g^{ab}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,a}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,b}}, \tag{4.4.56}$$

$$e^a_{(0)}=\left(\frac{g_{33}}{\Delta_3}\right)^{1/2}\left(1,\ 0,\ 0,\ -\frac{g_{03}}{g_{33}}\right),$$

$$e^a_{(1)}=-\frac{1}{\sqrt{g^{11}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)^2_{,1}+g^{22}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)^2_{,2}}}\left(0,\ g^{11}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,1},\ g^{22}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,2},\ 0\right),$$

$$e^a_{(2)}=-\left(0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{-g_{33}}}\right),$$

$$e^a_{(3)}=\frac{\sqrt{g^{11}g^{22}}}{\sqrt{g^{11}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)^2_{,1}+g^{22}\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)^2_{,2}}}\times\left(0,\ -\left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,2},\ \left(\frac{\Delta_3}{g_{33}}\right)_{,1},\ 0\right).\tag{4.4.57}$$

这些观测者在加速($\kappa\neq0$)，而且他们的 F-S 标架相对于陀螺进动(τ_1，$\tau_2\neq0$)。

上面诸式对于 Kerr 解可以准确计算，结果给出

$$\kappa^2=\frac{M^2[\mathscr{L}_1^2+\Delta\mathscr{L}_2^2s^2c^2]}{\Sigma^3\Delta\mathscr{L}_3^2},\tag{4.4.58}$$

$$\tau_1^2=\frac{M^2a^2s^2[\Sigma\mathscr{L}_1\mathscr{L}_4+2ra^2\mathscr{L}_2\Delta s^2c^2]^2}{\Sigma^5\mathscr{L}_3^2[\mathscr{L}_1^2+\mathscr{L}_2^2\Delta s^2c^2]},\tag{4.4.59}$$

$$\tau_2^2=\frac{4M^2r^2a^6s^4c^2\Delta[\mathscr{L}_1+(r^2+a^2)\mathscr{L}_4]^2}{\Sigma^5\mathscr{L}_3^2[\mathscr{L}_1^2+\mathscr{L}_2^2\Delta s^2c^2]},\tag{4.4.60}$$

$$e^a_{(0)}=\sqrt{\frac{\mathscr{L}_3}{\Delta}}\left(1,\ 0,\ 0,\ \frac{2Mra}{\Sigma\mathscr{L}_3}\right),$$

$$e^a_{(1)}=\frac{M}{\kappa\Sigma^2\mathscr{L}_3}(0,\ \mathscr{L}_1,\ \mathscr{L}_2sc,\ 0),$$

$$e^a_{(2)}=-(0,\ 0,\ 0,\sqrt{\mathscr{L}_3}s),$$

$$e^a_{(3)}=\frac{M}{\kappa\Sigma^2\mathscr{L}_3}\left(0,\ -\sqrt{\Delta}\mathscr{L}_2sc,\ \frac{\mathscr{L}_1}{\sqrt{\Delta}},\ 0\right),\tag{4.4.61}$$

式中
$$\mathscr{L}_1=r^4-a^4+\frac{2a^2s^2r^2\Delta}{\Sigma},\tag{4.4.62}$$

$$\mathscr{L}_2=\frac{2ra^2(r^2+a^2)}{\Sigma},\tag{4.4.63}$$

$$\mathscr{L}_3 = r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2s^2}{\Sigma},\tag{4.4.64}$$

$$\mathscr{L}_4 = 2r^2 + (r^2 + a^2)\frac{\epsilon}{\Sigma}.\tag{4.4.65}$$

5. de Sitter 时空

该时空的度规具有形式

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2.\tag{4.4.66}$$

沿着 $\xi + \omega\eta$ 的轨道，我们得到

$$\kappa^2 = r^2 \frac{\left[\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2 s^2\right)^2 + \omega^4 s^2 c^2\right]}{\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} - r^2\omega^2 s^2\right)^2},\tag{4.4.67}$$

$$\tau_1^2 = \frac{\omega^2 s^2\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2\right)^2}{\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2} - r^2\omega^2 s^2\right)^2\left[\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2 s^2\right)^2 + \omega^4 s^2 c^2\right]},\tag{4.4.68}$$

$$\tau_2^2 = \frac{\omega^2 c^2}{\alpha^4\left[\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2 s^2\right)^2 + \omega^4 s^2 c^2\right]},\tag{4.4.69}$$

$$e^a_{(0)} = \frac{1}{\sqrt{S_1}}(1,\ 0,\ 0,\ \omega),$$

$$e^a_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{S_2}}\left(0,\ \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2 s^2\right),\ \frac{-\omega^2 sc}{r},\ 0\right),$$

$$e^a_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{S_1}}\left(\frac{\omega rs}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}}},\ 0,\ 0,\ -\frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}}}{rs}\right),$$

$$e^a_{(3)} = \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\alpha^2}}}{\sqrt{S_2}}\left(0,\ \omega^2 sc,\ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \omega^2 s^2\right),\ 0\right).\tag{4.4.70}$$

式中 $$S_1=\sqrt{1-\frac{r^2}{\alpha^2}-\omega^2 r^2 s^2},\tag{4.4.71}$$

$$S_2=\left(1-\frac{r^2}{\alpha^2}\right)\left(\frac{1}{\alpha^2}+\omega^2 s^2\right)^2+\omega^4 s^2 c^2.\tag{4.4.72}$$

显然，不存在类 Kepler 轨道.

§4.5 稳态柱对称时空

该时空除了 Killing 矢量 ξ 和 η 以外，还有代表 z 向平移的 Killing 矢量 μ. 线元的表达式为

$$\begin{aligned}ds^2=&g_{00}dt^2+2g_{03}dtd\phi+g_{33}d\phi^2+2g_{02}dtdz+\\&g_{22}dz^2+g_{11}d\rho^2.\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

式中 g_{ab}只依赖于坐标 ρ. 此时有

$$g\equiv\det(g_{ab})=g_{11}\Delta_{23},\tag{4.5.2}$$

$$\Delta_{23}\equiv g_{00}g_{33}g_{22}-g_{22}g_{03}^2-g_{33}g_{02}^2.\tag{4.5.3}$$

由此可得度规的逆变分量：

$$g^{ab}=\frac{1}{\Delta_{23}}\begin{pmatrix}g_{22}g_{33} & -g_{03}g_{22} & -g_{02}g_{33} & 0\\ -g_{03}g_{22} & \Delta_2 & g_{02}g_{03} & 0\\ -g_{02}g_{33} & g_{02}g_{03} & \Delta_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Delta_{23}/g_{11}\end{pmatrix}.\tag{4.5.4}$$

式中 $$\Delta_3\equiv g_{00}g_{33}-g_{03}^2,\ \Delta_2\equiv g_{00}g_{22}-g_{02}^2.\tag{4.5.5}$$

像前面一样处理，首先对于世界线沿 ξ 的观测者，计算 κ，τ_1，τ_2，得到

$$\kappa^2=-\frac{g^{11}}{4}\frac{g_{00,1}^2}{g_{00}^2},\tag{4.5.6}$$

$$\begin{aligned}\tau_1^2=&\frac{-g^{11}}{4\Delta_{23}g_{00}^2}[g_{00}(g_{02}g_{03,1}-g_{03}g_{02,1})^2-\\&g_{22}(g_{03}g_{00,1}-g_{00}g_{03,1})^2-\\&g_{33}(g_{02}g_{00,1}-g_{00}g_{02,1})^2].\end{aligned}\tag{4.5.7}$$

$$\tau_2^2=0.\tag{4.5.8}$$

为了完整起见，我们也计算度规的 F-S 基矢量，结果是

$$e^a_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{g_{00}}}(1,0,0,0),$$

$$e^a_{(1)}=(0,\sqrt{-g^{11}},0,0),$$

$$e^a_{(2)}=-\frac{\sqrt{-g^{11}}}{2\sqrt{g_{00}\Delta_{23}\tau_1}}(a_2,0,b_2,c_2),$$

$$e^a_{(3)}=\frac{\sqrt{-g^{11}}}{2g_{00}\sqrt{\Delta_{23}\tau_1}}(a_3,0,b_3,c_3), \tag{4.5.9}$$

其中
$$a_2=\frac{1}{g_{00}}[g_{22}g_{03}(g_{03}g_{00,1}-g_{00}g_{03,1})+$$
$$g_{33}g_{02}(g_{02}g_{00,1}-g_{00}g_{02,1})], \tag{4.5.10}$$

$$b_2=g_{33}(g_{00}g_{02,1}-g_{02}g_{00,1})+g_{03}(g_{02}g_{03,1}-g_{03}g_{02,1}), \tag{4.5.11}$$

$$c_2=g_{22}(g_{00}g_{03,1}-g_{03}g_{00,1})+g_{02}(g_{03}g_{02,1}-g_{02}g_{03,1}), \tag{4.5.12}$$

$$a_3=g_{03}g_{02,1}-g_{02}g_{03,1}, \tag{4.5.13}$$

$$b_3=g_{00}g_{03,1}-g_{03}g_{00,1}, \tag{4.5.14}$$

$$c_3=g_{02}g_{00,1}-g_{00}g_{02,1}. \tag{4.5.15}$$

由于 $\tau_2=0$，$e_{(3)}$不能由一般的 F-S 微分得到. 但是在这种情况下可以通过与 $e_{(0)}$、$e_{(1)}$和 $e_{(2)}$正交的条件得到. 利用第 2 小节的计算过程，对于准 Killing 线汇

$$\zeta^a\equiv\xi^a+\omega\eta^a+v\mu^a\equiv e^{-\phi}e^a_0. \tag{4.5.16}$$

式中
$$\mathop{\mathscr{L}}_{\zeta}\omega=\mathop{\mathscr{L}}_{\zeta}v=0, \tag{4.5.17}$$

我们得到

$$\dot{e}^a_{(m)}=F^a_b e^b_{(m)}, \tag{4.5.18}$$

其中
$$F_{ab}\equiv e^{\phi}(\xi_{a;b}+\omega\eta_{a;b}+v\mu_{a;b}), \tag{4.5.19}$$

$$\Omega^a=\omega^a+\widetilde{H}^{ab}e_{(0)b},$$

$$\omega^a=\widetilde{F}^{ab}e_{(0)b},$$

$$H_{dc}\equiv e^{\phi}[\omega_{[,d}\eta_{c]}+v_{[,d}\mu_{c]}]. \tag{4.5.20}$$

沿着ζ的一般准静态轨迹表示螺旋轨道. 对于ζ^a，计算κ，τ_1和τ_2的过程与前边的类似. 做坐标变换

$$t=t', \tag{4.5.21}$$

$$\phi=\phi'+\omega t', \tag{4.5.22}$$

$$z=z'+vt'. \tag{4.5.23}$$

度规变为 $g_{0'0'}=g_{00}+2\omega g_{03}+\omega^2 g_{33}+2vg_{02}+v^2 g_{22}\equiv D$, $\quad$ (4.5.24)

$$g_{0'3'}=g_{03}+\omega g_{33}\equiv \mathscr{B}, \tag{4.5.25}$$

$$g_{0'2'}=g_{02}+\omega g_{22}\equiv \mathscr{E}, \tag{4.5.26}$$

$$g_{3'3'}=g_{33},\ g_{2'2'}=g_{22}. \tag{4.5.27}$$

式中$g_{a'b'}$和t'，ϕ'，z'无关. Killing 矢量$\zeta'=(1，0，0，0)$对应于原坐标系的$\xi+\omega\eta+v\mu$.

我们可以用(4.5.6)～(4.5.8)计算κ，τ_1，τ_2，在式中以$g_{a'b'}$代替g_{ab}. 结果给出

$$\kappa^2=-\frac{g^{11}\mathscr{D}_{(1)}^2}{4\mathscr{D}^2}, \tag{4.5.28}$$

$$\tau_1^2=\frac{-g^{11}}{4\Delta_{23}\mathscr{D}^2}[\mathscr{D}(\mathscr{E}\mathscr{B}_{(1)}-\mathscr{B}\mathscr{E}_{(1)})^2- g_{22}(\mathscr{B}\mathscr{D}_{(1)}-\mathscr{D}\mathscr{B}_{(1)})^2-g_{33}(\mathscr{E}\mathscr{D}_{(1)}-\mathscr{D}\mathscr{E}_{(1)})^2], \tag{4.5.29}$$

$$\tau_2^2=0. \tag{4.5.30}$$

式中 $\quad \mathscr{D}_{(1)}\equiv g_{00,1}+2\omega g_{03,1}+\omega^2 g_{33,1}+2vg_{02,1}+v^2 g_{22,1}.$ $\quad$ (4.5.31)

$$\mathscr{E}_{(1)}\equiv g_{02,1}+vg_{22,1},$$

$$e^a_{(0)}=\frac{1}{\sqrt{\mathscr{D}}}(1，0，v，\omega),$$

$$e^a_{(1)}=\left(0,\sqrt{-g^{11}}，0，0\right),$$

$$e^a_{(2)}=-\frac{\sqrt{-g^{11}}}{2\sqrt{\mathscr{D}}\Delta_{23}\tau_1}(a'_2，0，b'_2+va'_2，c'_2+\omega a'_2),$$

$$e^a_{(3)}=\frac{\sqrt{-g^{11}}}{2\mathscr{D}\sqrt{\Delta_{23}}\tau_1}(a'_3，0，b'_3+va'_3,c'_3+\omega a'_3). \tag{4.5.32}$$

式中的 a_i 和 b_i ($i=2$, 3)是用 g_{ab} 代换 g_{ab}之后的 a_i 和 b_i.

短程线由 $\kappa=0$，即 $\mathscr{D}_{(1)}=0$ 决定，在这种情况下 τ_1^2 简化为

$$\tau_1^2=\frac{g_{11}}{4\Delta_{23}\mathscr{D}}[(g_{02}^2-g_{22}\mathscr{A})\mathscr{B}_{(1)}^2+(g_{03}^2-g_{33}\mathscr{F})\mathscr{E}_{(1)}^2-2\mathscr{E}\mathscr{B}\mathscr{B}_{(1)}\mathscr{E}_{(1)}]. \tag{4.5.33}$$

式中 $$\mathscr{F}\equiv g_{00}+2vg_{02}+v^2g_{22}. \tag{4.5.34}$$

如果所考虑的时空满足

$$g_{02,\rho}=g_{22,\rho}=0, \tag{4.5.35}$$

则可进一步简化. 这时 ζ 的 Kepler 轨道和 ζ 线汇一样，由 $\mathscr{A}_{(1)}=0$ 确定，且 τ_1^2 简化为

$$\tau_1^2=-\frac{g^{11}\mathscr{B}_{(1)}^2(g_{02}^2-g_{22}\mathscr{A})}{4\Delta_{23}\mathscr{D}}. \tag{4.5.36}$$

再限制 $g_{02}=0$，得到一个有用的形式

$$\tau_1^2=\frac{g^{11}\mathscr{B}_{(1)}^2\mathscr{A}}{4\Delta_3(\mathscr{A}+v^2g_{22})}. \tag{4.5.37}$$

一般的表达式可分三种特殊情况简化：(i) $g_{02}=0$，(ii) $g_{02,\rho}=g_{22,\rho}=0$，(iii) $g_{02}=0$，$g_{22,\rho}=0$. Godel 时空属于(iii)，柱对称真空度规属于(i).

下面我们把这些一般考虑应用到 Godel 情况，最后到一般的柱对称真空度规.

1. Godel 时空

设时空度规具有形式

$$ds^2=4R^2[dt+2\sqrt{2}S^2d\phi dt-(S^2-S^4)d\phi^2-dr^2-dz^2]. \tag{4.5.38}$$

式中 $S\equiv\sinh r$，$C\equiv\cosh r$.

(1) 一般的螺旋转道

对于沿着 ζ 运动的观测者，采用前节的公式，我们有

$$\kappa^2=\frac{\omega^2S^2C^2[2\sqrt{2}-\omega(1-2S^2)]^2}{4R^2\mathscr{G}_1^2}, \tag{4.5.39}$$

$$\tau_1^2=\frac{1}{4R^2\mathscr{G}_1^2}\{\mathscr{G}_2^2+v^2(\mathscr{G}_3^2+\mathscr{G}_4^2\mathscr{G}_1)\}, \tag{4.5.40}$$

$$\tau_2^2=0. \tag{4.5.41}$$

式中 $$\mathscr{G}_1\equiv 1+2\sqrt{2}\,\omega S^2-\omega^2S^2(1-S^2)-v^2, \tag{4.5.42}$$

$$\mathscr{G}_2\equiv\omega(1-2S^2)-\sqrt{2}(1+\omega^2S^4)+ v^2\{\sqrt{2}-\omega(1-2S^2)\}, \tag{4.5.43}$$

$$\mathscr{G}_3\equiv\omega S\sqrt{1-S^2}\{2\sqrt{2}-\omega(1-2S^2)\}, \tag{4.5.44}$$

$$\mathscr{G}_4\equiv\sqrt{2}-\omega(1-2S^2). \tag{4.5.45}$$

(2) 短程线

沿一条短程线 $\kappa=0$，得到 Kepler 频率

$$\omega=\frac{2\sqrt{2}}{1-2S^2}, \tag{4.5.46}$$

与 ξ 轨道的结果一致，但是陀螺进动频率保持 z 运动的特征，结果得到

$$\tau_1^2=\frac{1-4S^2C^2}{2R^2[1-4S^2C^2-v^2(1-2S^2)^2]}. \tag{4.5.47}$$

(3) χ 运动

在式(4.5.39)～(4.5.45)中，取 $v=0$，得到沿 χ 线的运动，此时有

$$\kappa^2=\frac{\omega^2S^2C^2}{4R^2}\left[\frac{2\sqrt{2}-\omega(1-2S^2)}{1+2\sqrt{2}\,\omega S^2-\omega^2S^2(1-S^2)}\right]^2, \tag{4.5.48}$$

$$\tau_1^2=\frac{(\sqrt{2}-\omega(1-2S^2)+\sqrt{2}\,\omega^2S^4)^2}{4R^2[1+2\sqrt{2}\,\omega S^2-\omega^2S^2(1-S^2)]^2}. \tag{4.5.49}$$

沿着环短程线运动的进动频率具有简单形式：

$$\tau_1^2=\frac{1}{2R^2}, \tag{4.5.50}$$

得到进动角

$$\Delta\phi=-\pi[(1-\sinh^2 2r)^{1/2}-2]. \tag{4.5.51}$$

最后，对于稳态观测者(沿 ξ 线)，$\kappa=0$，即 t 线是短程线，这时我们得到

$$\tau_1^2=\frac{1}{2R^2}. \tag{4.5.52}$$

因此，稳态观测者的 F-S 标架相对于陀螺进动，揭示了 Godel 时空内禀的旋转. 根据 § 4.4，由于拖动引起的进动为

$$\Delta\phi_{(\mathrm{drag})}=\pi(1-2\sinh^2 r). \tag{4.5.53}$$

(4) 整体超曲面正交稳态轨迹

这些观测者的角速度为

$$\omega=-\frac{g_{03}}{g_{33}}=\frac{\sqrt{2}}{1-S^2}. \tag{4.5.54}$$

由此得到 $\kappa^2=\dfrac{S^2}{R^2C^2(1-S^2)^2}$, (4.5.55)

$$\tau_1^2=\frac{S^4}{2R^2(1-S^2)^2}. \tag{4.5.56}$$

2. 稳柱对称真空时空

该时空的度具有形式

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\varphi}(\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}\sigma^2)+\lambda_{00}\mathrm{d}t^2+2\lambda_{03}\mathrm{d}t\mathrm{d}\phi+\lambda_{33}\mathrm{d}\phi^2. \tag{4.5.57}$$

式中 $\lambda_\alpha=A_\alpha\tau^{1+b}+B_\alpha\tau^{1-b}$ $\alpha=00,03,33$, (4.5.58)

$$e^{2\varphi}=c\tau^{b^2-1},\tau=\sqrt{2}\rho,\ \delta=\sqrt{2}z. \tag{4.5.59}$$

系数 A_α 和 B_α 满足代数关系

$$A_{00}A_{33}-A_{03}^2=B_{00}B_{33}-B_{03}^2=0, \tag{4.5.60}$$

$$A_{00}B_{33}+A_{33}B_{00}-2A_{03}B_{03}=-\frac{1}{2}. \tag{4.5.61}$$

单位长度的质量和角动量由下式给出：

$$m=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}b(A_{33}B_{00}-A_{00}B_{33}), \tag{4.5.62}$$

$$j=\frac{1}{2}b(A_{03}B_{33}-A_{33}B_{03}). \tag{4.5.63}$$

(1) ζ 轨迹

为了完整，我们给出与时空线元(4.5.57)对应的 F-S 不变量：

$$\kappa^2=-\frac{1}{4c\tau^{b^2+1}}\times\left[\frac{(1+b)\tau^bA_{00}+(1-b)\tau^{-b}B_{00}+(b^2-1)v^2c\tau^{b^2-2}}{A_{00}\tau^b+B_{00}\tau^{-b}+v^2c\tau^{b^2-2}}\right]^2,$$

(4.5.64)

$$\tau_1^2=\frac{1}{\tau^3\mathscr{W}^2}\left[\frac{-2\mathscr{W}_1^2}{c\tau^{b^2-2}}+v^2(\mathscr{W}\mathscr{W}_3^2-\mathscr{W}_2^2)\right]. \qquad (4.5.65)$$

式中 $A_{0\,0}\equiv A_{00}+2\omega A_{03}+\omega^2 A_{33}$,

$B_{0\,0}\equiv B_{00}+2\omega B_{03}+\omega^2 B_{33}$,

$A_{0\,3}\equiv A_{03}+\omega A_{03}$; $B_{0\,3}\equiv B_{03}+\omega B_{03}$,

$\mathscr{W}\equiv A_{0\,0}\tau^b+B_{0\,0}\tau^{-b}+2v^2c\tau^{b^2-2}$,

$\mathscr{W}_1\equiv b(A_{0\,0}B_{0\,3}-A_{0\,3}B_{0\,0})-$

$v^2c\tau^{b^2-2}\{(1+b)(2-b)A_{0\,3}\tau^b+$

$(1-b)(2+b)B_{0\,3}\tau^{-b}\}$,

$\mathscr{W}_2\equiv\sqrt{A_{33}\tau^b+B_{33}\tau^{-b}}[(1+b)(2-b)A_{0\,0}\tau^b+$

$(1-b)(2+b)B_{0\,0}\tau^{-b}]$,

$\mathscr{W}_3\equiv(1+b)(2-b)A_{0\,3}\tau^b+(1-b)(2+b)B_{0\,3}\tau^{-b}$.

(4.5.66)

(2) 具有任意常数角速度(沿 χ)的观测者

在这种情况下，我们得到

$$\kappa^2=-\frac{1}{4c\tau^{b^2-1}}\left[\frac{(1+b)A_{0\,0}\tau^b+(1-b)B_{0\,0}\tau^{-b}}{A_{0\,0}\tau^b+B_{0\,0}\tau^{-b}}\right]^2,$$

(4.5.67)

$$\tau_1^2=-\frac{2b^2}{c\tau^{b^2+1}}\left[\frac{(A_{0\,0}B_{0\,3}-A_{0\,3}B_{0\,0})}{A_{0\,0}\tau^b+B_{0\,0}\tau^{b}}\right]^2. \qquad (4.5.68)$$

注意 $b(A_{0\,0}B_{0\,3}-A_{0\,3}B_{0\,0})=$

$b[(A_{00}B_{03}-A_{03}B_{00}+\omega(A_{00}B_{33}-A_{33}B_{00})+$

$\omega^2(A_{03}B_{33}-A_{33}B_{03})]=$

$\frac{1}{2}[2b(A_{00}B_{03}-A_{03}B_{00})-\omega(4m-1)+4j\omega^2]$.

(4.5.69)

(3) Kepler 短程线

它们由 $\kappa=0$ 确定，由此可得

$$\omega=\frac{[-(1+b)A_{03}\tau^{b}+(1-b)B_{03}\tau^{-b}]\pm\left(\frac{1-b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{(1+b)A_{33}\tau^{b}+(1-b)B_{33}\tau^{-b}}.$$

(4.5.70)

注意，仅当 $b^2<1$ 时才有实根. 我们得到

$$\tau_1^2=-\frac{(1-b^2)}{4c\tau^{1-b^2}}. \tag{4.5.71}$$

(4) 整体超曲面稳态轨迹

在所讨论的情况下有

$$\omega=-\frac{g_{03}}{g_{33}}=-\frac{A_{03}\tau^{b}+B_{03}\tau^{-b}}{A_{33}\tau^{b}+B_{33}\tau^{-b}}, \tag{4.5.72}$$

而加速度变为

$$\kappa^2=-\frac{1}{4c\tau^{b^2-1}}\left[\frac{(1-b)A_{33}\tau^{b}+(1+b)B_{33}\tau^{-b}}{A_{33}\tau^{b}+B_{33}\tau^{-b}}\right]^2. \tag{4.5.73}$$

进动具有形式

$$\tau_1^2=-\frac{8j^2}{c\tau^{b^2+1}(A_{33}\tau^{b}+B_{33}\tau^{-b})^2}. \tag{4.5.74}$$

在这种情况下，由 τ_1 给出的陀螺进动正比于给定的角动量 j. 由前面的讨论可知，“无旋线汇中两相邻轨迹的连接矢量相对于 F-W 移动的陀螺不进动. 在这种情况下，一般地，F-S 空间 3 基矢相对于陀螺(或等价地相对于连接矢量)进动. 但是当 $j=0$，即 $\tau_1=0$(τ_2 恒为零)，则 F-S 3 基矢相对于陀螺(或连接矢量)也不进动. 因此，通过检验 F-S 3 基矢(它们是 Lie 拖动的)是否相对于陀螺或连接矢量进动，观测者就可以确定源是不是旋转的.

因此我们说，沿着无旋线汇中一条轨迹的陀螺进动直接揭示中心质量(源)的旋转.

(5) 稳态观测者

为了完整，我们给出 $\omega=0$(即 ξ 线)的参量表达式：

$$\kappa^2=-\frac{1}{4c\tau^{b^2+1}}\left[\frac{(1+b)A_{00}\tau^{b}+(1-b)B_{00}\tau^{-b}}{A_{00}\tau^{b}+B_{00}\tau^{-b}}\right]^2, \tag{4.5.75}$$

$$\tau_1^2=-\frac{2b^2}{c\tau^{b^2+1}}\left[\frac{A_{00}B_{03}-A_{03}B_{00}}{A_{00}\tau^{b}+B_{00}\tau^{-b}}\right]^2. \tag{4.5.76}$$

式(4.5.76)描述了稳态陀螺由于拖动而引起的旋转．这再次说明了在局部实验中时空旋转是一个非常一般的效应.

参 考 文 献

[1] Birkhoff G D. Relativity and Modorn Physics. London: Camb Univ Pr, 1927

[2] Belinskii V A, Zakharov V E. On Gen Rel and Grav. JETP, 1978. 1953

[3] Bonnor W B. Gen E—M Field. J. Phys, 1979, 12(A): 851

[4] Chandrasekhar S. The Theor of Gen Sol. Proc R. Soc, 1978, 358: 405

[5] Chapman G A. Axim Sol of E—M Field. Phys. Rev. Lett, 1975, 34: 755

[6] Coutsoungiev T. On Exact Sot of Field Eq. Compt. rend, 1971, 272(A): 1138

[7] Das K C. Sol of Field Eq. J. Phys, 1980, 13(A): 2985

[8] de Sitter W. A Vac Sol. Proc. Kon Ned Akad Wet, 1917, 20: 229

[9] Efinger H J. The Metric. Z. Phys, 1965, 188: 31

[10] Erez G, Rosen N. Axim Sol. Bull Res Counc, 1959, 8(F): 47

[11] Ernst F J. New Form of E—Eq. Phys. Rev, 1968, 167: 1175

[12] Geroch R. A method for Gen Sol. J Math. Phys, 1971(12): 918

[13] Herlt E. Sol of E—M Eq. GRG, 1980(12): 1012

[14] Hill H A, Stebbins R T. The Gen Sol Tech Ap. J, 1975(200): 471

[15] Hoenselaers C, Kinnersley W, Xanthopoulos B C. Gen of Asym Flat. Phys Rev. Lett, 1979(42): 481

[16] Israel W. Line Source in Gen Rel. Phys. Rev, 1977, 15(D): 935

[17] Kasuya M. Exact Sol of Rot. Phys. Rev, 1982, 25(D): 995

[18] Kerr R P. A Sol of E—Eq. Phys. Rev. Lett, 1963(11): 237

[19] Kinnersley W. Grav Field of Point Mass Phys. Rev, 1969(186): 1335

[20] Kinnersley W, Chitre D M. A Theor of Gen Sol. Phys Rev Lett, 1978, 40(A): 1608

[21] Klotz A H. GRG, 1982(14): 727

[22] Kramer D et. Exact Solutions of Einstein's Field Equations, 1980: §7.1, §7.2

[23] Kramer D, Neugebauer G. Phys. Lett, 1980, 75(A): 259
[24] Kori K D, Barua J J Phys, 1975, 8(A): 508
[25] Kyle C F, Martin A W. Nuovo Cim 1967(50): 583
[26] Newman E T, Janis A I. J. Math. Phys, 1965(6): 915
[27] Nordstrom G. Proc Kon Ned Akad. Wet, 1918(20): 1238
[28] Papapetrou A. Lectures on GR, 1974: § 4.7
[29] Reissner H. Ann. der Physik, 1916(50): 106
[30] Schwarzchild K. Sity Preuss Aksd. wiss, 1916: 189
[31] Tolman R C. Proc Nat Acad. Sci, 1934(20): 169
[32] Tomimatsu A, Sato H. Phys. Rev Lett, 1972(29): 1344
[33] Vaidya P. Indian Acad. Sci, 1951, 33(A): 264
[34] Veselov A P. TMP, 1983(54): 239
[35] Wang Yongjiu (王永久), Lin Xiang (林湘), Proc. of Third Marcel Grossmann Meet. on GR, 1983, 1001
[36] Weyl H. Ann. Phys, 1971(54): 117
[37] Will C M. Theory and Experiment in GP, 1981: § 4, § 5
[38] 王永久，唐智明. 物理学报，1981(30): 1713
[39] 王永久. VGm 引力场. 物理学报，1984(33): 1728
[40] 王永久，彭秋和. 具有磁矩的中子量的引力性质. 中国科学，1984，A (10)
[41] 王永久，唐智明. 中国科学，1986，A(5)
[42] 王永久. Vaidya 度规的推广. 天体物理学报，1984，154(2)
[43] 唐智明. 广义 Moller 变换. 科学通报，1987，237(3)
[44] 桂元星，张继光，张扬. Kerr 度规的严格推导. 物理学报，1984(33): 1129
[45] 王永久，唐智明. 引力理论和引力效应. 长沙:湖南科学技术出版社，1990，第八篇
[46] 赵峥. 黑洞的热效应与时空奇异性. 北京:北京师范大学出版社，1999
[47] 王永久等. 科学通报，1992(37): 728
[48] Landau L D, Lifshitz I M. Class. Field Theory, 1973
[49] Cheng Hung. Phys Rev. Lett, 61(1988), 2182.
[50] 赵书城，物理学报，1991(40): 849
[51] Jing Jiliang, Wang Yongjiu. Inter. J. Theor. Phys, 1996 1996(35): 1481.

[52] Bonnor W B, Vaidya P C. GRG, 1970(1): 127
[53] Gutsunaev Ts I, Elsgolts S L. JETP, 1993(104): 2257
[54] Iyer B R, Vishveshwara C V. Phys. Rev 1993, D(48): 5706
[55] Ashby and B. Shahid-Saiess, Phys. Rev. D 42, 1118 1990, D(42): 1118
[56] Wilkins and M W. Jacobs, Phys. Rev. D 46, 3395 1992, D(46): 3935
[57] Honig E, Schucking EL and Vishveshwara C V. J. Math. Phys. 1974 (15): 774
[58] Iyer B R and Vishveshwara C V. Class Quantum. Grav. 1988(5): 961

第 4 篇　黑洞物理

在恒星演化的过程中，由于辐射，核燃料不断消耗，将发生引力收缩．演化到最后都要成为白矮星、中子星或黑洞．一颗恒星演化到晚期究竟成为上述三类天体中的哪一类，完全决定于它的质量．

质量 $M<1.2M_{\odot}$的老年星最后将成为白矮星．除了极薄的外层部分，白矮星是由简并电子气组成的．由电子的简并压支撑引力，维持力学平衡．由于费米能 $\varepsilon_F \gg kT$，所以压强几乎只决定于电子密度；当以光的形式辐射能量时，白矮星内部冷却而力学平衡仍然保持，半径也保持不变，只是逐渐变暗．

根据广义相对论的预言，质量 M 满足条件 $1.2M_{\odot}<M<3.2M_{\odot}$的老年星将演化成中子星．中子星由简并中子气组成，靠中子的简并压支撑引力，维持力学平衡．中子星具有一系列特殊的物理性质．例如，中子星具有极强的磁场，内部出现超流态；还有与中子星的超高密度有关的各种效应．因此，对于中子星的研究已成为天体物理学和许多物理学科的重要课题．

广义相对论预言，质量超过中子星质量上限的大质量老年星不存在稳定的结构，这种恒星将无限制地坍缩下去，最后成为黑洞．

1 球对称引力场的奇异性

黎曼空间度规张量既决定于空间的几何性质又依赖于坐标系的选择. 因此，度规的奇异性分为两种，一种是内禀奇异性，另一种是坐标奇异性. 坐标奇点可以通过坐标变换消除，而内禀奇点是空间的内禀属性，不能由坐标变换消除.

§1.1 史瓦希面

在史瓦希外部场中，

$$ds^2=\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2-r^2d\Omega^2, \qquad (1.1.1)$$

$r=r_s=2m$ 处有 $g_{11}=\infty$，$g_{00}=0$，称为**史瓦希奇点**. 由于在 $r=r_s$ 处度规张量的行列式和标曲率都是正常的，$g=-r_s^4\sin^2\theta$，$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}=12r_s^{-4}$，可见 $r=r_s$ 处的奇异性并不是度规的内禀特性. 下面将看到，通过适当的坐标变换可以消除奇点 $r=r_s$，因此这是坐标奇点. 史瓦希度规还有一个奇点，即 $r=0$. 由于相应的标曲率 $R=12r_s^2/r^6\to\infty$，所以这一奇点是无法用坐标变换消除的，这是内禀奇点(或称真奇点).

史瓦希奇点 $r=r_s$ 构成一个面，称为**史瓦希面**. 现在我们讨论这个面的性质. 容易发现，满足条件 $dt=d\theta=d\varphi=0$ 的线是短程线，沿着这些线有

$$ds^2=-\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr^2. \qquad (1.1.2)$$

这些线在 $r>r_s$ 的区域是类空的，在 $r<r_s$ 区域是类时的. 但一条

短程线的切矢量在沿短程线移动时不能由类时的变为类空的(只能沿线平移). 因此,这两个区域在面上无光滑连接. 我们也可以考虑沿径向传播的光线来说明这一点. 此时有 $d\theta=d\varphi=0, ds=0$,

$$\frac{dr}{dt}=\pm\left(1-\frac{r_s}{r}\right). \tag{1.1.3}$$

类时方向包含在光锥之内,我们考察当 r 减小时光锥顶角的变化. 在区域 $r>r_s$ 中,光锥顶角随 r 的减小而减小,当 $r\to r_s$ 时光锥顶角趋于零. 进入区域 $r<r_s$ 之后,坐标 t 的参数线变为类空的,光锥转 90°;r 从 r_s 到 0,光锥顶角减小. 上述情况如图 4-1 所示. 比较史瓦希面两侧的两个不同的光锥图,可见 $r>r_s$ 和 $r<r_s$ 两个区域无光滑连接.

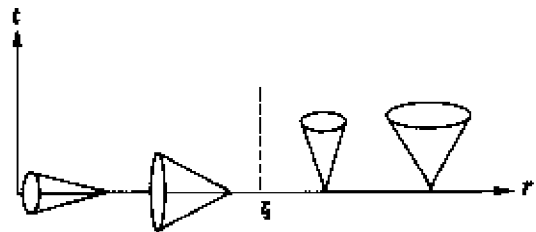


图 4-1

考虑一粒子沿径向自由落下. 此时有 $u^2=u^3=0$, $u^\mu=\frac{dx^\mu}{ds}$. 由短程线方程可得

$$\frac{du^0}{ds}+\Gamma^0_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=0,$$

$$\frac{du^0}{ds}=-\Gamma^0_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=-g^{00}g_{00,1}u^0u^1=-g^{00}\frac{dg_{00}}{ds}u^0. \tag{1.1.4}$$

积分,得到

$$g_{00}u^0=k=\text{const}. \tag{1.1.5}$$

式中常数 k 是 $u^1=0$(开始自由下落)处 g_{00}的值. 又由线元的表达式(1.1.1)可得

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=g_{00}u^{0^2}+g_{11}u^{1^2}=1. \tag{1.1.6}$$

用 g_{00}乘(1.1.6)并注意 $g_{00}g_{11}=-1$,得到

$$k^2-u^{1^2}=1-\frac{r_s}{r},$$

由此得到 $u^1=-\left(k^2-1+\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}$(注意 $u^1<0$). (1.1.7)

由(1.1.5)和(1.1.7)可知

$$\frac{dt}{dr}=\frac{u^0}{u^1}=-k\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}\left(k^2-1+\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}. \tag{1.1.8}$$

积分 $$t = -\int_{r_0}^{r_s} \frac{k\mathrm{d}r}{(1 - r_s/r)\sqrt{k^2 - 1 + r_s/r}} \to \infty. \tag{1.1.9}$$

此式表明，自由粒子自 $r=r_0>r_s$ 处落至史瓦希面，在远处观察者看来，需要经过无限长时间. 自 r_0 至 r_s 的径向距离是有限的，由 $\mathrm{d}l^2=\gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 得

$$l = \int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1 - r_s/r}}, \tag{1.1.10}$$

此式具有有限值.

在与下落粒子固连的坐标系中，测得的对应时间间隔为

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{u^1} = -\int_{r_0}^{r_s} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{k^2 - 1 + r_s/r}}, \tag{1.1.11}$$

此式具有有限值. 这就是说，对于自由下落的观察者来说，质点经过有限长时间便可到达史瓦希面. 此后它可以越过史瓦希面一直到达 $r=0$(如果源质量集中在中心奇点). 如果把恒星物质看作零压流体("尘埃")，恒星一经坍缩，由上面的讨论可知，在随动坐标系观测，恒星表面将在有限时间内缩至奇点 $r=0$. 而在远处观察者看来，恒星表面缩至 $r=r_s$ 需要无限长时间，在 §2.2 中我们还要讨论这一问题.

设一束光波由史瓦希面附近发出，频率为 ν_A，远处观察者接收到的频率为 ν_B. 由光谱线的频移公式有

$$\frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{\sqrt{g_{00}^A}}{\sqrt{g_{00}^B}},$$

对无限远处的观察者 B，$g_{00}^B \to 1$. 所以当 $g_{00}^A=0$ 时出现无限红移. 即当光源位于史瓦希面上时，远处观察者测得无限红移. 故称面 $r=r_s$($g_{00}=0$ 的面)为**无限红移面**. 由此可知，当试验粒子落到无限红移面上时，粒子上发生的一切物理过程，在远处观察者看来都变得无限缓慢.

§1.2 自由下落坐标系

在沿径向自由下落的坐标系中测得粒子自 $r=r_0$ 到达 $r=r_s$

需要有限长时间，可见在这一坐标系中奇点 $r=r_s$ 已不存在. 因此，为了把史瓦希度规延拓到 $r<r_s$ 的区域，我们寻找一个坐标变换，由史瓦希坐标系(t, r)变至自由下落坐标系(τ, ρ). 为此，令

$$\tau=t+f(r), \quad \rho=t+\varphi(r). \tag{1.2.1}$$

式中 f 和 φ 是待定函数. 我们希望能够通过 f 和 φ 的选择，以新的线元表达式 $\mathrm{d}\tau^2-\frac{r_s}{r}\mathrm{d}\rho^2$ 代替(1.1.1)的右端，这样便消除了奇点 $r=r_s$. 由(1.2.1)有

$$\mathrm{d}\tau^2-\frac{r_s}{r}\mathrm{d}\rho^2=(\mathrm{d}t+f'\mathrm{d}r)^2-\frac{r_s}{r}(\mathrm{d}t+\varphi'\mathrm{d}r)^2=$$
$$\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\mathrm{d}t^2-2\left(f'-\frac{r_s}{r}\varphi'\right)\mathrm{d}t\mathrm{d}r+\left(f'^2-\frac{r_s}{r}\varphi'^2\right)\mathrm{d}r^2. \tag{1.2.2}$$

式中 $f'\equiv\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$. 可见只要选择 f 和 φ, 使之满足

$$f'=\frac{r_s}{r}\varphi', \tag{1.2.3}$$

$$\frac{r_s}{r}\varphi'^2-f'^2=\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}. \tag{1.2.4}$$

从这些方程中消去 f, 得到

$$\varphi'=\left(\frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \tag{1.2.5}$$

积分得 $$\varphi=\frac{2}{3A}r^{3/2}+2Ar^{1/2}-A^2\ln\frac{r^{1/2}+A}{r^{1/2}-A}. \tag{1.2.6}$$

式中 $A=r_s^{1/2}$. 又由(1.2.3)和(1.2.5)得

$$\varphi'-f'=\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\varphi'=\left(\frac{r}{r_s}\right)^{1/2},$$

积分上式，注意到(1.2.1)，得到

$$\varphi-f=\rho-\tau=\frac{2}{3}r_s^{-1/2}r^{3/2}, \tag{1.2.7}$$

或者 $$r=r_s^{1/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{2/3}. \tag{1.2.8}$$

由(1.2.6)和(1.2.7)便完全确定了变换(1.2.1)：

$$r=r_s^{1/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{2/3}$$

$$t=\tau-2\sqrt{r_s r}-r_s\ln\frac{|\sqrt{r}-\sqrt{r_s}|}{\sqrt{r}+\sqrt{r_s}}=$$

$$\tau-2r_s^{2/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{1/3}-r_s\ln\frac{\left|\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{1/3}-r_s^{1/3}\right|}{\left|\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{1/3}+r_s^{1/3}\right|}.$$

(1.2.9)

这就是说，可以找到满足(1.2.3)～(1.2.4)的函数 f 和 φ. 于是史瓦希度规变为

$$ds^2=d\tau^2-\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\rho-\tau}{r_s}\right)\right]^{-2/3}d\rho^2-r_s^{2/3}\left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{4/3}d\Omega^2.$$

(1.2.10)

此即 Lemaître 度规.

由(1.2.7)可知，当 $r=r_s$ 时，$\rho-\tau=2r_s/3$，此时度规(1.2.10)不再有奇异性.

由于度规(1.2.10)和史瓦希度规由坐标变换相联系，所以度规(1.2.10)在 $r>r_s$ 区域满足爱因斯坦方程；解析延拓至 $r<r_s$ 的区域之后，由 $r=r_s$ 处无奇点可以推断，在 $r\leqslant r_s$ 区域(1.2.10)仍满足爱因斯坦方程. 仅在 $r=0$(即 $\rho-\tau=0$)处有一奇点.

由(1.2.7)得到

$$d\rho=d\tau+\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_s}}dr=dt+\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r_s}}\frac{dr}{1-r_s/r}. \tag{1.2.11}$$

由(1.1.5)和(1.1.7)给出

$$\frac{dt}{ds}=\frac{k}{1-r_s/r},\quad \frac{dr}{ds}=u^1=-\left(k^2-1+\frac{r_s}{r}\right)^{1/2}. \tag{1.2.12}$$

粒子开始下落时有 $u^1=0$，$r\to\infty$，代入上式确定 $k=1$，于是上式给出 $\frac{dr}{ds}=-\frac{\sqrt{r_s}}{\sqrt{r}}$，$\frac{dt}{ds}=k(1-r_s/r)^{-1}$，代入(1.2.11)，得到 $d\rho=0$. 这正表明坐标系(τ,ρ)是自由下落的.

显然，度规(1.2.10)是一个动态度规.

在史瓦希度规中，$r>r_s$ 和 $r<r_s$ 两个区域的 g_{00} 和 g_{11} 均反号，这相当于时间轴和空间轴对换，导致两个区域不连通，$r=r_s$ 为奇异面. 在 Lemaitre 度规中，这一奇异性已消除. 由(1.2.10)可知在 $r>r_s$ 和 $r<r_s$ 两个区域，ρ 恒为空间轴，τ 恒为时间轴，除 $r=0$ 以外不存在史瓦希奇点.

§1.3 史瓦希黑洞

我们考察沿径向的光信号的行为. 令 $ds=0, d\theta=d\varphi=0$，得到

$$\frac{d\rho}{d\tau}=\pm c\sqrt{\frac{r}{r_s}}. \tag{1.3.1}$$

式(1.3.1)给出的空-时图表明，在 R 区($r>r_s$ 的区域)，沿径向向外发射的光线可达无限远处，沿径向向内的光线可穿过史瓦希面到达奇点 $r=0$. 在 T 区($r<r_s$ 的区域)，沿两个方向的光线都要到达奇点 $r=0$. 总之，史瓦希面是一个**单向膜**，外面的粒子或光子可以通过它进入 T 区，到达奇点 $r=0$，而里面(T 区)的粒子和光子都不可能到达 R 区. 这一单向膜称为**视界**(Horizon)，T 区称为史瓦希黑洞(black hole).

由于爱因斯坦引力场方程在时间反演下是不变的，所以度规(1.2.10)经过时间反演变换后仍满足爱因斯坦方程. 这时有

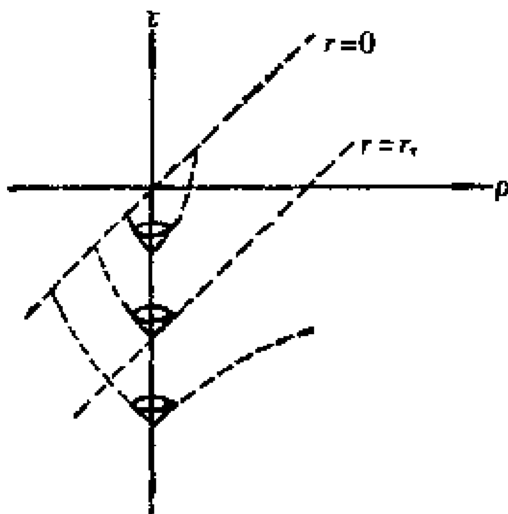


图 4-2

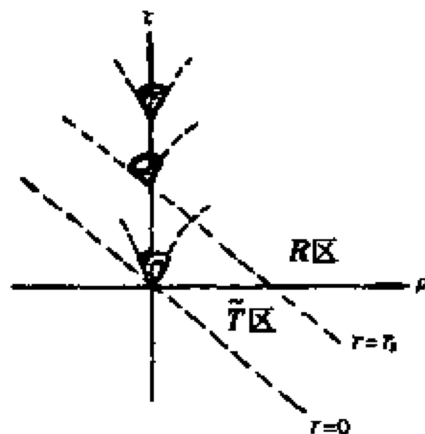


图 4-3

$$ds^2=d\tau^2-\left[\frac{3}{2}\ \frac{\rho+\tau}{r_s}\right]^{-2/3}d\rho^2-\left[\frac{3}{2}(\rho+\tau)\right]^{4/3}\times r_s^{2/3}d\Omega^2. \tag{1.3.2}$$

这仍是一个动态度规.

对于径向光线($ds=0,d\theta=d\varphi=0$)，由空时图可见，径向光信号的行为与图 4-2 给出的相反，任何粒子和光子都不可能由 R 区进入 $\tilde{T}$ 区，而 $\tilde{T}$ 区的粒子和光子都要进入 R 区. 这样，史瓦希面仍是单向膜，但只允许由里向外的辐射. $\tilde{T}$ 区称为**白洞**(white hole).

§ 1.4 Kruskal 坐标

上节中引入的 Lemaitre 度规虽然消除了史瓦希度规中的奇点 $r=r_s$，但是仍不能统一地描述 R 区、T 区和 $\tilde{T}$ 区的过程. Kruskal(1960)提出一个坐标变换，使史瓦希度规在新坐标系中除了 $r=0$ 以外不存在奇点，而且可以统一地描述 R 区、T 区和 $\tilde{T}$ 区的过程.

如果从流形中任一点出发的短程线在两个方向上都可无限延长，或终止于内禀奇点，则此流形称为**最大解析的流形**. 如果从流形中任一点出发的短程线在两个方向上都可无限延长，则此流形称为**完备的**. 下面讨论的 Kruskal 流形是最大解析的但不是完备的(有奇点 $r=0$).

Kruskal 引入一个新的坐标系

$$x^0=v,\ x^1=u,\ x^2=\theta,\ x^3=\varphi. \tag{1.4.1}$$

度规具有形式

$$ds^2=f^2dv^2-f^2du^2-r^2(v,\ u)d\Omega^2. \tag{1.4.2}$$

令(1.4.2)和(1.1.1)相等，并要求函数 $f=f(r)$，当 $v=u=0$ 时 f 有限且不等于零，可以确定由史瓦希坐标变至 Kruskal 坐标的变换式，当 $r>r_s$ 时得

$$v=\pm\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2}\exp\left(\frac{r}{2r_s}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{t}{2r_s}\right),$$

$$u=\pm\left(\frac{r}{r_s}-1\right)^{1/2}\exp\left(\frac{r}{2r_s}\right)\text{ch}\left(\frac{t}{2r_s}\right). \tag{1.4.3}$$

逆变换为$\left(\frac{r}{r_s}-1\right)\exp\left(\frac{r}{r_s}\right)=$

$$u^2-v^2,$$

$$\frac{t}{2r_s}=\text{arc th}\left(\frac{v}{u}\right); \tag{1.4.4}$$

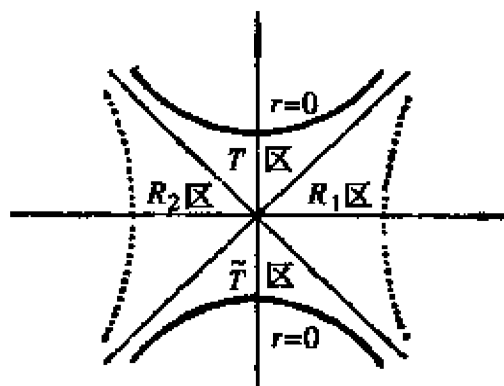


图 4-4

f 由下式确定：

$$f^2=\frac{32m^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_s}\right)=$$

$$f^2(u^2-v^2). \tag{1.4.5}$$

式中右端表示自变量为(u^2-v^2)的一个超越函数.

当 $r<r_s$ 时，得到

$$v=\pm\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{r}{2r_s}\right)\text{ch}\left(\frac{t}{2r_s}\right),$$

$$u=\pm\left(1-\frac{r}{r_s}\right)^{1/2}\exp\left(\frac{r}{r_s}\right)\text{sh}\left(\frac{t}{2r_s}\right); \tag{1.4.3a}$$

逆变换为$\left(\frac{r}{r_s}-1\right)\exp\left(\frac{r}{r_s}\right)=u^2-v^2$,

$$\frac{t}{2t_s}=\text{arc th}\,\frac{u}{v}. \tag{1.4.4a}$$

最后得到 Kruskal 度规：

$$ds^2=\frac{32m^3}{r}\exp\left(-\frac{r}{r_s}\right)(dv^2-du^2)-r^2d\Omega^2. \tag{1.4.6}$$

由上式可见，度规除了 $r=0$ 有一奇点以外，再无奇点. 由(1.4.4)可知，$r=r_s$ 对应于 $v=\pm u$，即空-时图中两条$\pm\frac{\pi}{4}$分角线. 由(1.4.4)还可看出，中心奇点 $r=0$ 对应于 $v^2-u^2=1$，是两条等轴双曲线，其渐近线就是上述两条$\pm\frac{\pi}{4}$分角线.

以 $r=0$(两条双曲线)和 $r=r_s$(两条分角线)为界，可将空时分成四个区域;左右两个区域(R_2 区和 R_1 区)，$r>r_s$;上下两个区域(T 区和 $\tilde{T}$ 区)，$r<r$.

在 R_1 区和 R_2 区，$r=$常数$>r_s$ 对应于 $u^2-v^2=C>0$，是以 u 轴为对称轴的双曲面簇.

在 T 区和 $\tilde{T}$ 区，$r=$常数$<r_s$ 对应于 $v^2-u^2=C>0$，是以 v 为对称轴的双曲面簇.

对于光子的径向运动，$ds=d\theta=d\varphi=0$，由(1.4.6)得

$$\frac{dv}{du}=\pm 1, \tag{1.4.7}$$

即光锥面与$\pm\frac{\pi}{4}$分角线平行，与狭义相对论中的情形相同. 因此类时线满足

$$ds^2>0, \quad \left|\frac{du}{dv}\right|<1,$$

与 u 轴夹角大于$\frac{\pi}{4}$. 类空线满足

$$ds^2<0, \quad \left|\frac{du}{dv}\right|>1,$$

与 u 轴夹角小于$\frac{\pi}{4}$.

由空时图可见，R_1 区和 R_2 区的粒子随时间坐标 v 的增大不可能进入 $\tilde{T}$ 区，只能进入 T 区;T 区的粒子随 v 的增大将一律到达中心奇点 $r=0$，不可能沿相反方向运动. 因此，T 区即史瓦希黑洞，$r=r_s$ 为视界.

$\tilde{T}$ 区内的粒子将一律进入 R 区(R_1，R_2)，相反的过程是不可能的. 因此，$\tilde{T}$ 区即史瓦希白洞，$r=r_s$ 仍为单向膜.

在 Kruskal 空时中存在两个不联通的宇宙，对应于 R_1 区和 R_2 区. 不可能用任何信号把这两个区域联系起来. 两个区域中间隔一个"喉"(throat)或称为"虫洞"(wormhole). 这两个宇宙的含义现在尚不清楚.

§ 1.5 Penrose 图

首先区分下列几个不同的无穷远概念.

I^+:类时未来无穷远

定义 对于任一有限 r 值，当 $t\to+\infty$ 时，类时世界线伸展的区域.

I^-:类时过去无穷远

定义 对于任一有限 r 值，当 $t\to-\infty$ 时，类时世界线伸展的区域.

I^0:类空无穷远

定义 对于任一有限 t 值，当 $r\to\infty$ 时，类空世界线伸展的区域.

$\mathscr{I}^+$:类光未来无穷远

定义 当 $(t-r)$ 为有限值，而 $(t+r)\to\infty$ 的区域，或所有出射类光世界线的伸展区域.

$\mathscr{I}^-$:类光过去无穷远

定义 当 $(t+r)$ 为有限值，而 $(t-r)\to-\infty$ 的区域，或发出入射类光世界线的区域.

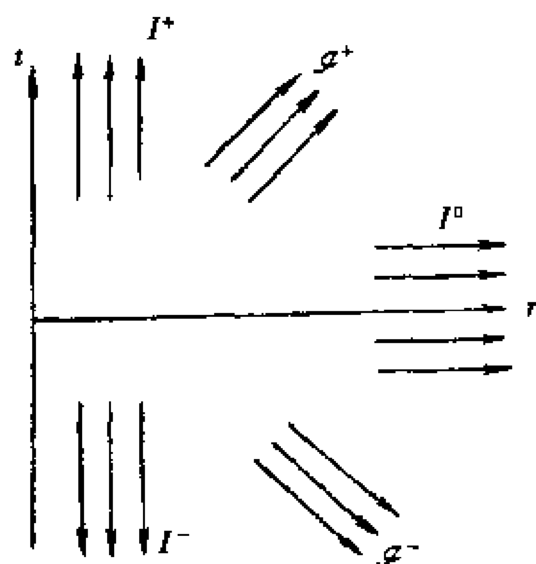


图 4-5

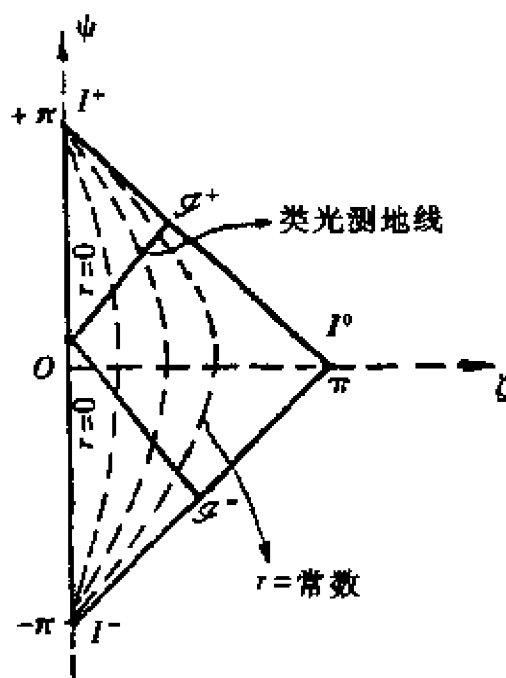


图 4-6

可以证明，在共形变换下，闵可夫斯基时空图 4-5 可变为

Penrose 图 4-6. 同样，Kruskal 时空图 4-4 可变为 Penrose 图 4-7.

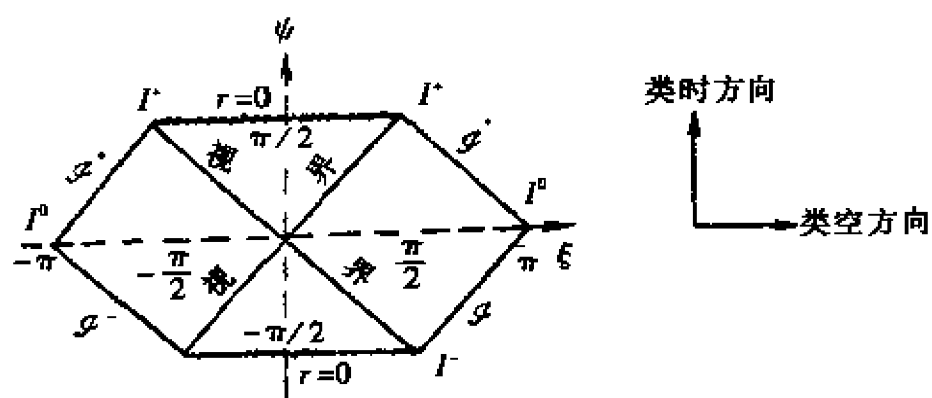


图 4-7

2 球对称恒星的引力坍缩

一颗温度高于环境温度的恒星会连续发射能量，它的质量不断减少. 恒星物质在引力的压缩过程中被加热，使氢核聚变，成为氦，从而提供防止恒星冷却的能源，并产生强大的辐射压与引力相平衡. 这样的恒星的平均密度是 1gcm^{-3}. 太阳就是这类恒星的一个例子.

当恒星的氢燃烧殆尽以后，可以发生其他的核反应过程，产生更重的核. 但这些过程持续的时间很短. 在强大的引力的作用下，恒星物质密度迅速增大，致使恒星物质(除极薄的外层部分以外)的电子发生简并，于是恒星进入一个新的平衡阶段，由电子的简并压和引力相平衡. 这种恒星的密度约为 10^7gcm^{-3}，白矮星就属于这类恒星.

质量大于 $1.2M_\odot$ 的白矮星不可能稳定，电子和核内的质子反应变为中子，从而使恒星物质呈中子态. 中子星便属于这类恒星，其密度约为 10^{14}gcm^{-3}. 如果中子星质量 $M<3.2M_\odot$，则可以稳定存在. 现在人们知道，脉冲星即中子星，它们发出的光和电磁辐射脉冲周期从 10^{-3}s 到 1s. 观测到的脉冲星周期相当准确，这只可能解释为中子星在旋转，而以这样的周期旋转的恒星半径应该相当小. 中子星靠着简并中子气产生的简并压支撑引力以维持力学平衡.

质量大于 $3.2M_\odot$ 的中子星不可能稳定，它会无限坍缩，成为黑洞*.

---

* 白矮星和中子星的临界质量的数值因态方程(模型)不同而略有不同.

§2.1 广义相对论恒星的引力平衡

在第3篇§1.4中已经得到了史瓦希内部解

$$ds^2=e^{\nu}dt^2-e^{\lambda}dr^2-r^2d\Omega^2. \tag{2.1.1}$$

式中 $\nu=\nu(r)$，$\lambda=\lambda(r)$. 度规(2.1.1)描述静态球对称恒星内部的引力场. 质量密度 $\rho=\rho(r)$、压力 $p=p(r)$ 的理想流体模型是星际物质的一个很好的近似. 当 ρ 不等于常数时，解场方程得到(2.1.1)中的度规系数

$$e^{-\lambda}=1-\frac{2m(r)}{r}. \tag{2.1.2}$$

式中 $m(r)$ 为质量函数，定义为

$$m(r)\equiv 4\pi\int_0^r\rho(x)r^2dr. \tag{2.1.3}$$

采用(2.1.2)，可将其余场方程写为

$$\nu'=-\frac{2p'}{p+\rho}, \tag{2.1.4}$$

$$kp=\frac{\nu'}{r}\left(1-\frac{2m}{r}\right)-\frac{2m}{r^3}. \tag{2.1.5}$$

我们先讨论 $\rho=\rho(r)$ 的一般情况，然后再讨论 $\rho=$const 的情况. 一个稳定平衡的恒星须满足一些物理条件. 设恒星半径为 r_0，$p(r_0)=0$，$p_{\max}=p(0)=$ 有限值，$\rho_{\max}=\rho(0)=$ 有限值；质量密度 $\rho(r)$ 随 r 的增大而减小：

$$\rho'(r)<0. \tag{2.1.6}$$

在恒星表面，e^{ν} 和它的导数应该是连续的，$m(r_0)$ 应等于史瓦希外解中的质量 M：

$$m(r_0)\equiv M. \tag{2.1.7}$$

由(2.1.3)可知，在 $r=0$ 处 $m(r)/r^3$ 是有限的.

下面我们要寻求对于给定 r_0 的最大可能质量 M，即寻求恒星的临界质量. 令

$$f(r)\equiv e^{\nu/2}, \tag{2.1.8}$$

上述压强有限的条件可表示为

f'/rf 在 $r=0$ 处有限. (2.1.9)

由(2.1.4)和(2.1.5)可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}f'\right]=\frac{f}{\sqrt{1-2m/r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{m}{r^3}\right). \tag{2.1.10}$$

由(2.1.6)可知，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{m}{r^3}\right)\leqslant 0$. 故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{2m}{r}}f'\right]\leqslant 0. \tag{2.1.11}$$

在 $r=r_0$，应有 $p(r_0)=0$，且内、外解应光滑连接，因此有

$$f^2(r_0)=1-\frac{2M}{r_0},\ \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right|_{r_0}=\frac{M}{r_0^2}\frac{1}{\sqrt{1-2M/r_0}}. \tag{2.1.12}$$

用上式对(2.1.11)从 r 到 r_0 积分，得到

$$f'(r)\geqslant\frac{Mr}{r_0^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1/2}. \tag{2.1.13}$$

应用条件(2.1.12)和(2.1.13)，在 0 到 r_0 之间积分，得到

$$f(0)\leqslant\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}-\frac{M}{r_0^3}\int_0^{r_0}\frac{r\mathrm{d}r}{(1-2m/r)^{1/2}}. \tag{2.1.14}$$

把 $\rho(r)$ 写成

$$\rho(r)=\rho_0+\mu.$$

式中 $\rho_0=6M/kr_0^3$，μ 满足式

$$\int_0^{r_0}\mu(r)r^2\mathrm{d}r=0,\ \mu'\leqslant 0,\ \mu(0)\geqslant 0. \tag{2.1.15}$$

则有
$$m(r)=M\frac{r^3}{r_0^3}+\int_0^r\mu(r)r^2\mathrm{d}r. \tag{2.1.16}$$

式中的积分总是正的. 用 $m(r)$ 代替 Mr^3/r_0^3 将使(2.1.14)右端的值增大. 由此可以得到

$$f(0)\leqslant\frac{3}{2}\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}-\frac{1}{2}. \tag{2.1.17}$$

注意 $f(0)>0$，则由上式得到

$$\frac{2M}{r_0}<\frac{8}{9}. \tag{2.1.18}$$

这就是恒星保持稳定平衡的条件．应注意上式中 M 和 r_0 的定义．M 是质量密度 ρ 在坐标体积中的积分，对应于牛顿引力理论中的引力质量．半径 r_0 的定义要使表面积为 $4\pi r_0^2$．(2.1.18)表明，表面积一定的恒星，只要其质量小于临界质量，就是稳定的．质量大于临界质量的恒星不会稳定，会因引力的作用而坍缩．

当 $\rho=\text{const}$ 时，由(2.1.3)，(2.1.7)和(2.1.18)得到临界质量的表示式：

$$M_C=\frac{8}{9}\sqrt{\frac{2}{3kC^2\rho}}. \tag{2.1.19}$$

式中 $C^2=1.86\times10^{-27}\text{cmg}^{-1}$．代入几个典型密度，得到下列临界质量：

$\rho(\text{g cm}^{-3})$	1	10^6	10^{15}
$M_C/M_\odot$	1.14×10^8	1.14×10^5	3.96

这些数值虽不很精确，但已清楚地表明，中子星只能具有几倍太阳的质量，质量再大的中子星将没有稳定的终态．

由(2.1.18)及光谱线引力红移的公式可以得到，稳定的恒星表面发出的光最大的红移值是 $Z=2$．

§2.2 球对称恒星的引力坍缩

上一节的讨论已经表明，在恒星演化的晚期，如果恒星质量大于中子星的临界质量，将无限坍缩．这实际上只是一个直观的假设．在本节中，我们利用一个简单的态方程，进行严格的计算，来证明上述假设的正确性．

假设恒星物质是零压流体．由于压强等于零，只要恒星开始收缩，就必然要坍缩至一点．由这一模型所得到的度规在整个空时区域内满足爱因斯坦场方程．

取随动坐标系 (t, r, θ, φ)，解爱因斯坦场方程，将得到 Tolman[36]度规：

$$ds^2 = dt^2 - \frac{[R'(r, t)]^2}{1+f(r)}dr^2 - R^2(r, t)d\Omega^2. \qquad (2.2.1)$$

式中 $f(r)$是满足条件 $f(r) > -1$ 的任意函数. 令 $R(r, t) = R(t) \cdot r$, $f(r) = -kr^2$, 得到一个最简单的恒星内部解:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right). \qquad (2.2.2)$$

这正是 Robertson-Walker 度规. 由于它描述均匀、各向同性空-时, 所以在宇宙学中有重要意义.

在随动坐标系中有 $u^i = 0$, $u^0 = 1$. 守恒方程 $T^{\nu}_{\mu;\nu} = 0$ 的空间分量自然满足, 时间分量为

$$T^{\nu}_{0;\nu} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} - \rho\left(\frac{a}{2a} + \frac{b}{b}\right) = 0. \qquad (2.2.3)$$

式中 $a \equiv -\frac{R^2(t)}{1-kr^2}$, $b \equiv -R^2(t)r^2$.

又由场方程 $R_{11} - \frac{1}{2}g_{11}R = 4\pi T_{11}$得

$$2k - R(t)R(t) - 2R^2(t) = 4\pi\rho. \qquad (2.2.4)$$

由(2.2.3)和(2.2.4)得到 $\rho(t)R^3(t) = \text{const}$, 调整径向坐标, 使

$$R(0) = 1. \qquad (2.2.5)$$

此时有 $\rho(t)R^3(t) = \rho(0)$, 即

$$\rho(t) = \rho(0)R^{-3}(t). \qquad (2.2.6)$$

将(2.2.5)~(2.2.6)和(2.2.2)代入场方程, 可将场方程化为

$$4\pi\rho(0)R^{-1}(t) = 2k + R(t)R(t) + 2R^2(t), \qquad (2.2.7)$$

$$\frac{4\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t) = -R(t)R(t). \qquad (2.2.8)$$

消去 $R(t)$, 得到

$$R^2(t) = -k + \frac{8\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t). \qquad (2.2.9)$$

假设 $t=0$ 时流体是静止的, 则有

$$R(t) = 0. \qquad (2.2.10)$$

代入(2.2.9)得

$$k = \frac{8\pi}{3}\rho(0). \qquad (2.2.11)$$

方程(2.2.9)化为

$$R^2(t)=k\left[R^{-1}(t)-1\right], \tag{2.2.12}$$

此方程的解具有形式

$$\begin{cases} t=\dfrac{1}{2\sqrt{k}}(\psi+\sin\psi), & (2.2.13)\\[2ex] R=\dfrac{1}{2}(1+\cos\psi). & (2.2.14)\end{cases}$$

这是摆线(图 4-8)的参数方程．当 $\psi=\pi$，即当 $t=\pi/2\sqrt{k}$ 时，$R(t)=0$. 这表明一个零压流体球将在有限长的时间 $\pi/2\sqrt{k}$ 内从静止坍缩到中心奇点.

虽然在随动坐标系中观测，这一坍缩过程只需要有限长时间，但是对于远处观察者，由§1.1 可知，星体表面要达到史瓦希面需经过无限长时间，要坍缩到 $r=0$，外面的观察者是看不到的.

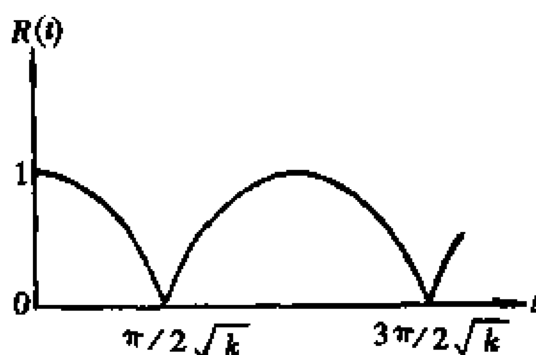


图 4-8

由随动坐标系变至史瓦希坐标系，可以求得远处观察者测得的自星球表面发出的光的红移(Weinberg,1972)：

$$z\equiv\frac{\Delta\nu}{\nu}=\left(1-\frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1}\left[\sqrt{1-ka^2}+a\sqrt{k\left[1-R(t)\right]R^{-1}(t)}\right]-1. \tag{2.2.15}$$

对上式的详细分析表明，由开始坍缩时记时(对于远处观察者)，红移 Z 由零开始缓慢增大，然后 Z 的增大速度突然加快(接近指数规律)，红移趋于无限大．这就是说，在远处观察者看来，坍缩着的恒星实际上是突然消失的.

3 Kerr 黑洞

史瓦希解是球对称无转动场源的引力场，这是十分特殊的情况. 一般的引力坍缩不可能是球对称的. 因为各种天体都具有角动量. 本章讨论具有辐射对称性的旋转天体的引力性质.

§3.1 Kerr 度规

辐射对称旋转天体的引力场由 Papapetrou 度规描述[36]：

$$ds^2=f(dt-\omega d\varphi)^2-f^{-1}[e^{2r}(d\rho^2+dz^2)+\rho^2 d\varphi^2]. \tag{3.1.1}$$

变换到椭球坐标：

$$\rho=k(x^2-1)^{1/2}(1-y^2)^{1/2},\ z=kxy. \tag{3.1.2}$$

令 $k=\dfrac{Mp}{\delta}$，将场方程的解写为

$$f=A_\delta/B_\delta,\ e^{2r}=A_\delta/p^{2\delta}(x^2-y^2)^{\delta^2},$$
$$\omega=-2MqC_\delta(1-y^2)/A_\delta. \tag{3.1.3}$$

式中 p 和 q 满足条件 $p^2+q^2=1$；不旋转时 $q=0$，$p=1$，$\delta=1$ 对应于 Kerr 解，

$$A_1=p^2x+q^2y-1,\ B_1=(px+1)^2+q^2y,$$
$$C_1=-(px+1). \tag{3.1.4}$$

$\delta=2$ 时的解为

$$A_2=[p^2(x^2-1)^2+q^2(1-y^2)]^2-4p^2q^2(x^2-1)$$
$$(1-y^2)(x^2-y^2),$$
$$B_2=(p^2x^4+q^2x^4-1+2px^3-2px)^2+4q^2y^2(px^3-$$

$$pxy^2-y^2+1)^2,$$

$$C_2=p^2(x^2-1)[-4x^2(x^2-y^2)+(x^2-1)(1-y^2)]+$$
$$p^3x(x^2-1)\times[-2(x^4-1)-(3+x^2)(1-y^2)]+$$
$$q^2(3x+1)(1-y^2)^3. \tag{3.1.5}$$

设物体的角动量为 J，则有

$$J=M^2q=Ma. \tag{3.1.6}$$

将 $\delta=1$ 的解作变换

$$px=\frac{r}{M}-1,\ y=\cos\theta, \tag{3.1.7}$$

得到通常形式的 Kerr 度规

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2Mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}t^2-\frac{r^2+a^2\cos^2\theta}{r^2+a^2-2Mr}\mathrm{d}r^2-$$
$$(r^2+a^2\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta^2-\left[(r^2+a^2)\sin^2\theta+\right.$$
$$\left.\frac{2Mra^2\sin^4\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right]\mathrm{d}\varphi^2+\frac{4Mra\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi. \tag{3.1.8}$$

§3.2 特征曲面

无限红移面是 $g_{00}=0$ 的面. 史瓦希场的无限红移面为 $r=r_s=2m$，克尔场中的无限红移面为

$$r_{\pm}^{\infty}=M\pm\sqrt{M^2-a^2\cos^2\theta}. \tag{3.2.1}$$

由空-时图可知，一个超曲面 $f(x^\mu)=0$ 为单向膜的条件是其法向矢量 $n_\mu=f_{,\mu}$为非类空矢量. n_μ 为零矢量对应于单向膜开始出现的超曲面，称为视界. 因此，视界 $f(x^\mu)=0$ 满足条件

$$n_\mu n^\mu=g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=0. \tag{3.2.2}$$

将史瓦希度规代入上式，注意到球对称性$[f(x^\mu)=f(r)]$，得到

$$g^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu}=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2=0.$$

此方程的解为 $r=2M\equiv r_s$. 显然，史瓦希场的视界和无限红移面

重合.

将克尔度规(3.1.8)代入(3.2.2)，注意到辐射对称性$[f(x^\mu)=f(r,\theta)]$，得到

$$g^{\mu\nu}f_{,\mu}f_{,\nu}=g^{11}f_{,1}^2+g^{22}f_{,2}^2=$$
$$\frac{2Mr-r^2-a^2}{r^2+a^2\cos^2\theta}f_{,1}^2-\frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta}f_{,2}^2=0.$$

由于$r^2+a^2\cos^2\theta\neq 0$，得到

$$(r^2+a^2-2Mr)f_{,1}^2+f_{,2}^2=0. \tag{3.2.3}$$

分离变量，得到此方程的解：

$$r_{\pm}^h=M\pm\sqrt{M^2-a^2}. \tag{3.2.4}$$

比较(3.2.4)和(3.2.1)，知克尔场的无限红移面和视界不重合.

类似地，将 Kerr-Newman 度规代入(3.2.2)，得到视界面

$$r_{\pm}^h=M\pm\sqrt{M^2-a^2-kQ^2} \tag{3.2.5}$$

对于 Kerr-Newman-Kasyua 场，只要将上式中的 Q^2 换为(e^2+q^2)[36].

在克尔空-时中，直角坐标(x, y, z)与坐标(r, θ, φ)的关系为(Kerr, 1963)

$$x=(r\cos\varphi-a\sin\varphi)\sin\theta,$$
$$y=(r\sin\varphi+a\cos\varphi)\sin\theta,$$
$$z=r\cos\theta. \tag{3.2.6}$$

在直角坐标系中，克尔度规具有形式

$$ds^2=dt^2-dx^2-dy^2-dz^2-$$
$$\frac{2Mr}{r^4+a^2z^2}\left[\frac{r(xdx+ydy)-a(xdy-ydx)}{r^2+a^2}+\right.$$
$$\left.\frac{zdz}{r}+dt\right]^2. \tag{3.2.7}$$

这一表达式消除了视界处的坐标奇异性. $r=0$ 处仍为奇点. 由(3.2.6)可知，中心奇点对应于

$$z=0,\ x^2+y^2=a^2\sin^2\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{3.2.8}$$

这是二维空间(x, y)中的一个圆盘. 又由度规(3.1.8)可知

$$r^2+a^2\cos^2\theta=0 \tag{3.2.9}$$

为奇异面．上式仅当 $r=0$ 且 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时方能成立（$a\neq 0$）．由于此时标曲率 $R=\infty$，可知这一奇异性是内禀的．在直角坐标系(3.2.5)中，这一奇异性对应于

$$z=0,\ x^2+y^2=a^2. \tag{3.2.10}$$

这是二维空间(x, y)中的一个圆环．比较(3.2.10)和(3.2.8)可以发现，只有圆环(3.2.10)才是内禀奇异的．圆盘(3.2.8)比圆环(3.2.10)多出来的一个开域只是坐标奇异的，因为在这个开域上$\left(r=0,\ \theta<\frac{\pi}{2}\right)$度规(3.1.8)是解析的．

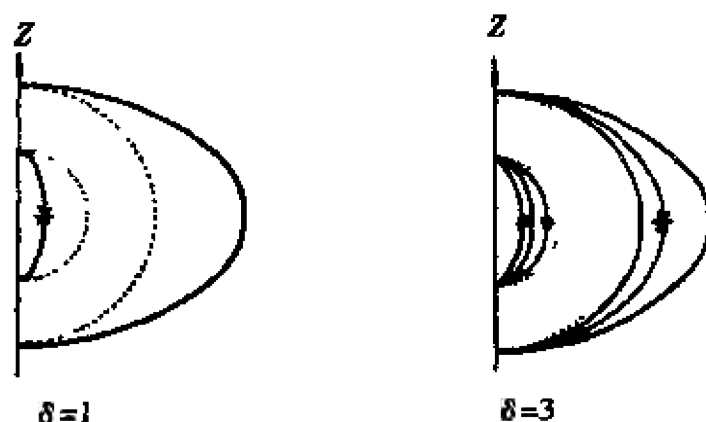


图 4-9

由(3.2.4)、(3.2.6)和(3.2.10)可以看出，在二维空间(x, y)内，内禀奇异环(3.2.10)在视界 $r^h_\pm$ 的里面．**即克尔场的视界面包围了真奇点**（内禀奇点），如图 4-9 所示．图中虚线表示视界，实线表示无限红移面，* 表示真奇点．

详细分析表明[36]，$\delta=1, 2, 3, \cdots$对应的辐射对称解中，只有 $\delta=1$ 的解(kerr 解)没有裸奇点．

克尔时空的无限红移面 $r^s_\pm$ 和视界 $r^h_\pm$ 满足

$$r^s_+\geqslant r^h_+>r^h_-\geqslant r^s_-,$$

如图 4-10 所示．视界 r^h_+ 和无限红移面包围的区域叫能层．面 r^h_+ 和 r^s_+ 在自转轴处相切．对于史瓦希黑洞，$r^h_+=r^s_+$，能层不存在．

当粒子静止于能层外面时，有

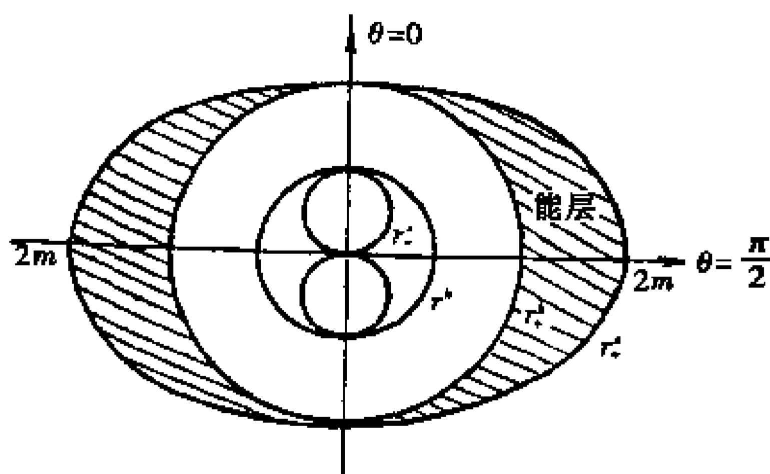


图 4-10

$$g_{00}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)>0,$$
$$ds=g_{00}c^2dt^2>0,$$

世界线为类时曲线，这当然是合理的. 但是当粒子位于能层内部（静止）时，

$$g_{00}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)<0,$$
$$ds^2=g_{00}c^2dt^2<0.$$

世界线是类空曲线，这表明粒子不可能静止于能层内部.

在能层内部，线元可写为

$$ds^2=g_{00}c^2dt^2+g_{11}dr^2+g_{22}d\theta^2+g_{33}d\varphi^2+2g_{03}cd\varphi dt,$$

其中
$$g_{00}=\left(1-\frac{2mr}{r^2+a^2\cos^2\theta}\right)<0,$$
$$g_{11}<0,\ g_{22}<0,\ g_{33}<0,\ g_{03}>0.$$

因此，不能再把 t 看作时间坐标，r, θ, ϕ 看作空间坐标. 但是可以把线元改写为

$$ds^2=\left(g_{00}-\frac{g^{02}}{g_{33}}\right)c^2dt^2+g_{11}dr^2+g_{22}d\theta^2+$$
$$g_{33}\left(d\phi+\frac{g_{03}}{g_{33}}cdt\right)^2.$$

由于 $r>r_+^h$ 时有

$$\left(g_{00}-\frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right)=\frac{r^2-2mr+a^2}{r^2+a^2+\dfrac{2mra^2\sin^2\theta}{r^2+a^2\cos^2\theta}}>0,$$

所以只要令

$$\left(\mathrm{d}\phi+\frac{g_{03}}{g_{33}}c\mathrm{d}t\right)=0,$$

便可以保证 $r=\text{const}$ 和 $\theta=\text{const}$ 时 $\mathrm{d}s^2>0$. 这表明，t 仍可作为时间轴，其余三个轴可看作空间轴. 这正是能层外部观测者所看到的. 但是这时坐标轴随转动球一起作同方向转动. 我们有

$$\dot{\phi}=-\frac{cg_{03}}{g_{33}}=\frac{r_g ar}{(r^2+a^2\cos^2\theta)(r^2+a^2)+r_g ra^2\sin^2\theta},$$

在靠近视界的地方有

$$\dot{\phi}\to a/r_g r_+^h,$$

一般地，有

$$\dot{\phi}(r=r_+^h)>\dot{\phi}(r>r_+^h),$$

$$r_g=2m.$$

这就是说，能层内部的坐标系必须被转动球体拖曳，以角速度

$$\dot{\phi}=-\frac{cg_{03}}{g_{33}}$$

绕对称轴与球体作同方向转动. 无限红移面是一个静止的界面，亦称静界.

§3.3 黑洞的无毛定理

Carter-Robinson 定理断言，渐近平直稳态轴对称中性黑洞的外部引力场有惟一解，即克尔解. 这就是说，所有渐近平直的稳态黑洞，都只由三个参量惟一确定，这三个参量就是黑洞的质量 M，角动量 J(或比角动量 a)以及电荷(有电荷时相应的解为克尔-纽曼解).

下面我们导出克尔黑洞的两个基本关系式，积分关系式

$$M=2\Omega J+\frac{\kappa}{4\pi}A, \tag{3.3.1}$$

和微分关系式

$$\delta M=\Omega\delta J+\frac{\kappa}{8\pi}\delta A. \tag{3.3.2}$$

稳态轴对称空间存在两个 Killing 矢量，类时 Killing 矢量 $\xi_{(t)}$ 和类空 Killing 矢量 $\xi_{(\varphi)}$，它们满足恒等式

$$\xi_{(t)\mu;\nu}=\xi_{(t)[\mu;\nu]},\quad \xi_{(\varphi)\mu;\nu}=\xi_{(\varphi)[\mu;\nu]}, \tag{3.3.3}$$

$$\xi_{(t)\mu;\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)}=\xi_{(\varphi)\mu;\nu}\xi^{\nu}_{(t)}, \tag{3.3.4}$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{(t)\ \ ;\nu}=-R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(t)}, \tag{3.3.5}$$

$$\xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)\ \ ;\nu}=-R^{\mu}_{\nu}\xi^{\nu}_{(\varphi)}. \tag{3.3.6}$$

由关于 $\xi^{\mu}_{(t)}$，$\xi^{\mu}_{(\varphi)}$的 Killing 方程

$$\xi_{(t)\mu;\nu}+\xi_{(t)\nu;\mu}=0,$$

得 $$-\xi_{(t)\nu;\mu}=\xi_{(t)\mu;\nu}$$

故 $$\xi_{(t)[\mu;\nu]}\equiv\frac{1}{2}(\xi_{(t)\mu;\nu}-\xi_{(t)\nu;\mu})=\xi_{(t)\mu;\nu}.$$

类似地可证 $\xi_{(\varphi)\mu;\nu}=\xi_{(\varphi)[\mu;\nu]}$.

(3.3.4)式的证明如下．设时间位移生成元和 φ 位移生成元分别为

$$I_t=\frac{\partial}{\partial t}=\xi^{\mu}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

$$I_\varphi=\frac{\partial}{\partial\varphi}=\xi^{\mu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}.$$

由于 $I_t\cdot I_\varphi=I_\varphi\cdot I_t$，故

$$\xi^{\mu}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\xi^{\nu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)=\xi^{\nu}_{(\varphi)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\xi^{\mu}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right),$$

即 $$\xi^{\mu}_{(t)}\xi^{\nu}_{(\varphi),\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\xi^{\nu}_{(\varphi)}\xi^{\mu}_{(t),\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}},$$

或 $$\xi^{\mu}_{(t)}(\xi^{\nu}_{(\varphi);\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(\varphi)})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=\xi^{\mu}_{(\varphi)}(\xi^{\mu}_{(t);\nu}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}\xi^{\lambda}_{(t)})\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=$$

$$\xi^{\mu}_{(\varphi)}\left(\xi^{\nu}_{(t);\mu}-\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}\xi^{\lambda}_{(t)}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right),$$

即 $$(\xi^{\mu}_{(t)}\xi^{\nu}_{(\varphi);\mu}-\xi^{\mu}_{(\varphi)}\xi^{\nu}_{(t);\mu})\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}=0.$$

由于这是一个恒等式，故(3.3.4)式得证.

(3.3.5)和(3.3.6)式的证明见[14].

现在 4 维时空中选一个不含奇异性的类空超曲面(例 $t=$ 常数)，对(3.3.5)式二边进行面积分得

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu} \mathrm{d}\Sigma_\mu = \int_S R^\mu_\nu \xi^\nu_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_\mu.$$

按高斯定理

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(t);\nu} \mathrm{d}\Sigma_\mu = \int_{\partial S} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu},$$

式中 ∂S 是类空超曲面 S 的边界，取 ∂S 为

$$\partial S = \partial S_B + \partial S_\infty,$$

其中 ∂S_B 为包围黑洞的界面，∂S_∞ 为无限远界面. 在无限远处度规渐近球对称，$\xi^\mu_{(t)} = (\xi^0_t, 0, 0, 0)$，我们有

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial S_\infty} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = \int \xi^{0;r}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{0r} = \int g^{rr} \xi^0_{(t);r} \mathrm{d}\Sigma_{0r} = \\
&\int g^{rr} \left(\frac{\partial \xi^0_{(t)}}{\partial r} + \Gamma^0_{0r} \xi^0_{(t)} \right) \mathrm{d}\Sigma = \\
&\int g^{rr} \Gamma^0_{0r} \xi^0_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{0r} = \int \frac{1}{2} g^{rr} g^{00} g_{00,r} \mathrm{d}\Sigma_{0r} = \\
&\int \frac{1}{2} g^{rr} g^{00} g_{00,r} \sqrt{g_{00} g_{rr}}\, r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \\
&-\int -\frac{1}{2}\left(-\frac{2M}{r^2} \right) r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = -4\pi M.
\end{aligned}$$

故

$$M = \frac{1}{4\pi}\int_S R^\mu_\nu \xi^\nu_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_\mu + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B} \xi^{\mu;\nu}_{(t)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}. \tag{3.3.7}$$

可见等式右边第一个积分即黑洞外部空间总质量，右边第二个积分即黑洞总质量. 若选取上述类空超曲面处处与 $\xi^\mu_{(\varphi)}$ 相切，并对(3.3.6)式二边进行面积分得

$$\int_S \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi);\nu} \mathrm{d}\Sigma_\mu = -\int_S R^\mu_\nu \xi^\nu_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_\mu,$$

上式左边可化为

$$\int_{\partial S} \xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)} \mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}.$$

右边利用 $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=-8\pi T_{\mu\nu}$,

可化为 $-4\pi\int_S(2T^\mu_\nu - T\delta^\mu_\nu)\xi^\nu_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_\mu = -8\pi\int_S T^\mu_\nu\xi^\nu_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_\mu$

（因 $\xi^\mu_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_\mu = 0$）.

令 $\mathrm{d}\Sigma_\mu = (\mathrm{d}\Sigma_0, 0\ 0\ 0)$，则

$$-\int_S T^\mu_\nu\xi^\nu_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_\mu = -\int_S T^0_\varphi\mathrm{d}\Sigma_0 = J.$$

这显然就是超曲面 S 内的总角动量 J. 若黑洞外无物质分布，J 即黑洞总角动量，M 即黑洞质量.

$$J = -\frac{1}{8\pi}\int_{\partial S_B}\xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}, \tag{3.3.8}$$

$$M = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}\xi^{\mu;\nu}_{(t)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu}. \tag{3.3.9}$$

由于视界的性质，过视界上任一点有且仅有一光锥和视界面相切，即有且仅有一根视界面上的零短程线（称为视界的母线）.

沿上述母线上任一点引入以时间 t 为参量的零短程线切矢量

$$l^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t},$$

则
$$l^\mu=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t}=\delta^\mu_t+\delta^\mu_\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\xi^\mu_{(t)}+\Omega\xi^\mu_{(\varphi)}. \tag{3.3.10}$$

由于 $\xi^\mu_{(t)}$，$\xi^\mu_{(\varphi)}$ 都是 Killing 矢量，故 l^μ 也是 Killing 矢量，满足 Killing 方程

$$l_{\mu;\nu}+l_{\nu;\mu}=0.$$

由(3.3.8)、(3.3.9)式得

$$\begin{aligned}M &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}(l^{\mu;\nu} - \Omega\xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)})\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = \\ &\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} - \Omega\int\frac{1}{4\pi}\xi^{\mu;\nu}_{(\varphi)}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} = \\ &\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\mathrm{d}\Sigma_{\mu\nu} + 2\Omega J.\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

现在在视界上任一点引入局部零标架 l^μ，n^μ，m^μ，$\overline{m}^\mu$. 其中 l^μ 即沿母线该点的切矢，n^μ 是与 ∂S_B 垂直的法矢，m^μ，$\overline{m}^\mu$ 是在视界内

的另两个切矢量．视界面上的面元可写为

$$d\Sigma_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(l_\mu n_\nu-l_\nu n_\mu)dA=l_{[\mu}n_{\nu]}dA.$$

由此得

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l^{\mu;\nu}\frac{1}{2}(l_\mu n_\nu-l_\nu n_\mu)dA=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial B_S}\frac{1}{2}l_\mu n_\nu(l^{\mu;\nu}-l^{\nu;\mu})dA=$$

$$\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l_\mu n_\nu l^{\mu;\nu}dA=-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l_{\nu;\mu}l^\mu n^\nu dA=$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}l_{\mu;\nu}n^\mu l^\nu dA=\frac{1}{4\pi}\int_{\partial S_B}\kappa dA. \qquad (3.3.12)$$

式中

$$\kappa\equiv-l_{\mu;\nu}l^\nu\cdot n^\mu=-\frac{Dl^\mu}{dt}\cdot n_\mu,$$

代表与视界一起转动的粒子的坐标加速度的内法向分量，也就是视界面上的引力加速度，它满足

$$\kappa_{,\mu}l^\mu=\kappa_{,\mu}m^\mu=\kappa_{,\mu}\bar{m}^\mu=0.$$

因此，κ 在视界面上为一常数．由(3.3.11)和(3.3.12)便得到(3.3.1)．

下面计算 Ω，A 和 κ，能层内各点的拖曳角速度 Ω 具有形式

$$\Omega=-\frac{cg_{03}}{g_{33}},$$

代人 $r=r_+^h$，便得到视界的角速度

$$\Omega=\frac{a}{r_g r_+^h}=\frac{J}{2M[M^2+(M^4-J^2)^{1/2}]}=\frac{J}{4M\cdot M_{ir}^2}. \qquad (3.3.13)$$

式中

$$M_{ir}\equiv\frac{1}{\sqrt{2}}[M^2+(M^4-J^2)^{1/2}]^{1/2}$$

叫黑洞的不可约质量．在史瓦希黑洞的情况下它等于黑洞的质量 M．

由上式可以看出，视界上所有的点具有同一个拖曳角速度，

即黑洞作刚性转动，只有一个角速度 Ω.

令 $t=\text{const}$，$r=r^h_+$，克尔度规变为

$$dl^2=-(r^{h2}_+ + a^2\cos^2\theta)d\theta^2-\left[(r^{h2}_+ + a^2)\sin^2\theta+\frac{2mr^h_+ a^2\sin^4\theta}{r^{h2}_+ + a^2\cos^2\theta}\right]d\varphi^2,$$

$$g^{1/2}=\begin{vmatrix} g_{\theta\theta}g_{\theta\varphi} \\ g_{\varphi\theta}g_{\varphi\varphi}\end{vmatrix}^{1/2}=(r^{h2}_+ + a^2)\sin\theta.$$

故 $$dA=\sqrt{g}\,d\theta d\varphi,$$

即 $$A=\int dA=4\pi(r^{h2}_+ + a^2)=8\pi[M^2\pm(M^4-J^2)^{1/2}]=16\pi M_{ir}^2. \qquad (3.3.14)$$

对于克尔-纽曼黑洞有

$$A=\frac{4\pi G}{c^4}[2GM^2-Q^2+2(G^2M^4-J^2c^2-GM^2Q^2)^{1/2}].$$

由式(3.3.13)和(3.3.14)可以得到

$$M=4\pi\frac{J}{A\Omega}=2\Omega J-2\Omega J+4\pi\frac{J}{A\Omega}.$$

而右端第二、三项为

$$4\pi\frac{J}{A\Omega}-2\Omega J=\left(M^2-\frac{J^2}{M^2}\right)^{1/2}=\frac{1}{M}(M^4-J^2)^{1/2},$$

将此二式与(3.3.1)比较，可知

$$\frac{\kappa}{4\pi}A=\frac{1}{M}(M^4-J^2)^{1/2},$$

即 $$\kappa=4\pi\frac{(M^4-J^2)^{1/2}}{MA}=\frac{(M^4-J^2)^{1/2}}{2M[M^2+(M^4-J^2)^{1/2}]}=\frac{2M_{ir}^2-M^2}{4MM_r^2}=\frac{(r^h_+-r^h_-)}{2(r^{h2}_+ + a^2)}.$$

在克尔-纽曼黑洞的情况下(采用 CGS 制)有

$$\kappa=\frac{4\pi}{A}\left[G^2M^2-\frac{J^2c^2}{M^2}-GQ^2\right]^{1/2}.$$

在史瓦希黑洞的情况下，显然有 $\kappa=\dfrac{1}{4M}=\dfrac{M}{r_g^2}$，即史瓦希黑洞表面的引力加速度.

由克尔情况可知，当 $M^2=J$（或 $M=a$）时 $\kappa=0$. 这可以解释为惯性离心力和引力相抵消；这类黑洞称为极端克尔黑洞.

如果 $J>M^2$（或者 $a>M$），视界不存在，中心奇点裸露，这在物理学中是不可接受的. 所以 Penrose(1968)提出："…是否存在一位'宇宙监督'，他严禁出现裸奇点，把每一个奇点都用视界面覆盖住?"这就是著名的宇宙监督原理. 按照这一原理，不可能有 $J>M^2$.

下面证明(3.3.2)式

对 Mır 的定义式

$$2M_{ir}{}^2=M^2+(M^4-J^2)^{1/2}.$$

两边微分，得到

$$\delta M_{ir}=\frac{M_{ir}}{(M^2-a^2)^{1/2}}\left[\delta M-\frac{J}{4M\,M_{ir}{}^2}\delta J\right].$$

考虑到(3.3.13)式知上式即

$$\delta M_{ir}=\frac{M_{ir}}{(M^2-a^2)^{1/2}}[\delta M-\Omega\delta J].$$

由(3.3.14)、(3.3.15)式知上式即

$$\delta M=\Omega\delta J+\frac{\kappa}{8\pi}\delta A.$$

在 CGS 单位制中

$$\delta(Mc^2)=\Omega\delta J+\frac{\kappa c^2}{8\pi G}\delta A.$$

在克尔-纽曼黑洞的情况下有

$$\delta M=\Omega\delta J+\frac{\kappa}{8\pi}\delta A+V\delta Q,$$

$$V=\frac{Qr_+^h}{c^2(r_+^{h2}+a^2)}.$$

§3.4 Rindler 变换

这是一个由闵可夫斯基时空坐标(X-T)向弯曲时空坐标(x-t)的变换，变换式为

$$\begin{cases} T = x\,\mathrm{sh}t, \\ X = x\,\mathrm{ch}t; \end{cases} \quad R\ 区 \tag{3.4.1}$$

$$\begin{cases} T = -x\,\mathrm{sh}t, \\ X = -x\,\mathrm{ch}t; \end{cases} \quad L\ 区 \tag{3.4.2}$$

$$\begin{cases} T = x\,\mathrm{ch}t, \\ X = x\,\mathrm{sh}t; \end{cases} \quad F\ 区 \tag{3.4.3}$$

$$\begin{cases} T = -x\,\mathrm{ch}t, \\ X = -x\,\mathrm{sh}t; \end{cases} \quad P\ 区 \tag{3.4.4}$$

$$Y = y,\ Z = z.$$

在上述变换下，线元由闵可夫斯基的

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}T^2 - \mathrm{d}X^2 - \mathrm{d}Y^2 - \mathrm{d}Z^2 \tag{3.4.5}$$

化为

$$\mathrm{d}s^2 = x^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \quad (R, L\ 区); \tag{3.4.6}$$

$$\mathrm{d}s^2 = -x^2\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \quad (F, P\ 区). \tag{3.4.7}$$

Rindle 变换把闵可夫斯基时空分为 4 个区域(如图 4-11 所示)，以 T、X 轴的角平分线划分.

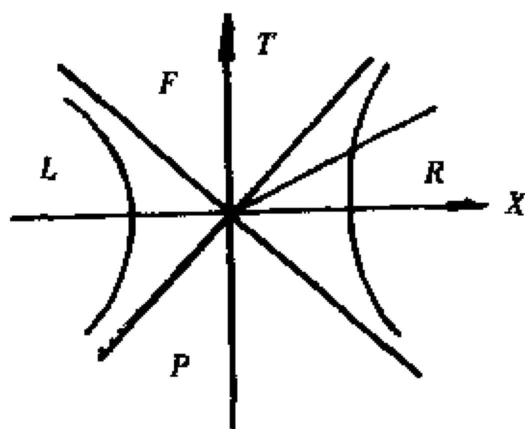


图 4-11

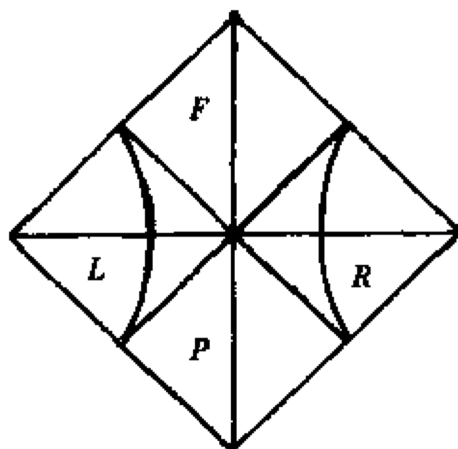


图 4-12

R 区和 L 区是两个 Rindler 时空区，它们与闵氏时空一样是静态的，但都只能覆盖闵氏时空的一部分. R 区和 L 区没有因果关系，可以看作互不连通的两个时空. 闵氏时空无内禀奇点，也无坐标奇点. Rindler 时空当然也没有内禀奇点，但在 $x=0$ 有坐标奇点. 此处有

$$g_{00}=x^2=0,\tag{3.4.8}$$

可见这是无限红移面．考虑到 Rindler 时空有三个 Killing 矢量 $\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，零曲面方程具有形式

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial x^\nu}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2=$$

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2=0.\tag{3.4.9}$$

上式两端乘以 x^2，消去 $\frac{\partial f}{\partial t}$ 项，并注意 $\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$，我们得到具有 Rindler 时空对称性的零超曲面

$$x=0.\tag{3.4.10}$$

可以证明，此面即 Rindler 时空的事件视界．

图 4-12 是闵氏时空的 Penrose 图．比较 Rindler 变换和史瓦希时空的克鲁斯卡变换，以及二者的时空图和 Penrose 图；可以发现，闵氏时空对应于克鲁斯卡时空，Rindler 时空对应于史瓦希时空．其 F 区和 P 区分别对应于史瓦希的黑洞和白洞．

Rindler 系中静止观测者的固有加速度具有形式

$$a=-\sqrt{-g_{11}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}=-\sqrt{-g_{11}}\Gamma^1_{00}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=$$

$$-\sqrt{-g_{11}}\frac{\Gamma^1_{00}}{g_{00}}=\frac{1}{x}.\tag{3.4.11}$$

此式表明，静止于 x 点的观测者的固有加速度为一常数，即观测者作匀加速运动．加速度的方向沿 x 增加的方向，惯性力指向视界 $x=0$．

在视界（$x=0$），$a\to\infty$．静止于史瓦希黑洞表面的观测者的固有加速度也等于无限大，这是事件视界的特点．人们定义在视界上不发散的"表面引力"加速度：

$$\kappa\equiv\lim_{g_{00}\to 0}(a\sqrt{g_{00}}).\tag{3.4.12}$$

对于 Rindler 视界有

$$\kappa=\lim_{g_{00}\to 0}\left(\frac{1}{2}g_{00,1}\sqrt{-g^{11}/g_{00}}\right)=1. \tag{3.4.13}$$

Rindler 坐标系是一个匀加速系．Rindler 时空是闵氏时空的一部分，是静态的，存在事件视界．

引入新的坐标变换

$$\begin{cases} t=a\eta, \\ x=\dfrac{1}{a}+\xi. \end{cases} \tag{3.4.14}$$

(y，z 不变)

式中(x，y，z，t)为 Lindler 坐标，Rindler 变换成为

$$\begin{cases} T=\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta), \\ X=\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad R\ 区 \tag{3.4.15}$$

$$\begin{cases} T=-\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta), \\ X=-\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} \quad L\ 区 \tag{3.4.16}$$

$$\begin{cases} T=\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta), \\ X=\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad F\ 区 \tag{3.4.17}$$

$$\begin{cases} T=-\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{ch}(a\eta), \\ X=-\left(\dfrac{1}{a}+\xi\right)\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} \quad P\ 区 \tag{3.4.18}$$

线元为 $\quad ds^2=\pm(1+a\xi)^2 d\eta^2 \mp d\xi^2-dy^2-dz^2.$ (3.4.19)

上面的符号对应于 R 区和 L 区，下面的符号对应于 F 区和 P 区．

变换(3.4.15～18)称为局部 Lindler 变换．

代替(3.4.14)，引入另一坐标变换：

$$t=a\eta,\ x=\frac{1}{a}e^{a\xi}, \tag{3.4.20}$$

(y，z 不变)

则由 Rindler 变换得到

$$\begin{cases} T=a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta), \\ X=a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} R\ 区 \tag{3.4.21}$$

$$\begin{cases} T=-a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta), \\ X=-a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta); \end{cases} L\ 区 \tag{3.4.22}$$

$$\begin{cases} T=a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta), \\ X=a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} F\ 区 \tag{3.4.23}$$

$$\begin{cases} T=-a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{ch}(a\eta), \\ X=-a^{-1}e^{a\xi}\mathrm{sh}(a\eta); \end{cases} P\ 区 \tag{3.4.24}$$

线元的表示式为

$$\mathrm{d}s^2=\pm e^{2a\xi}(\mathrm{d}\eta^2-\mathrm{d}\xi^2)-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2. \tag{3.4.25}$$

式中＋号对应于 R 区和 L 区，一号对应于 F 区和 P 区. 这一时空的特点是事件视界移至坐标无限远($\xi\to-\infty$)处，这是乌龟坐标的特点. 由(3.4.19)可得

$$\xi=\frac{1}{a}\ln(ax), \tag{3.4.26}$$

可见 ξ 确是 Rindler 时空中的乌龟坐标. 此坐标系中，静止观测者的固有加速度为 $ae^{-a\xi}$，视界面上表面引力加速度为 $\kappa=a$. 在原点($\xi=0$)，加速度也等于 $\kappa=a$. 在原点附近，线元(3.4.25)趋近闵氏时空的线元.

闵氏时空的零坐标为

$$V=T+X,\quad U=T-X, \tag{3.4.27}$$

Rindler 时空的零坐标为

$$v=t+\ln x,\quad u=t-\ln x. \tag{3.4.28}$$

和史瓦希时空相似，在 R 区有

$$V=e^v,\quad U=-e^u. \tag{3.4.29}$$

在未来视界上，v 为群参量，V 为仿射参量；在过去世界上，u 为群参量，U 为仿射参量. $\kappa=1$ 是群参量对仿射参量的偏离.

对于式(3.4.21)中的 Rindler 坐标，相应的零坐标为

$$\tilde{v}=\eta+\xi,\quad \tilde{u}=\eta-\xi. \tag{3.4.30}$$

在 F 区有 $\qquad V=e^{a\tilde{v}},\quad U=e^{-a\tilde{u}}. \qquad (3.4.31)$

在视界面上，$\kappa=a$ 也表示群参量对仿射参量的偏离.

§3.5 稳态时空中的事件视界

超曲面方程可表示为

$$F(x^\mu)=0(\mu=0,1,2,3), \tag{3.5.1}$$

其法矢量具有形式

$$n^\mu=F_{,\mu}. \tag{3.5.2}$$

零超曲面定义为

$$n^\mu n_\mu=0, \tag{3.5.3}$$

或

$$g^{\mu\nu}F_{,\mu}F_{,\nu}=0. \tag{3.5.4}$$

对于稳态时空，(3.5.4)具有形式

$$g^{00}F_{,0}^2+2g^{03}F_{,03}+g^{11}F^2_{,1}+g^{22}F^2_{,2}+g^{33}F^2_{,3}=0. \tag{3.5.5}$$

设 $g^{00}\neq 0$，上式可写为

$$F^2_{,0}+(g^{00})^{-1}\{2g^{03}F_{,03}+g^{11}F^2_{,1}+g^{22}F^2_{,2}+g^{33}F^2_{,3}\}=0. \tag{3.5.6}$$

稳态条件使 $F_{,0}=0$，上式化为

$$(g^{00})^{-1}\{g^{11}F^2_{,1}+g^{22}F^2_{,2}+g^{33}F^2_{,3}\}=0. \tag{3.5.7}$$

此方程可分为两个方程：

$$(g^{00})^{-1}=0, \tag{3.5.8}$$

和

$$g^{11}F^2_{,1}+g^{22}F^2_{,2}+g^{33}F^2_{,3}=0. \tag{3.5.9}$$

(3.5.9)的解和(3.5.8)的解均满足(3.5.7).

(3.5.9)就是通常确定稳态视界的方程，而(3.5.8)则常被忽略. 这一忽略，用数学的语言表述就是解方程丢了根.

采用拖曳坐标时我们有

$$z_{,0}=-g_{03}/g_{33}. \tag{3.5.10}$$

线元可写为

$$\mathrm{d}s^2=g_{00}\mathrm{d}x^{0^2}+2g_{03}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^3+g_{11}\mathrm{d}x^{1^2}+g_{22}\mathrm{d}x^{2^2}+g_{33}\mathrm{d}x^{3^2}=$$
$$\hat{g}_{00}\mathrm{d}x^{0^2}+g_{11}\mathrm{d}x^{1^2}+g_{22}\mathrm{d}x^{2^2}+g_{33}\mathrm{d}x^{3^2}, \tag{3.5.11}$$

式中 $\hat{g}_{00}=g_{00}-\dfrac{g_{03}^2}{g_{33}}$. (3.5.12)

容易证明 $\hat{g}_{00}=(g^{00})^{-1}$. (3.5.13)

这样，零曲面条件(3.5.8)可写成

$$\hat{g}_{00}=0. \tag{3.5.14}$$

在克尔黑洞的情况下，坐标为(t, r, θ, φ). 除了稳态条件 $F_{,0}=0$ 以外，还有轴对称，即 $F_{,3}=0$. 于是(3.5.9)简化为

$$g^{11}F_{,1}^2+g^{22}F_{,2}^2=0. \tag{3.5.15}$$

不难看出，(3.5.14)和(3.5.15)都化为同一个方程

$$\Delta=r^2+a^2-2mr=0. \tag{3.5.16}$$

在史瓦希场的情况下(静态球对称)，方程(3.5.7)化为两个简单的方程：

$$g_{00}=0 \text{ 和 } g^{11}=0,$$

这两个方程是同一个方程，解为

$$r=2m.$$

对于 Rindle 时空，$g_{00}=-x^2$，$g_{11}=1$. 可以发现，方程(3.5.9)无解，而方程(3.5.8)有解：

$$-x^2=0,\ x=0.$$

即视界位于 $x=0$ 处. 这表明方程(3.5.7)分解成的两个方程(3.5.8)和(3.5.9)是不能随便丢掉一个的.

熟知，不是所有的零超曲面都是事件视界. 稳态时空中的事件视界应是满足下述条件的零超曲面：(1)曲面的母线线汇应该是零短程线汇，(2)该线汇的切矢量场应该是零 Killing 矢量场；这里说的零矢量指 null(类光)矢量. 也就是说，作为 Killing 视界的超曲面才是事件视界.

§3.6 黑洞的第四个参量[37]

对于真空 Einstein 方程，惟一性定理告诉我们，由总质量 M 和角动量 J 这两个参数所表征的 Kerr 度规是其最一般的稳态渐

近平直黑洞解. 惟一性定理使我们能够划分质量充分大的物体(例如质量超过 Chandrasekhar 极限的恒星)引力坍缩的最终状态. 真空情况下,黑洞只具有两种"毛发"或者说"荷",即质量和角动量. 原来物质分布的许多特性都在引力坍缩中消失了. 正比于其事件视界面积的黑洞的熵就是这样一种信息丢失的例子. 在真空情况下,除零极矩(质量)和一极矩(角动量)外,原来质量分布的所有其他多极矩也都在引力坍缩中被辐射掉了.

如果考虑引力与一个 Abell 规范场(电磁场)的耦合,则黑洞可带有电荷和磁荷. 耦合的 Maxwell-Einstein 方程有一个类似于真空情形的惟一性定理——存在一个由 Kerr-Newmann 度规所描述的惟一的 4 参数黑洞解族. 当将 Abell 规范理论推广到非 Abell 情形时,目前并没有类似的结果存在. 因为非线性的非 Abell 理论的结构毕竟要比线性的 Abell 情形丰富和复杂得多. 除了质量、角动量和电(磁)荷之外,黑洞是否还能含有第四种参量呢?

正如 Bowick 在[97]中指出的那样,目前仍不很清楚黑洞是否可携带非 Abell 荷(毛发),例如 QCD 颜色荷. 为了研究这个问题,必须研究引力与 Yang-Mills 场和 Yang-Mills-Higgs 场的耦合,即耦合 EYM 系统和耦合 EYMH 系统.

引力与 SU(5)大统一理论的耦合由下述作用量描述:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}\Big[-\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}T_r(F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}) + g^{\mu\nu}T_r(D_\mu\phi D_\nu\phi) + g^{\mu\nu}(D_\mu H)^+(D_\nu H) - V(\phi,H)\Big], \tag{3.6.1}$$

其中

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig'[A_\mu, A_\nu],$$

$$A_\mu = A_\mu^a\lambda^a, a = 1,\cdots,24,$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi - ig'[A_\mu,\phi],$$

$$D_\mu H = \partial_\mu H - ig'A_\mu H,$$

$$V(\phi,H) = a_1T_r\Big[\Big(\phi - \frac{1}{\sqrt{15}}\nu\Big)^2\Big(\phi + \frac{3\nu}{2\sqrt{15}}\Big)^2\Big] + a_2(2T_r\phi^2 - \nu^2)^2 + a_3(H^+H - \omega^2)^2 +$$

$$a_4 H^+ \left(\phi + \frac{3}{2\sqrt{15}}\nu\right)^2 H,$$

$$a_i > 0, \nu \sim 10^{14}\mathrm{GeV}, \omega \sim 10^2\mathrm{GeV}, g' = \left(\frac{8}{3}\right)^{1/2} e,$$

这里 g' 是 SU(5)规范耦合常数，e 是正电子电荷. 群生成元 λ^a 满足 $T_r\lambda^a\lambda^b = \frac{1}{2}\delta^{ab}, \lambda^{+a} = \lambda^a$. Higgs 场 ϕ 和 H 分别是 SU(5)的 24 维和 5 维表示. 它们的如下真空平均值将 SU(5)破缺到 $SU(3)_c \times U(1)_{em}$：

$$\langle\phi\rangle = \nu \mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{1}{15}}, \sqrt{\frac{1}{15}}, \sqrt{\frac{1}{15}}, \frac{-3}{2\sqrt{15}}, \frac{-3}{2\sqrt{15}}\right),$$

$$\langle H\rangle = \mathrm{Col.}(0,0,0,0,\omega).$$

与(3.6.1)式相应的能-动张量是

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu = & -2g^{\mu\alpha}g^{\rho\beta}T_r(F_{\alpha\beta}F_{\nu\rho}) + \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}T_r(F_{\rho\sigma}F_{\alpha\beta}) + \\ & 2g^{\mu\rho}T_r(D_\rho\phi D_\nu\phi) - \delta^\mu_\nu g^{\rho\sigma}T_r(D_\rho\phi D_\sigma\phi) + \\ & 2g^{\mu\rho}(D_\rho H)^+(D_\nu H) - \delta^\mu_\nu g^{\rho\sigma}(D_\rho H)^+(D_\sigma H) + \\ & \delta^\mu_\nu V(\phi, H). \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

从(3.6.1)式可求出关于 $A_\mu, g^{\mu\nu}, \phi, H$ 的运动方程如下：

$$\begin{cases} R^{\mu\nu} - 1/2g^{\mu\nu}R = \delta\pi G T^{\mu\nu}, \\ (\sqrt{-g})^{-1}D_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}) = -ig'g^{\mu\nu}[\phi, D_\nu\phi] - \\ \quad ig'g^{\mu\nu}\lambda^a(H^+\lambda^a D_\nu H - (D_\nu H)^+\lambda^a H), \\ (\sqrt{-g})^{-1}D_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}D_\nu\phi) = -\frac{1}{2}\frac{\partial V(\phi,H)}{\partial\phi}, \\ (\sqrt{-g})^{-1}D_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}D_\nu H) = -\frac{\partial V(\phi,H)}{\partial H^+}. \end{cases} \tag{3.6.3}$$

具有球对称性的最一般的静态度规可表为

$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(e^A, -e^B, -r^2, -r^2\sin^2\theta).$$

这里 $\mu,\nu = t, r, \theta, \varphi$, A 和 B 仅仅是 r 的函数. 为了求得球对称解，对 A_μ, ϕ, H，按照〔96〕，假定

$$
\begin{cases}
H(\boldsymbol{r})=\frac{1}{g'}\mathrm{Col.}\,(0,0,0,0,h(r)),\\
\phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{g'}\mathrm{diag}(\phi_1(r),\phi_1(r),\phi_2(r)+\\
\qquad\phi_3(\boldsymbol{r})r\cdot\tau,-2(\phi_1(r)+\phi_2(r))),\\
A_t(\boldsymbol{r})=\frac{1}{g'}\mathrm{diag}\left(J_1(r),J_1(r),J_2(r)+\frac{1}{2}J_3(r)\hat{r}\cdot\tau,\right.\\
\qquad\left.-2(J_1(r)+J_2(r))\right),\\
A_i(\boldsymbol{r})=\frac{K(r)-1}{g'r}.\,(\boldsymbol{T}\times\hat{r})_i,\\
\boldsymbol{T}=\frac{1}{2}\mathrm{diag}(0,0,\tau,0),\hat{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}.
\end{cases}
\tag{3.6.4}
$$

上述形式是球对称且拓扑稳定的. 这里球对称定义为 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{T}$ 的不变性($\boldsymbol{L}=-i\boldsymbol{r}\times\nabla$).

利用上述假定,耦合 EYMH 方程(3.6.3)简化为下面的径向方程:

$$
\begin{cases}
e^{-B}(rB'-1)/r^2+1/r^2=8\pi GT_t^t,\\
-e^{-B}(rA'+1)/r^2+1/r^2=8\pi GT_r^r,\\
-\frac{1}{2}e^{-B}\left[A''+\frac{1}{2}A'^2-\frac{1}{2}A'B'+(A-B)'/r\right]=8\pi GT_\theta^\theta=8\pi GT_\varphi^\varphi,\\
(rJ_1)''-\frac{1}{2}r(A+B)'J_1'+2/5re^B(J_1+J_2)h^2=0,\\
(rJ_2)''-\frac{1}{2}r(A+B)'J_2'+\frac{2}{5}re^B(J_1+J_2)h^2=0,\\
(rJ_3)''-\frac{1}{2}r(A+B)'J_3'+\frac{2}{5}re^B(J_1+J_2)h^2-2e^BJ_3K^2/r=0,\\
K''+\frac{1}{2}(A-B)'K'-e^BK(K^2-1+4r^2\phi_3^2-e^{-A}(rJ_3)^2)/r^2=0\\
(r\phi_1)''+\frac{1}{2}r(A-B)'\phi'_1=-\frac{1}{2}g'^2re^B\frac{\partial V}{\partial\phi_1},\\
(r\phi_2)''+\frac{1}{2}r(A-B)'\phi'_2=-\frac{1}{2}g'^2re^B\frac{\partial V}{\partial\phi_2},\\
(r\phi_3)''+\frac{1}{2}r(A-B)'\phi'_3-2e^BK^2\phi_3/r^2=-\frac{1}{2}g'^2re^B\frac{\partial V}{\partial\phi_3},\\
(rh)''+\frac{1}{2}r(A-B)'h'+4re^{B-A}(J_1+J_2)^2h=-rg'^2e^B\frac{\partial V}{\partial h}.
\end{cases}
$$

$$(3.6.5)$$

能-动张量则成为

$$
\left\{
\begin{aligned}
T^t_t = & \frac{1}{g'^2}\{e^{-A-B}[2J'^2_1+4(J'_1+J'_2)^2+2J'^2_2+J'^2_3/2]+ \\
& e^{-B}K'^2/r^2+e^{-A}J^2_3K^2/r^2+ \\
& (K^2-1)^2/2r^4+e^{-B}[2\phi'^2_1+4(\phi'_1+\phi'_2)^2+ \\
& 2\phi'^2_2+2\phi'^2_3]+4\phi^2_3K^2/r^2+ \\
& 4e^{-A}(J_1+J_2)^2h^2+h'^2/r^2+g'^2V(\phi,H)\}, \\
T^r_r = & \frac{1}{g'^2}\{e^{-A-B}[2J'^2_1+4(J'^2_1+J'_2)^2+2J'^2_2+J'^2_3/2]- \\
& e^{-B}K'^2/r^2-e^{-A}J^2_3K^2/r^2+(K^2-1)^2/2r^4- \\
& e^{-B}[2\phi'^2_1+4(\phi'_1+\phi'_2)^2+2\phi'^2_2+2\phi'^2_3]+4\phi^2_3K^2/r^2- \\
& 4e^{-A}(J_1+J_2)^2h^2-h'^2/r^2+g'^2V(\phi,H)\}, \\
T^\theta_\theta = & \frac{1}{g'^2}\{e^{-A-B}[2J'^2_1+4(J'_1+J'_2)^2+2J'^2_2+J'^2_3/2]+ \\
& e^{-B}[2\phi'^2+4(\phi'_1+\phi'_2)^2+2\phi'^2_2+2\phi'^2_3]- \\
& (K^2-1)^2/2r^4-4e^{-A}(J_1+J_2)^2h^2+ \\
& h'^2/r^2+g'^2(V\phi,H)\}=T^\varphi_\varphi.
\end{aligned}
\right.
\qquad (3.6.6)
$$

从方程组(3.6.5)的第一和第二两个方程,可以导出

$$
\begin{aligned}
& \frac{e^{-B}}{r}\cdot(A+B)'=8\pi G(T^t_t-T^r_r)= \\
& \quad \frac{16\pi G}{g'^2}[e^{-B}\{2(\phi'_1)^2+4(\phi'_1+\phi'_2)^2+ \\
& \quad 2(\phi'_2)^2+2\phi'^2_3\}+e^{-A}J^2_3K^2/r^2+ \\
& \quad e^{-B}K'^2/r^2+h'^2/r^2+4e^{-A}(J_1+J_2)^2h^2]\geqslant 0.
\end{aligned}
\qquad (3.6.7)
$$

我们将寻求运动方程的静态球对称解,故要求 $T^t_t=T^r_r$. 利用(3.6.7)式,有

$$
\left\{
\begin{aligned}
& A+B=C(\text{常数}), \quad \phi'_i=0, \quad i=1,2,3, \\
& h'=0, K'=0, \quad J_3K=0, \quad (J_1+J_2)h=0.
\end{aligned}
\right.
\qquad (3.6.8)
$$

在下面的讨论中,将令常数 C 等于零. 这样得到的度规是渐近平直的. 利用(3.6.8)式及无穷远处 Higgs 场趋于其真空平均值这

一边界条件和 J_i, K 所满足的运动方程，得到

$$\phi_1=\sqrt{\frac{1}{15}}\nu g',\ \phi_2=-\frac{1}{4\sqrt{15}}\nu g',\ \phi_3=\frac{5}{4\sqrt{15}}\nu g',$$

$$h=\omega g',\qquad J_1+J_2=0,\qquad K=0.$$

$$J_i=\begin{cases}0,\\ b_i/r+c_i,\ 且\ b_1=-b_2, c_1=-c_2.\end{cases}\tag{3.6.9}$$

这里 b_i, c_i 是积分常数. 注意 $J_i=0$ 的情形对应磁单极解，而 $J_i\neq 0$ 的情形则与所谓双荷解相对应. 把以上结果代入(3.6.2)式便有

$$T_t^t=T_r^r=-T_\theta^\theta=-T_\varphi^\varphi=\frac{1+4b_1^2+4b_2^2+b_3^2}{2g'^2r^4}.\tag{3.6.10}$$

求解关于 A, B 的方程，可得

$$e^A=e^{-B}=1-2GM/r+\frac{4\pi G(1+4b_1^2+4b_2^2+b_3^2)}{g'^2r^2}.\tag{3.6.11}$$

这里 M 是积分常数，它代表本文所求得解的质量.

由于这里所得度规是渐近平直的，因而，可利用相应场在无穷处球面上的积分来求场方程解所具有的电荷、磁荷和色荷. 按照文献[37]电磁场强度可以定义为

$$F'_{\mu\nu}\equiv\frac{2}{g'}T_r(F_{\mu\nu}(r)Q(r)).\tag{3.6.12}$$

这里电荷算子 $Q(r)\underset{r\to\infty}{\sim\!\!\to} e\,\mathrm{diag}(-1/3,\ -1/3, 1/3-2\hat{r}/3\cdot\tau,\ 0)$[10]. 而通常的电场强度 $E(r)$ 和磁场强度 $B(r)$ 由下式给出：

$$E_i(r)\equiv F'_{0i}(\boldsymbol{r})=\frac{2}{g'}\boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{F}_{0i}(\boldsymbol{r})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r})),$$

$$B_i(\boldsymbol{r})\equiv\frac{1}{g'}T_r(\varepsilon_{ijk}F_{jk}(\boldsymbol{r})Q(\boldsymbol{r})).\tag{3.6.13}$$

从(3.6.4)和(3.6.9)式，可以求得

$$\begin{cases}F_{ij}(\boldsymbol{r})=-\dfrac{2}{g'r^2}T_a(\varepsilon_{iab}r_b\hat{r}_i-\varepsilon_{iab}\hat{r}_br_j-\varepsilon_{ija})-\dfrac{1}{g'r^2}\varepsilon_{ijb}\hat{r}_b\hat{r}\cdot\boldsymbol{T},\\ F_{0i}(\boldsymbol{r})=\dfrac{\hat{r}_i}{g'r^2}\mathrm{diag}\left(b_1, b_1, b_2+\dfrac{b_3}{2}\hat{r}\cdot\tau, 0\right).\end{cases}\tag{3.6.14}$$

这样 $$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{r}{2er^2}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{-b_1+b_2-b_3}{2e}\cdot\frac{\hat{r}}{r^2}. \quad (3.6.15)$$

而对 $SU(3)_c$ 色电场 $\boldsymbol{E}^a(\boldsymbol{r})$ 和色磁场 $\boldsymbol{B}^a(\boldsymbol{r})$，有

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i^a(\boldsymbol{r}) \equiv 2\boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{F}_{0i}(\boldsymbol{r})\lambda^a(\boldsymbol{r})) \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{4\pi(4b_1-b_3)}{\sqrt{8}\,e}\dfrac{\hat{r}}{4\pi r^2}\delta^{a8}, \\ \lambda^a \text{ 是 Gell-Mann 矩阵}, a=1,\cdots,8, \\ \boldsymbol{B}_i^a(\boldsymbol{r}) \equiv T_r(\varepsilon_{ijk}F_{ij}(\boldsymbol{r})\lambda^a(\boldsymbol{r})) \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\hat{r}}{g'r^2}\delta^{a8}. \end{cases} \quad (3.6.16)$$

从上述结果可以看出，场方程解所具有的电荷 Q、磁荷 P 和 QCD 色荷 C^a 分别是

$$Q=\frac{4\pi(-b_1+b_2-b_3)}{2e}, P=\frac{4\pi}{2e},$$
$$C^a=\frac{4\pi(4b_1-b_3)}{\sqrt{8}\,e}\delta^{a8}. \quad (3.6.17)$$

因此，所得度规便可表为

$$\begin{aligned} dS^2 = &\left(1-2GM/r+\frac{3G}{8\pi r^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right)dt^2 - \\ &\left(1-2GM/r+\frac{3G}{8\pi r^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right)^{-1}d\boldsymbol{r}^2 - \\ &r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

从度规表达式(3.6.18)容易证明，存在如下事件视界：

$$r_H = GM \pm \sqrt{(GM)^2 - \frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)}. \quad (3.6.19)$$

因此，如果

$$\frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right) \leqslant (GM)^2, \quad (3.6.20)$$

则我们所得的解就代表一个黑洞，它除了带有通常的电荷和磁荷外，还带有 $SU(3)_c$ 色荷.

下面我们给出耦合 EYMH 方程组(3.6.3)的一个稳态轴对称解. 对于稳态轴对称情形，时空度规可表为如下形式：

$$dS^2 = Xdt^2 - Ydr^2 - Zd\theta^2 - Vd\varphi^2 - 2Wdtd\varphi. \quad (3.6.21)$$

这里 X, Y, Z, V, W，只是 r, θ 的函数. 为了寻求场方程的稳态轴对

称解，将球对称的 Dokos Tomaras 假定推广为如下的轴对称形式：

$$A_0(r,\theta)=\frac{1}{g'\Sigma}\mathrm{diag}\left(B_1,B_1,B_2+\frac{\hat{r}\cdot\boldsymbol{\tau}}{2}B_3,-2(B_1+B_2)\right),$$

$$A_r=0, A_\theta(r,\theta)=\frac{C}{g'\Sigma}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})_\theta,$$

$$A_\varphi(r,\theta)=\frac{D}{g'\Sigma}(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{R})_\varphi,$$

$$\phi(r,\theta)=\frac{1}{g'\Sigma}\mathrm{diag}(F_1,F_1,F_2+F_3\hat{r}\cdot\boldsymbol{\tau},-2(F_1+F_2)),$$

$$H(r,\theta)=\frac{1}{g'}\mathrm{Col.}(0,0,0,0,I(r,\theta)), \tag{3.6.22}$$

其中 $T=1/2\mathrm{diag}(0,0,\boldsymbol{\tau},0)$， $\hat{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}}$，

$R=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_x+\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_y+E(r,\theta)\cos\theta\boldsymbol{e}_z$，

$\Sigma=r+a^2\cos^2\theta$.

B_i,C,D,E,F_i,I 均是 r,θ 的函数. 显然，当转动参数 $a=0$ 时，(3.6.22)式应回到(3.6.4)式，故应有

$$\begin{cases}B_i/\Sigma=J_i(r), \Sigma^{-1}C=(K(r)-1)r^{-1},\\ D/\Sigma=(K(r)-1)/r,\\ E=1, F_i/\Sigma=\phi_i(r), I=h(r).\end{cases} \quad a=0. \tag{3.6.23}$$

对于 $a\neq 0$，即轴对称情形，将(3.6.21)和(3.6.22)式代人耦合 EYMH 方程组(3.6.3)，我们很幸运地找到了场方程的一个严格解如下(在附录中，我们将给出具体证明)：

$$\begin{cases}B_1=b_1r=-B_2=b_2r, B_3=b_3r-a\cos\theta,\\ C=-\frac{\Sigma}{r}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta+E\cos^2\theta},\\ D=-(r+b_3a\cos\theta), E=\frac{r^2+a^2-b_3ra\sin\theta\tan\theta}{r^2+b_3ra\cos\theta},\\ F_1=\sqrt{\frac{1}{15}}\nu g'\Sigma, F_2=-\frac{1}{4\sqrt{15}}\nu g'\Sigma,\\ F_3=\frac{5}{4\sqrt{15}}\nu g'\Sigma, I=\omega g',\end{cases} \tag{3.6.24}$$

及

$$
\begin{cases}
X=1-\frac{G}{\Sigma}\left[2Mr-\frac{3}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right],\\
Y=\Sigma/\Delta, Z=\Sigma,\\
V=\left\{r^2+a^2+\frac{G}{\Sigma}\left[2Mr-\frac{3}{8\pi}\right.\right.\\
\qquad\left.\left.\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right]a\sin^2\theta\right\}\sin^2\theta,\\
W=-\frac{G}{\Sigma}\left[2Mr-\frac{3}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right]a\sin^2\theta,\\
\Delta=r^2+a^2-G\left[2Mr-\frac{3}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^3)^2)\right)\right],
\end{cases}
\tag{3.6.25}
$$

其中，b_i 是积分常数，P,Q,C^8 的值由(3.6.17)式给出，可以看出，M 代表质量，a 代表单位质量的角动量．至于 P,Q,C^8，利用与上节同样的分析方法，即可得出它们分别代表磁荷、电荷和 $SU(3)_c$ 色荷．

从度规表达式(3.6.25)，可以证明存在如下事件视界：

$$
r_{\pm}^{h}=GM\pm\left[(GM)^2-a^2-\frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right]^{1/2}.
\tag{3.6.26}
$$

因此，若 $a^2+\frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\leqslant(GM)^2$，　(3.6.27)

则本节所给出的解就代表一个具有电荷、磁荷及 $SU(3)_c$ 色荷的旋转黑洞．进一步，在条件(3.6.27)下，可求出黑洞的无限红移面为

$$
r_{\pm}^{\infty}=GM\pm\left[(GM)^2-a^2\cos^2\theta-\right.
\left.\frac{3G}{8\pi}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\right]^{1/2}.
\tag{3.6.28}
$$

注意　利用度规表达式(3.6.21)，(3.6.24)和(3.6.25)，可计算出 Einstein 张量 $E_\nu^\mu\equiv R_\nu^\mu-\frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R$ 的非零分量为

$$
E_t^t=\frac{1}{4Y\rho}\left[2X\partial_r^2V+\partial_rV\partial_rX+2W\partial_r^2W+(\partial_rW)^2-\right.
$$

$$(X\partial_r V+W\partial_r W)\partial_r\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)\Big]+$$

$$\frac{1}{4Z\rho}\Big[2X\partial_\theta^2 V+\partial_\theta V\partial_\theta X+2W\partial_\theta^2 W+(\partial_\theta W)^2-$$

$$(X\partial_\theta V+W\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho z}{Y}\right)\Big]+$$

$$\frac{1}{4YZ}[2\partial_r^2 Z+2\partial_\theta^2 Y-\partial_r Z\partial_r(\ln YZ)-\partial_\theta Y\partial_\theta(\ln YZ)],$$

$$E_\varphi^t=-\frac{1}{4Y\rho}\Big[2\partial_r(W\partial_r V-V\partial_r W)-$$

$$(W\partial_r V-V\partial_r W)\partial_r\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)\Big]-$$

$$\frac{1}{4Z\rho}\Big[2\partial_\theta(W\partial_\theta V-V\partial_\theta W)-$$

$$(W\partial_\theta V-V\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho Z}{Y}\right)\Big],$$

$$E_r^r=\frac{1}{4Y\rho}[\partial_r\rho\partial_r(\ln Z)+\partial_r X\partial_r V+(\partial_r W)^2]+$$

$$\frac{1}{4Z\rho}[2\partial_\theta^2\rho-\partial_\theta\rho\partial_\theta(\ln\rho Z)-\partial_\theta X\partial_\theta V-(\partial_\theta W)^2],$$

$$E_\theta^r=-\frac{1}{4Y\rho}[2\partial_r\partial_\theta\rho-\partial_r\rho\partial_\theta(\ln\rho Y)-\partial_r(\ln Z)\partial_\theta\rho-$$

$$(\partial_r X\partial_\theta V+\partial_\theta X\partial_r V+2\partial_r W\partial_\theta W)],$$

$$E_\theta^\theta=\frac{1}{4Y\rho}[2\partial_r^2\rho-\partial_r\rho\partial_r(\ln\rho Y)-\partial_r X\partial_r V-(\partial_r W)^2]+$$

$$\frac{1}{4Z\rho}[\partial_\theta\rho\partial_\theta(\ln Y)+\partial_\theta X\partial_\theta V+(\partial_\theta W)^2],$$

$$E_\varphi^\varphi=\frac{1}{4Y\rho}[2V\partial_r^2 X+\partial_r X\partial_r V+2W\partial_r^2 W+(\partial_r W)^2-$$

$$(V\partial_r X+W\partial_r W)\partial_r\left(\ln\frac{\rho Y}{Z}\right)\Big]+$$

$$\frac{1}{4Z\rho}[2V\partial_\theta^2 X+\partial_\theta X\partial_\theta V+2W\partial_\theta^2 W+(\partial_\theta W)^2-$$

$$(V\partial_\theta X+W\partial_\theta W)\partial_\theta\left(\ln\frac{\rho Z}{Y}\right)\Big]+\frac{1}{4YZ}[2\partial_r^2 Z+2\partial_\theta^2 Y-$$

$$\partial_r Z\partial_r(\ln YZ)-\partial_\theta Y\partial_\theta\ln(YZ)],$$

这里 $\rho=XV+W^2$，$\sqrt{-g}=(\rho YZ)^{1/2}$. 从(3.6.22)和(3.6.24)式，经过冗长的计算，有

$$F_{tr}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(\Gamma_1,\Gamma_1,\Gamma_2+\Gamma_3\hat{r}\cdot\tau/2,-2(\Gamma_1+\Gamma_2)),$$

$$F_{t\theta}=\frac{a\sin\theta}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(\Lambda_1,\Lambda_1,\Lambda_2+\Lambda_3\hat{r}\cdot\tau/2,0),F_{t\varphi}=0,$$

$$F_{\theta\varphi}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(0,0,\Lambda_3(r^2+a^2)\sin\theta\hat{r}\cdot\tau/2,0),$$

$$F_{\varphi r}=\frac{1}{g'\Sigma^2}\mathrm{diag}(0,0,-\Gamma_3 a\sin^2\theta\hat{r}\cdot\tau/2,0),F_{r\theta}=0,$$

$$D_\mu\phi=0,\mu=t,r,\theta,\varphi,D_\mu H=0,\mu=t,r,\theta,\varphi$$

(在推导 $D_\mu H=0$ 时，利用了关系 $B_1=-B_2$)，其中

$$\Gamma_1=b_1(r^2-a^2\cos^2\theta),\Gamma_2=b_2(r^2-a^2\cos^2\theta),$$

$$\Gamma_3=-2ra\cos\theta+b_3(r^2-a^2\cos^2\theta)$$

$$(B_1=-B_2\Rightarrow b_1=-b_2\Rightarrow\Gamma_1+\Gamma_2=0),$$

$$\Lambda_1=-2b_1 ra\cos\theta,\Lambda_2=-2b_2 ra\cos\theta,$$

$$\Lambda_3=-2b_3 ra\cos\theta-(r^2-a^2\cos^2\theta)$$

$$(B_1=-B_2\Rightarrow b_1=-b_2\Rightarrow\Lambda_1+\Lambda_2=0).$$

为了得到能动张量的明显表达式，将用到逆变度规张量 $g^{\mu\nu}$. 按照(3.6.21)式，它们可写为

$$g^{tt}=\frac{V}{\rho},\quad g^{rr}=-\frac{1}{Y},\quad g^{\theta\theta}=-\frac{1}{Z},$$

$$g^{\varphi\varphi}=-\frac{X}{\rho},\quad g^{t\varphi}=-\frac{W}{\rho},\quad \rho=XV+W^2.$$

将上述式子代入(3.6.2)式，可求得能-动张量的非零分量为

$$T_t^t=\frac{3}{64\pi^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\cdot$$
$$\frac{1}{\Sigma^3}(r^2+a^2(1+\sin^2\theta))=-T_\varphi^\varphi,$$

$$T_\varphi^t=-\frac{3}{32\pi^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\cdot$$
$$\frac{1}{\Sigma^3}(r^2+a^2)a\sin^2\theta,$$

$$T_t^{\varphi}=\frac{3}{32\pi^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\cdot\frac{a}{\Sigma^3},$$
$$T_r^r=\frac{3}{64\pi^2}\left(P^2+\frac{2}{3}(Q^2+(C^8)^2)\right)\cdot\frac{1}{\Sigma^3}=-T_\theta^\theta.$$

利用前面所给出的一系列结果,经验证(3.6.24)和(3.6.25)式的确是耦合 EYMH 方程组(3.6.3)的一个严格解.

4 经典黑洞热力学

1973 年，J. D. Bekenstein 指出，可以在黑洞物理学中引入热力学概念——黑洞也具有温度和熵. 黑洞的熵是以它的面积表征的. 与此相联系，我们首先讨论黑洞物理学中最重要的一个定理.

§4.1 经典黑洞的面积不减定理

经典史瓦希黑洞的面积惟一地决定于质量，而经典史瓦希黑洞的质量不可能减少，所以它的面积不减是不言而喻的. 一般黑洞没有这么简单，面积不减这一结论是需要证明的.

面积不减定理的一般证明是霍金于 1972 年给出的.

Penrose 于 1968 年给出一定理，其内容是，黑洞的视界以零短程线为其母线(generator)，沿着逆时间方向母线可能在视界上的某一焦散点(caustic)离开视界而进入外部空间，顺着时间方向母线一旦进入视界将不会再离开视界，而且母线永不相交叉；母线通过视界上任一点(焦散点除外)有一条且仅有一条. 此定理的证明如下.

过视界上任一点都只有一条零短程线. 如果有两条零短程线在视界上一点处相交，则过此点的局部光锥一定要与视界相交，这显然是不可能的. 这表明，视界以零短程线为母线，且母线在视界上永不相交.

如果沿着顺时针方向，母线在视界上一点离开视界，则沿此母线上的点的逆时方向，母线的切矢量就是该点过去局部光锥与

视界的切矢量. 又沿这一母线的顺时方向，母线只能在该点的未来局部光锥面上，由于零短程线在该点的切矢量是惟一的，故沿顺时针方向，该点的母线就是未来局部光锥与视界的切线. 这就证明了，一旦母线进入视界就将永不离开视界.

1. 弯曲时空几何光学

我们认为光波的波长足够短，以致于在局部时空中可以把它看作平面波. 这样，光的传播便遵守几何光学的基本定律.

定义波矢量

$$\kappa_\mu=\frac{\partial\theta}{\partial x^\mu},\ \theta\text{ 为等位相面},$$

可以证明 $\kappa_{\nu;\mu}\kappa^\mu=0.$ (4.1.1)

实际上，我们有

$$\frac{\mathrm{D}\kappa_\mu}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\mathrm{d}\kappa_\mu}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\rho}\kappa_\nu U^\rho=\frac{\partial\kappa_\mu}{\partial x^\rho}\frac{\mathrm{d}x^\rho}{\mathrm{d}\lambda}+\Gamma^\nu_{\mu\rho}\kappa_\nu U^\rho=$$

$$\left(\frac{\partial\kappa_\mu}{\partial x^\rho}+\Gamma^\mu_{\mu\rho}\kappa_\nu\right)U^\rho=\kappa_{\mu;\rho}U^\rho=0,\ (U^\rho\sim\kappa^\rho).$$

矢势可以展开为

$$A_\mu=(a_\mu+\epsilon b_\mu+\epsilon^2c_\mu+\cdots)e^{i\theta(x,t)/\epsilon},\tag{4.1.2}$$

$$\theta=\kappa_\mu x^\mu,$$

其中 $\epsilon\sim\dfrac{\lambda}{L}$，$\lambda\equiv\dfrac{\lambda}{2\pi}$，$\lambda\ll L$，$L$ 即几何光学适用的空间线度.

由广义相对论真空麦克斯韦方程

$$F_{\mu\nu}=A_{\nu;\mu}-A_{\mu;\nu},$$

$$F^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}=0,$$

$$A^\mu_{\ ;\mu}=0,\tag{4.1.3}$$

可以导出 $-A^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}+R^\mu{}_\nu A^\nu=0.$ (4.1.4)

实际上 $F^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}F_{\lambda\rho;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}(A_{\lambda;\rho}-A_{\rho;\lambda})_{;\nu}=$

$$A^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}-A^{\nu\mu}_{\ \ ;\nu}=0.$$

而 $A^{\nu\mu}_{\ \ ;\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}A_{\rho;\lambda\nu}=g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}(-R^\alpha{}_{\rho\lambda\nu}A_\alpha+A_{\rho;\nu\lambda})=$

$$-R^{\alpha\nu\mu}{}_{\nu}A_\alpha+A^{\nu\mu}_{\ \ ;\nu}=-R^{\alpha\nu\mu}{}_\nu A_\alpha.$$

此即(4.1.4)式. 由(4.1.2)式可以得到

$$A^{\mu}{}_{;\nu}=\left[(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)_{;\nu}+\frac{i}{\varepsilon}\kappa_{\nu}(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)\right]e^{i\theta/\varepsilon},$$

$$-A^{\mu\nu}_{;\nu}+R^{\mu}{}_{\nu}A^{\nu}=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\kappa^{\nu}\kappa_{\nu}(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)-\right.$$

$$2\frac{i}{\varepsilon}\kappa^{\nu}(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)_{;\nu}-\frac{i}{\varepsilon}\kappa^{\nu}{}_{;\nu}(a^{\mu}+\varepsilon b^{\mu}+\cdots)-(a^{\mu}+$$

$$\left.\varepsilon b^{\mu}+\cdots)_{;\nu}{}^{\nu}+R^{\mu}_{\nu}(a^{\nu}+\varepsilon b^{\nu}+\cdots)\right]e^{i\theta/\varepsilon}=0.$$

合并同阶项，令其为零，得到

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right),\ \kappa^{\nu}\kappa_{\nu}a^{\mu}=0\text{ 或 }\kappa_{\nu}\kappa^{\nu}=0,$$

此式表明波矢量为零矢量；

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right),\ \kappa^{\nu}\kappa_{\nu}b^{\mu}-2i\left(\kappa^{\nu}a^{\mu}{}_{;\nu}+\frac{1}{2}\kappa^{\nu}{}_{;\nu}a^{\mu}\right)=0.$$

于是得到矢量振幅的传播方程

$$a^{\mu}_{;\nu}\kappa^{\nu}+\frac{1}{2}\kappa^{\nu}{}_{;\nu}a^{\mu}=0. \tag{4.1.5}$$

对标量振幅的传播方程而言，先引入

$$a_{\mu}=af_{\mu},$$

f_{μ} 是单位极化矢量且 $f_{\mu}\cdot f^{\mu}=1$. 则

$$2a\kappa^{\mu}a_{;\mu}=\kappa^{\mu}a^2{}_{;\mu}=\kappa^{\mu}(a_{\nu}a^{\nu})_{;\mu}=\kappa^{\mu}a_{\nu;\mu}a^{\nu}+\kappa^{\mu}a_{\nu}a^{\nu}{}_{;\mu}=$$

$$2\kappa^{\mu}a^{\nu}{}_{;\mu}a_{\nu}=-\kappa^{\mu}{}_{;\mu}a^{\nu}a_{\nu}=-a^2\kappa^{\mu}{}_{;\mu},$$

故得标量振幅的传播方程为

$$\kappa^{\mu}a_{;\mu}=-\frac{1}{2}a\kappa^{\mu}{}_{;\mu}. \tag{4.1.6}$$

我们可以把上式写成一个微分守恒定律

$$\kappa^{\mu}a^2_{;\mu}+a^2\kappa^{\mu}_{;\mu}=0,\text{ 即}(a^2\kappa^{\mu})_{;\mu}=0.$$

取如图 4-13 所示的光束超曲面，应用高斯定理，有

$$\int_{\Sigma}(a^2\kappa^{\mu})_{;\mu}\mathrm{d}\Sigma=\int_{V}(a^2k^{\mu})\mathrm{d}V_{\mu}=$$

$$-\int_{V(1)}(a^2\kappa^{\mu})\mathrm{d}V_{\mu}+\int_{V(2)}(a^2\kappa^{\mu})\mathrm{d}V_{\mu}=0. \tag{4.1.7}$$

式中 Σ 是 4 维体积，V 是 3 维超曲面，侧面与零短程线平行，上下截面(端面)与零短程线垂直. 由此可以得到积分守恒量

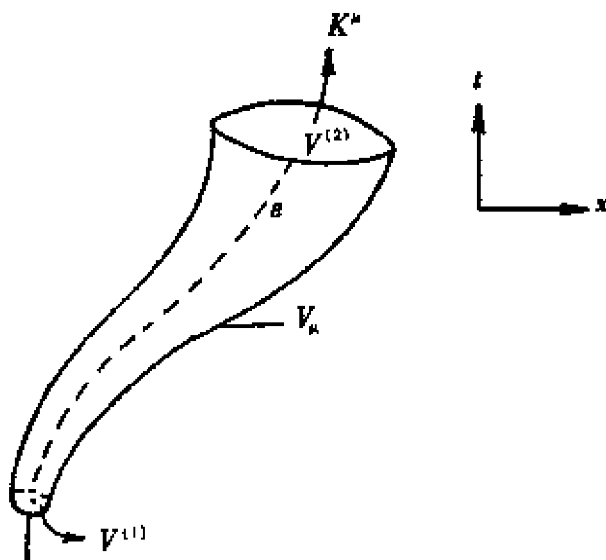


图 4-13

$$\int(a^2\kappa^\mu)\mathrm{d}V_\mu=\text{const}.$$

它在光的传播过程中保持不变，这自然解释为光通量.

对于一个无穷小光束而言，设它在 t_0 时刻的截面或等位相面为 σ，则上述积分守恒量可改写为

$$a^2\sigma=\text{常数}.$$

亦即
$$\frac{\mathrm{d}(a^2\sigma)}{\mathrm{d}\lambda}=(a^2\sigma)_{;\mu}\kappa^\mu=0.$$

式中 λ 是沿某一零短程线的仿射参量.

利用(4.1.6)式即得在光束传播过程中，光束截面积的变化规律

$$\kappa^\mu\sigma_{;\mu}=\kappa^\mu{}_{;\mu}\sigma. \tag{4.1.8}$$

最后，我们由自由电磁场方程和 Einstein 引力场方程来推导一个重要的几何光学定理，即光线束聚焦定理

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda^2}=-\left(\delta^2+\frac{1}{2}R_{\mu\nu}\kappa^\mu\kappa^\nu\right)\sigma^{1/2}. \tag{4.1.9}$$

式中
$$\delta^2\equiv\frac{1}{2}\kappa_{\mu;\nu}\kappa^{\nu\,\mu}-\frac{1}{4}(\kappa^\mu{}_{;\mu})^2.$$

实际上我们有

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{1/2}}{\mathrm{d}\lambda}=\kappa^\mu(\sigma^{1/2})_{;\mu}=\kappa^\mu\sigma_{;\mu}\frac{1}{2}\sigma^{-1/2}=$$

$$(\kappa^{\mu}{}_{\mu})\sigma\cdot\frac{1}{2}\sigma^{-1/2}=\frac{1}{2}(\kappa^{\mu}{}_{;\mu})\sigma^{1/2},$$

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2}=\frac{1}{2}[(\kappa^{\mu}{}_{;\mu})\sigma^{1/2}]_{;\nu}\kappa^{\nu}=$$

$$\frac{1}{2}[(\kappa^{\mu}{}_{;\mu})_{;\nu}\kappa^{\nu}\sigma^{1/2}+\kappa^{\mu}{}_{\mu}(\sigma^{1/2})_{;\nu}\kappa^{\nu}]=$$

$$\frac{1}{2}\left[(\kappa^{\mu}{}_{;\mu\nu})\kappa^{\nu}+\frac{1}{2}(\kappa^{\mu}{}_{\mu})^2\right]\sigma^{1/2}=$$

$$\frac{1}{2}\left[(\kappa^{\mu}{}_{;\nu\mu})\kappa^{\nu}-R^{\mu}{}_{\alpha\nu\mu}\kappa^{\alpha}\kappa^{\nu}+\frac{1}{2}(\kappa^{\mu}{}_{;\mu})^2\right]\sigma^{1/2}.$$

又由　$\kappa^{\mu}{}_{;\nu}\kappa^{\nu}=0$ 得 $(\kappa^{\mu}{}_{;\nu}\kappa^{\nu})_{;\mu}=0=\kappa^{\mu}{}_{;\nu\mu}\kappa^{\nu}+\kappa^{\mu}{}_{;\nu}\kappa^{\nu}{}_{;\mu}$

或　$\kappa^{\mu}{}_{;\nu\mu}\kappa^{\nu}=-\kappa^{\mu}{}_{;\nu}\kappa^{\nu}{}_{;\mu}$,

以之代入上式即得(4.1.9)式. 现引入能量正定条件

$$T_{00}\geqslant 0,$$

在(4.1.9)式中 $\delta^2=\frac{1}{2}\kappa_{\mu;\nu}\kappa^{\nu;\mu}-\frac{1}{4}(\kappa^{\mu}{}_{;\mu})^2$ 是一个广义协变标量，引入局部惯性系后，可令 $\kappa_{\mu}=(\kappa_0, \kappa_3)$，$\kappa^{\mu}=(\kappa_0, -\kappa_3)$，

$$\delta^2=\frac{1}{4}(\kappa_{0,0}-\kappa_{0,3})^2\geqslant 0,$$

而　$$R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}=\left(\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}+\kappa T_{\mu\nu}\right)\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}=$$

$$\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}+\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}=\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}.$$

上述不变量在局部随动惯性系中，$T_{03}=T_{30}=0$.

$$\kappa T_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}=\kappa(T_{00}\kappa_0\kappa_0+T_{33}\kappa_3\kappa_3)=\kappa(T_{00}+T_{33})\kappa_0^2.$$

考虑到 $T_{00}=\rho c^2$ 是能量密度，T_{33}是压强 p. 已知的物态均满足 $\rho c^2\gg p$，故仅须 T_{00}或能密度非负，即有

$$R_{\mu\nu}\kappa^{\mu}\kappa^{\nu}\geqslant 0 \text{（所谓零会聚条件）},$$

这就最后证明了

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2}\leqslant 0. \tag{4.1.10}$$

即光束截面增长率$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}$沿光束传播方向永不增加.

下面我们证明霍金的面积不减定理：若宇宙监督原理成立，能量正定条件成立，则沿着时间方向，所有黑洞的总面积永不减少.

实际上，可以把视界上的母线分成无限多个无穷小线束，对于任一线束有(4.1.10)式，即

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2}\leqslant 0 \text{ 或 } \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right)\leqslant 0,$$

设当 $\lambda=\lambda_0$ 时，$\left.\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}<0$，在此点 $\sigma^{1/2}(\lambda)$ 曲线单调下降，则当 $\lambda_1>\lambda_0$ 时，应有

$$\left.\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right|_{\lambda_1>\lambda_0}\leqslant\left.\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}.$$

所以在 λ_1 点，曲线仍然单调下降. 又因为

$$\frac{d^2\sigma^{1/2}}{d\lambda^2}\leqslant 0,$$

所以曲线还是凸的，肯定要与 λ 轴相交. 这就是说，经过有限长时间〔对应于$(\lambda-\lambda_0)$〕，使得 $\sigma^{1/2}=0$，在视界上同一线束中的诸多条母线互相交叉，这违背 Perose 定理. 因此，要么是由于我们的假设$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}<0$ 不合理；要么线束中的母线在交叉之前已落入奇点，这导致奇点裸露，不符合宇宙监督原理. 既然前提是遵守宇宙监督原理和 Penrose 定理，就只能是$\frac{d\sigma^{1/2}}{d\lambda}\geqslant 0$. 即任一母线束的截面积在顺时针方向不减少，故整个视界面积(线束截面面积之和)永不减少，于是证明了黑洞视界面积不减定理.

§4.2 经典黑洞的温度和熵

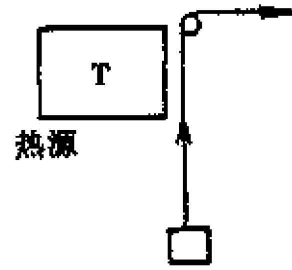
考虑一个由热源、冷源和工作物质组成的热机(Geroch 引力热机)，如图 4-14 所示.

冷源：克尔-纽曼黑洞.

热源：距黑洞无限远处一个含有(温度为 T 的)黑体辐射的大热库.

工作物质：盒子和缆绳.

循环过程：盒子由热源处装满热辐射，缓慢地移到黑洞视界附近，这一过程系统（引力）对外作功 A_1；打开盒子，将质量为 $\delta\mu$ 的辐射注入黑洞；盒子关上，缓慢地升至热库处，这一过程外界对系统作功 A_2.



在一个循环过程中，系统对外界作功 (A_1-A_2). 从热源吸出热量 $Q=\delta\mu$. 此热机的效率为

$$\eta=\frac{A_1-A_2}{Q}=\frac{A_1-A_2}{\delta\mu}. \quad (4.2.1)$$

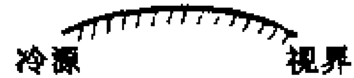


图 4-14

设盒子（静止的）中心与黑洞视界的固有距离为 d，我们下面将证明，这时盒子和黑洞的结合能为

$$B=\mu(1-\kappa d). \quad (4.2.2)$$

式中 μ 为盒子在渐近平直空间的质量，κ 是黑洞表面的引力加速度，d 远小于黑洞半径. 我们有

$$A_1=B=\mu(1-\kappa d),$$

$$A_2=(\mu-\delta\mu)(1-\kappa d),$$

$$A_1-A_2=\delta\mu(1-\kappa d),$$

于是(4.2.1)给出效率

$$\eta=1-\kappa d. \quad (4.2.3)$$

下面证明式(4.2.2).

有电磁场存在时，质点的哈米顿主函数

$$S=\int L\mathrm{d}\tau$$

满足哈米顿-雅可比方程

$$g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial S}{\partial x^\mu}-eA_\mu\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^\nu}-eA_\nu\right)+\mu^2=0. \quad (4.2.4)$$

式中 e 和 μ 分别为荷电质点的电荷和静质量，A_μ 为电磁 4 矢，τ 为固有时. L 可写为

$$L=\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}\dot{x}^{\mu}. \tag{4.2.5}$$

于是广义动量可写为

$$P_{\mu}=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\mu}}=\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}. \tag{4.2.6}$$

克尔-纽曼时空有两个 Killing 矢量：$\frac{\partial}{\partial t}$和$\frac{\partial}{\partial \varphi}$. 广义动量的 4 个分量可表为

$$\begin{aligned}
P_r&=\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R(r),\\
P_\theta&=\frac{\partial S}{\partial \theta}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}H(\theta),\\
P_\varphi&=\frac{\partial S}{\partial \varphi}=m,\\
P_t&=\frac{\partial S}{\partial t}=-\omega,
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

式中 $R(r)$和 $H(\theta)$分别表示分离变量后的径向函数和横向函数，m 为磁量子数，ω 为质点能量. 分离变量后，径向方程和横向方程具有形式

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)^2-\frac{1}{\Delta}\{-\omega(r^2+a^2)+Ma+Qer\}^2+\mu^2r^2=-K, \tag{4.2.8}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)^2+\left(\frac{M}{\sin\theta}-a\omega\sin\theta\right)^2+\mu^2a^2\cos^2\theta=K. \tag{4.2.9}$$

式中 M, Q 和 a 分别为黑洞的质量，电荷和比角动量，K 为分离变量常数，

$$\Delta=(r-r_+)(r-r_-)=r^2+a^2+Q^2-2Mr, \tag{4.2.10}$$

$$r_\pm=M\pm\sqrt{M^2-a^2-Q^2}. \tag{4.2.11}$$

把(4.2.7)代入(4.2.8)，得到

$$\{\omega(r^2+a^2)-(aP_\varphi+Qer)\}^2=(P_r\Delta)^2+(\mu^2r^2+K)\Delta. \tag{4.2.12}$$

解此方程，得到

$$\omega=(\Omega P_\varphi+eV_0)\pm\frac{1}{r^2+a^2}\{(P_r\Delta)^2+(\mu^2r^2+K)\Delta\}^{1/2}. \tag{4.2.13}$$

式中 $\Omega=\frac{a}{r^2+a^2}$, $V_0=\frac{Qr}{r^2+a^2}$. (4.2.14)

对于无限远处的观测者，相对克尔-纽曼黑洞视界面静止的质点满足

$$r=\text{const}, \theta=\text{const}, \varphi=-\frac{g_{03}}{g_{33}},$$

$$P_r=P_\theta=0,$$

$$P_\varphi=\mu U_3=\mu g_{3\alpha}U^\alpha=\mu\left(g_{03}\frac{dt}{d\tau}+g_{33}\frac{d\varphi}{d\tau}\right)=0. \quad (4.2.15)$$

由此可知 $m=0$, (4.2.16)

即在拖曳系中观测，质点不转动. 考虑不带电质点的正能态，(4.2.13)简化为

$$\omega=\frac{1}{r^2+a^2}\{(\mu^2r^2+K)\Delta\}^{1/2}. \quad (4.2.17)$$

设 δ 很小，且有

$$r=r_++\delta, \quad (4.2.18)$$

则

$$r^2+a^2\approx(r_-^2+a^2)\left(1+\frac{2r_+\delta}{r_-^2+a^2}\right),$$

$$\mu^2r^2+K\approx(\mu^2r^2+K)\left(1+\frac{2r_+\delta\mu^2}{\mu^2r_+^2+K}\right),$$

$$\Delta\approx2\delta(r_+-M). \quad (4.2.19)$$

将上式代入(4.2.17)，略去高阶小量，得到

$$\omega\approx\frac{(\mu^2r_+^2+K)^{1/2}}{r_+^2+a^2}\{2\delta(r_--M)\}^{1/2}. \quad (4.2.20)$$

式中 δ 为坐标距离，应该用固有距离表之. 固有距离(纯空间距离)具有形式

$$dl^2=r_{ij}dx^idx^j=g_{11}dr^2+\left(g_{33}-\frac{g_{03}^2}{g_{00}}\right)d\varphi^2. \quad (4.2.21)$$

将克尔-纽曼度规代人上式，并注意 $\Delta\sim\delta\to0$，得到

$$dl\approx\frac{\rho}{\Delta^{1/2}}dr. \quad (4.2.22)$$

与 δ 对应的固有距离是

$$d=\int_{r_+}^{r_++\delta}\frac{\rho}{\Delta^{1/2}}dr\approx\left\{\frac{r_+^2+a^2\cos^2\theta}{r_+-r_-}\right\}^{1/2}\int_{r+}^{r_++\delta}(r-r_+)dr.$$

$$(4.2.23)$$

注意我们用了 δ 很小这一近似条件，下面不再写近似于的符号，

$$d=2\delta^{1/2}\left\{\frac{r_+^2+a^2\cos^2\theta}{r_+-r_-}\right\}^{1/2}, \tag{4.2.24}$$

$$\delta=\frac{d^2(r_+-r_-)}{4(r_+^2+a^2\cos^2\theta)}. \tag{4.2.25}$$

代 入(4.2.20)，得到

$$\omega=\kappa d\left\{\frac{\mu^2r_+^2+K}{r_+^2+a^2\cos^2\theta}\right\}^{1/2}. \tag{4.2.26}$$

式中 $$\kappa=\frac{r_+-r_-}{2(r_+^2+a^2)} \tag{4.2.27}$$

为视界表面的引力加速度.

由(4.2.15～16)和(4.2.9)可得

$$K=\omega^2a^2\sin^2\theta+\mu^2a^2\cos^2\theta, \tag{4.2.28}$$

代入(4.2.26)，得到

$$\omega=d\kappa\left\{\mu^2+\frac{\omega^2a^2\sin^2\theta}{r_+^2+a^2\cos^2\theta}\right\}^{1/2}. \tag{4.2.29}$$

由(4.2.26)知 ω 和 d 是同阶小量，故右端括号中第二项与第一项比较可略去，于是有

$$\omega=\mu\kappa d. \tag{4.2.30}$$

此即视界面附近一质点具有的引力势能(无限远处观测). 此质点若静止于无限远处，其能量为 μ，因此，当此质点静止于视界面附近时，其引力结合能为.

$$B=\mu-\omega=\mu(1-\kappa d).$$

此即式(4.2.2).

下面我们继续讨论 Geroch 引力热机的效率(4.2.3). 当 $d\to 0$，则 $\eta\to 1$. Geroch(1971)由此指出第二类永动机的可能性. 但是 Bekenstein(1973)指出，量子力学原理不允许 $b=0$，给出了盒子大小的下限，因此效率仍然小于 1.

假设盒子是边长为 a 的正方体，盒内充满温度为 T 的热辐射. 显然热辐射的最大波长为

$$\lambda_{\max}=l,$$

或 $$\nu_{\min}=c/l.$$

根据维恩位移定律，

$$\nu_m^w=2.822kT/h.$$

式中 k 为波尔兹曼常数．我们有

$$\nu_{\min}<\nu_m^w,$$

即 $$\frac{1}{2}>\frac{\beta}{T},\ \beta=\frac{2\pi\hbar c}{2\times 2.822k}\simeq\frac{\hbar c}{k}.$$

于是有 $$d>\frac{l}{2}>\frac{\beta}{T}.$$

代入(4.2.3)，得到

$$\eta<1-\frac{\beta\kappa}{T}. \tag{4.2.31}$$

另一方面，由卡诺定理知道

$$\eta<1-\frac{T_B}{T}. \tag{4.2.32}$$

式中 T_B 为黑洞(冷源)的温度．人们发现，式(4.2.31)和(4.2.32)惊人地相似，黑洞具有温度

$$T_B=\beta\kappa, \tag{4.2.33}$$

$$T_B=\beta\kappa/c^2=\hbar\kappa/ck.\ \text{(CGS 单位)} \tag{4.2.34}$$

此式表明，黑洞的热力学量和它的引力参量有着密切的联系．由于式中还含有普朗克常数，此式还表明黑洞温度还具有量子论方面的性质．

由上面的讨论可知，式(4.2.34)适用于克尔黑洞和克尔-纽曼黑洞．对于史瓦希黑洞这一特殊情况，我们有

$$\kappa=\frac{c^4}{4GM},\ \beta=\frac{\hbar c}{k},$$

$$T_B=\frac{\hbar c^3}{4GMk}\sim 10^{-7}\frac{M_\odot}{M}. \tag{4.2.35}$$

此式表明史瓦希黑洞的温度由其引力质量惟一确定．质量越大的黑洞，温度越低．当 $M\sim M_\odot$，则 $T_B\sim 10^{-7}$K．可见质量大的黑洞温度接近绝对零度．而当 $M\sim 10^{15}$g，$T_B\sim 10^{12}$K．可见原初小黑

洞的温度极高，约为太阳中心温度($\sim 10^7$K)的 10 万倍.

黑洞具有非零温度，按热力学第二定律，黑洞应该有辐射，即黑洞不是黑的，这与经典黑洞理论矛盾. 要解决这一矛盾，必须突破经典(非量子)的概念. 1974 年，霍金论证了黑洞的量子辐射，从而解决了这一矛盾. 我们将在第 6 章中专门讨论黑洞的量子辐射.

现在我们继续讨论建立在黑洞温度概念基础上的黑洞热力学问题.

在热力学中，可以证明，对于一个转动物体有

$$\delta M = T\delta S + \Omega\delta J. \tag{4.2.36}$$

考虑到(4.2.33)，式(3.3.2)可写为

$$\delta M = T\delta\left(\frac{A}{8\pi\beta}\right) + \Omega\delta J. \tag{4.2.37}$$

比较上二式，可认为黑洞作为一热力学系统，具有熵

$$S_B = \frac{A}{8\pi\beta}. \tag{4.2.38}$$

黑洞的熵与其表面积成正比，即与其引力半径的平方或质量平方成正比. 因此，一颗恒星的质量为 M，熵为 S_M，，则坍缩成黑洞后，其熵与原来的熵之比为

$$\frac{S_B}{S_M} = \alpha M. \tag{4.2.39}$$

对于太阳，$S_\odot \approx 10^{42}$erg/K，当 $M_B = M_\odot$时，有 $S_B \approx 10^{60}$erg/K，所以

$$\frac{S_B}{S_\odot} = \alpha M_\odot = 10^{18},$$

从而有 $\alpha = 10^{18}/M_\odot$.

(4.2.39)具体化为

$$\frac{S_B}{S_M} = 10^{18}\frac{M}{M_\odot}. \tag{4.2.40}$$

可见恒星坍缩为黑洞的过程中熵增加，信息量减少.

Bekenstein 曾指出，在上式中令

$$S_B/S_M = 1,$$

得到

$$M_{\min}^{B}=10^{15}\mathrm{g}\,,\; r_{\min}\approx 10^{-13}\mathrm{cm}. \tag{4.2.41}$$

这是可以坍缩为黑洞的恒星质量下限，就是原初小黑洞的质量下限. 这类最小的原初小黑洞所含核子数为 10^{39}，恰等于静电力与引力的比值，它的寿命恰等于宇宙的年龄. 这些看似巧合的事情究竟反映了自然界的什么内容规律至今尚不清楚.

§4.3 黑洞热力学的基本定律

前面的讨论可以总结为黑洞热力学的四条基本定律.

1. 热力学第零定律

黑洞可以定义温度. 由于稳态黑洞的表面引力加速度在视界面上是恒定的，因此可以按(4.2.33)定义温度.

2. 热力学第一定律

$$\delta M=T\delta S+\Omega\delta J+V\mathrm{d}Q.$$

式中 $T=\beta\kappa,\ S=\dfrac{A}{8\pi\beta},\ V=\dfrac{r_+Q}{r_+^2+a^2}.$

3. 热力学第二定律

$$\delta(S_B+S_m)\geqslant 0.$$

式中 S_m 为黑洞周围物质的熵. 即含黑洞的系统的总熵沿顺时方向永不减少.

4. 热力学第三定律

不可能通过任何有限步骤把黑洞的表面引力加速度 κ 降到零.

下一章将讨论黑洞热力学的量子修正，假定读者已经熟悉热力学中各个量和各个方程，熟悉统计和量子场论的知识，还有本书第一篇中的数学知识.

5 黑洞热力学的量子理论

§5.1 离壳与即壳

按照黑洞物理中的热力学类比，爱因斯坦引力理论中的黑洞熵(4.2.38)可写为

$$S^{\mathrm{BH}}=\frac{A^{H}}{4l_{p}^{2}}, \tag{5.1.1}$$

式中 A^{H} 是黑洞视界面积，$l_{p}=(\hbar G/c^{3})^{1/2}$是普朗克长度[55]. 在黑洞物理中，Bekenstein-Hawking 熵 S^{BH}的基本地位与普通热力学中的相同. 它可以由含黑洞系统的自由能对系统温度的偏导数决定. 在欧氏方案中[6]，自由能直接与真空爱因斯坦方程的规则欧氏解(Gibbons-Hawking 瞬子)的欧氏作用量相联系. 按照热力学第一定律，黑洞的热力学熵定义为

$$\mathrm{d}F=-S^{TD}\mathrm{d}T. \tag{5.1.2}$$

式中 T 为系统温度，自由能既含经典(主级)贡献，又含量子(单圈)修正. 因此，热力学熵除了含经典(主级)部分 S^{BH}以外，还应含有量子修正 S_{1}^{TD}：

$$S^{TD}=S^{\mathrm{BH}}+S_{1}^{TD}. \tag{5.1.3}$$

为了得到 S^{TD}，须比较两个平衡位形，为此，通常确定 S^{TD}的计算都以规则 G-H 瞬子作为背景度规. 这种计算方法称为即壳(on shell)方法.

黑洞热力学的基本问题是其统计力学基础. 这个问题包括三部分：(1)定义黑洞的内在自由度；(2)计算统计力学熵

$S^{SM}=-Tr(\hat{\rho}^H\ln\hat{\rho}^H)$，密度矩阵 $\hat{\rho}^H$ 描述动力学自由度；(3)建立 S^{SM}和 S^{TD}之间的关系[55].

为避免歧义，我们使用了"统计力学熵"，以强调 S^{SM}是按统计力学规则计算得到的. 至于密度矩阵 $\hat{\rho}$，其形式和性质依赖于具体模型，本章我们考虑一类模型，黑洞的内部自由度就是其量子激发，这种想法最近有不少文献采用. 这类模型的共同特点是所考虑的 $\hat{\rho}$ 是热的，有大量文章就各种黑洞模型计算了统计力学熵. 我们下面力图阐明这些计算结果和可观测的热力学黑洞熵 S^{TD}之间的关系.

应该指出，对于黑洞，S^{TD}和 S^{SM}之间的关系并不简单. 通常的热力学系统，$S^{TD}=S^{SM}$. 而黑洞具有与其他热力学系统不同的性质. 在热平衡态下，黑洞质量 M 是温度 T 的普适函数. 但是质量惟一决定黑洞几何，从而决定了描述其量子激发的哈米顿的内禀参数. 这个性质带来两个后果：(1)S^{TD}与 S^{SM}对黑洞来说是不相同的；(2)计算 S^{SM}并与 S^{TD}比较要用离壳(off shell)方法. 这就是必须把温度 T 和黑洞质量 M 看成独立参数. 这导致当 $T\neq T^{BH}\equiv(8\pi M)^{-1}$时，不存在规则真空欧氏解. 这样，只能考虑非真空引力场方程解的背景度规，或者去掉视界附近的时空，使解不完整，二者必居其一. 在这两种情况下，自由能的计算都会遇到问题，甚至其结果会依赖于具体离壳方法的选择.

下面我们将给出黑洞熵不同定义之间的关系. 我们还将讨论并比较各种离壳方法(砖墙，顶角奇异性，钝锥，体积截断)，以及它们与即壳方法之间的联系. 我们就一个简化了的 2 维模型说明这些联系. 这是因为在这简化模型中所有计算都能精确进行. 可以明显给出热力学熵与统计力学熵不同，我们可以找到单圈修正的 S^{TD}和 S^{SM}之间的关系. 其中一主要结果是，在所考虑的 2 维模型中，量子场对热力学熵的单圈贡献 S_1^{TD} 可写成

$$S_1^{TD}=S^{SM}-S_{\rm Rin}^{SM}+\Delta S. \qquad (5.1.4)$$

式中 $S_{\rm Rin}^{SM}$是在 Rindler 空间所计算的统计力学熵，ΔS 是一附加的有限修正，来源于量子效应引起的视界改变. 用砖墙和体积截断

方法所计算的熵直接和 S^{SM} 相关，它正比于 $\ln\epsilon$，在 2 维情况下是发散的，其中 ϵ 是离视界的距离. 另一方面，用顶角奇异性和钝锥方法计算的熵与 $(S^{SM}-S^{SM}_{Rin})$ 相符. 因为 S^{SM} 中的对数发散项恰好与 Rindle 熵中的发散项抵消，所以它是有限的.

如所知，决定自由能的单圈有效作用量含局域紫外发散. 为了得到定义很好的有限量，须重整化. 通常假设裸经典作用量所包含的局域结构与单圈计算中出现的相同. 在重整化过程中，通过对经典作用量中耦合常数的重新定义，可以去掉局域单圈发散性. 在我们的讨论中，假设此重整化一开始就已完成，我们把重整化的可观测量当作即壳解的参数，这时，重整化的单圈有效作用量是有限的. 影响此解的量子修正可视为对大质量(远大于普朗克质量)黑洞的微扰，我们发现，用可观测参数表示的所有黑洞热力学特征量都是有限的，且其定义不需要普朗克尺度的物理知识. 下面我们首先重温欧氏方案的主要特征，并给出我们要讨论的熵的一般定义，然后讨论 2 维模型和即壳、离壳方案.

§5.2 欧氏方案和热力学熵

用欧氏方案解决黑洞热力学问题的出发点是配分函数 $Z(\beta)$ 和有效作用量 $W(\beta)$. 一个有黑洞存在的系统，其自由能由路径积分定义：

$$e^{-W(\beta)}=Z(\beta)=\int[\mathrm{D}\phi]e^{-I[\phi]},\qquad(5.2.1)$$

式中 $I[\phi]$ 是欧氏经典作用量，而所有的物理量 ϕ，包括引力场 $g_{\mu\nu}$，在欧氏时间 τ 上都假定为周期性的或反周期性的(依赖于统计)，周期为 β_∞. (5.2.1)中的度规是渐近平直的，参数 β_∞ 的倒数是空间无穷远处测得的温度. 假定积分测度 $[\mathrm{D}\phi]$ 是协变测度.

计算 W 的标准方法是用半经典近似. 若 ϕ_0 是 $I[\phi]$ 的稳态点，

即若
$$\left.\frac{\delta I}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_0}=0,\qquad(5.2.2)$$

则有分解式 $I[\phi_0+\tilde{\phi}]=I[\phi_0]+I_2[\tilde{\phi}]+\cdots$，　　　　(5.2.3)

式中 I_2 是线性化作用量中对涨落 $\tilde{\phi}$ 是二阶的部分，而省略号代表 $\tilde{\phi}$ 的高阶项. 由此可得

$$Z(\beta)=e^{-I[\phi_0]}\int[\mathrm{D}\tilde{\phi}]e^{-I_2[\tilde{\phi}]}\equiv e^{-I[\phi_0]}Z_1(\beta). \qquad (5.2.4)$$

式中对 $\tilde{\phi}$ 的高斯积分可用相应的波算符 D_j 的行列式表示：

$$Z_1(\beta)\equiv Z_1[\phi_0(\beta)]=\prod_j\{\det[-\mu^2 D_j(\phi_0)]\}^{\mp 1/2}. \qquad (5.2.5)$$

算符 D_j 由作用量的二阶部分 $I_2=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\ \sqrt{g}\ \tilde{\phi}D_j\tilde{\phi}$ 决定，其显式依赖于自旋 j. 例如，对于 d 维空间中共形不变的无质量标量场，$D_0=\Delta-(d-2)[4(d-1)]^{-1}R$. 式中 $\Delta=\nabla_\mu\nabla^\mu$ 是拉普拉斯算符，R 是标曲率. 常数 μ^2 是一任意的重整化参数，量纲为长度，且不依赖于场位形 ϕ. 由(5.2.5)可以写出单圈近似下的有效作用量：

$$W(\beta)=I[\phi_0(\beta)]-\ln Z_1(\beta)\equiv I[\phi_0(\beta)]+W_1[\phi_0(\beta)]. \qquad (5.2.6)$$

单圈贡献 $W_1[\phi_0]$ 是紫外发散的，且像通常一样，经典作用量这样选择，使得只要重新定义 I 中的耦合常数，就能去掉 W_1 中相应的局域发散性. 现在，我们假定这些程序已经完成，且经典作用量是用重整化参数写出来的，ϕ_0 为其极值点. W_1 是重整化的单圈作用量. (5.2.5)中参数 μ 选择的任意性对应于重整化后作用量可附加一有限部分.

为了把这个一般方案运用于黑洞情况，我们假设黑洞不旋转，不荷电，且不存在对称性破缺，使得所有场的平均值除引力场外均为零，而且，为了给出引力场(真空)方程的渐近平直解，取重整化宇宙常数为零. 其解代表一个 Gibbons-Howking 瞬子，它在欧氏视界处规则. 在爱因斯坦理论中，此瞬子由史瓦希度规描述，且只依赖于一个常数，即黑洞质量 m，这一度规在视界处规则的具体含意是 $\beta_\infty=\beta_H=8\pi m$.

当考虑量子修正时，须记住，对给定边界条件(τ 上的周期性)的系统，黑洞与周围的热辐射处于平衡状态，而此辐射也将对可观测的热力学量有贡献. 对于无限大尺度的热澡(heat bath)，此贡献是无限大，而且黑洞与无限大热澡的平衡是不稳定的. 因此，必须从一开始就考虑由一有限尺度的边界面 B 包围的黑洞. 我们假定此面不能被场穿透. 这一点可以由相应的边界条件保证. 为简单起见，设 B 是球面，半径为 r_B，黑洞位于球心处. 对于史瓦希黑洞，若 $r_B<3m$，则热稳定性便得到保证. 最后，在这一问题的描述中，参数 β 是在 B 上测得的温度的倒数. 另外，我们假定所有必要的要求都已达到，不再重复讨论.

(5.2.6)中的重整化有效作用量 W 是由一个特殊的经典解计算得到的. 它本身由泛函定义：

$$W[\phi]=I[\phi]+W_1[\phi], \tag{5.2.7}$$

其中场 ϕ 任意，边界条件已选定. 极值点

$$\left.\frac{\delta W}{\delta\phi}\right|_{\phi=\bar{\phi}}=0 \tag{5.2.8}$$

描述一修正的场位形；与经典解之差为量子修正：$\bar{\phi}=\phi_0+\hbar\,\phi_1$. 须强调的是，如果对单圈效应感兴趣，$\phi_0$ 和$\bar{\phi}$的 W 值之差将是普朗克常数 $\hbar$ 的二阶项：

$$W(\beta)=W[\phi_0(\beta)]=W[\bar{\phi}(\beta)]+o(\hbar^2). \tag{5.2.9}$$

这可由(5.2.8)式得出，只要量子修正解和经典解满足同样的边界条件.

r_B 固定，自由能 $F(\beta)=\beta^{-1}W(\beta)$对温度倒数 β 的变化便可确定黑洞的热力学熵：

$$S^{TD}(\beta)=\beta^2\frac{\mathrm{d}F(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}-1\right)W(\beta). \tag{5.2.10}$$

我们记得，重整化有效作用量 $W(\beta)$是即壳计算的，即 $\beta_\infty=8\pi m$. 热力学熵可写为

$$S^{TD}=S^{TD}_0+S^{TD}_1. \tag{5.2.11}$$

可以证明[49]，

$$S^{TD}_{0}=\left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}-1\right)I[\phi_0(\beta)] \tag{5.2.12}$$

就是(5.1.1)给出的 B-H 熵 S^{BH}，而

$$S^{TD}_{1}(\beta)=\left(\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}-1\right)W_1[\phi_0(\beta)] \tag{5.2.13}$$

表示量子修正. 此修正也含黑洞外热辐射的熵. 由构成来看，热力学熵 S^{TD}定义得很好且有限. 所有的计算都是即壳的，即在一引力场方程的规则完整欧氏解上做出的. 此解的参数仅由重整化耦合常数表示.

§5.3 模型描述:即壳结果

在 4 维情况下，S^{TD}_{1}的计算相当复杂，为了讨论 S^{TD}_{1}的性质及其与 S^{SM}的联系，我们考虑一个能够精确计算的简化 2 维模型. 虽然这些量的 2 维和 4 维显式不同，但研究 2 维模型可以对 4 维情况做出一些确定的结论. 为保留与 4 维情况最大限度的相似性，我们考虑 2 维 dilaton 引力. 其作用量为

$$I=-\frac{1}{4}\int_{M^2}[r^2R+2(\nabla r)^2+2]\sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}^2x-\frac{1}{2}\int_{\partial M^2}r^2(k-k_0)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int\sqrt{\gamma}\,\varphi_{,\mu}\varphi^{,\mu}\mathrm{d}x. \tag{5.3.1}$$

2 维度规 γ, dilaton 场 r 和标量场 φ 是这一问题的动力学变量. R 为 γ 的曲率，k 为 ∂M^2 的外曲率. 若标量场 φ 不存在，此作用量可由 4 维欧氏爱因斯坦作用量

$$I^{(4)}=-\frac{1}{16\pi}\int_{M^4}R^{(4)}\sqrt{g}\,\mathrm{d}^4x-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M^4}(K^{(4)}-K^{(4)}_0)\sqrt{h}\,\mathrm{d}^3x \tag{5.3.2}$$

通过球对称度规

$$\mathrm{d}s^2=\gamma_{ab}\mathrm{d}x^a\mathrm{d}x^b+r^2\mathrm{d}\omega^2 \tag{5.3.3}$$

退化得到. 这里 γ_{ab}是 2 维度规，r 是 2 维流形上的标函数，$\mathrm{d}\omega^2$ 是单位球上的线元，$K^{(4)}_0$ 是标准删除项，且 $k_0=K^{(4)}_0$.

由于 2 维作用量与 4 维作用量是退化相关的，场对(γ_0, φ_0)显然是泛函 I 的极值点，其中 $\varphi_0=0$；γ_0 是 2 维史瓦希度规

$$ds^2=f d\tau^2+f^{-1}dr^2,\ f=1-r_+/r. \tag{5.3.4}$$

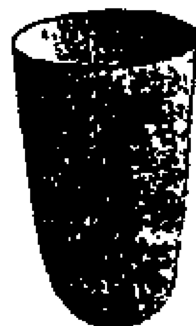


图 4-15(a)

$r=r_+$处的规则化条件要求 τ 是周期性的，且周期为 $\beta_H=4\pi r_+$. 具有度规(5.3.4)的 G-H 瞬子，即规则完整欧氏流形，如图 4-15(a)所示.

考虑 G-H 瞬子上外边界 $\Sigma_B(r=r_B$，见图 4-15(b))内的区域 M_B. 若在面 Σ_B 上固定边界条件，而 β 是线 $r=r_B$ 的固有长度，则由边界条件(β, r_B)表示的区域 M_B 的经典欧氏作用量为

$$I(\beta, r_B)=I[\gamma_0, \varphi_0]=3\pi r_+^2-4\pi r_+ r_B+\beta r_B. \tag{5.3.5}$$

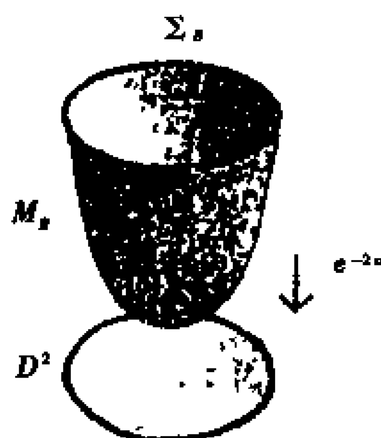


图 4-15(b)

式中 r_+由下式定义：

$$\beta=4\pi r_+(1-r_+/r_B)^{1/2}. \tag{5.3.6}$$

β 为 r_B 处温度的倒数. 当 $r_B\to\infty$时，$\beta=4\pi r_+$. 经典作用量简化为

$$I(\beta)=\frac{1}{16\pi}\beta^2. \tag{5.3.7}$$

按照§5.2 中的一般讨论，有效作用量的单圈贡献为

$$W_1(\beta)=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta). \tag{5.3.8}$$

这里，重整化的行列式是在 2 维瞬子(5.3.4)的区域 M_B 上计算的. 为了具体讨论，我们假定场 φ 在包围黑洞的边界 Σ_B 上遵从狄里赫利边界条件. 作用量中去掉的发散项是

$$W_1^{\rm div}[M_B]=-\frac{1}{8\pi\delta}\int_{M_B}\sqrt{\gamma}\,d^2x+\frac{\ln\delta}{12}\chi[M_B], \tag{5.3.9}$$

$$\chi[M_B]=\frac{1}{4\pi}\left(\int_{M_B}R\sqrt{\gamma}\,d^2x+2\int_{\Sigma_B}k\sqrt{h}\,dy\right). \tag{5.3.10}$$

式中 δ 是紫外规则化参数，$\chi[M_B]$是 G-H 瞬子 M_B 的欧拉示性数. 为了去掉体积发散性 $\sim\int_{M_B}$，须在裸经典作用量中引入宇宙

常数 λ. 重整化之后我们令它等于 $-1/2$，见(5.3.1)式. 要去掉(5.3.10)中其他发散项，需在(5.3.1)中引入附加项，但由于此项仅为拓扑不变量，故可略去.

应用共形变换. 单圈有效作用量 $W_1(\beta)$ 可表为显式. 注意度规(5.3.4)可写为

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{r_+}{r}\right)\mathrm{d}\tau^2+\left(1-\frac{r_+}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2=e^{2\sigma}\mathrm{d}\tilde{s}^2, \tag{5.3.11}$$

$$\mathrm{d}\tilde{s}^2=\mu^2(x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2+\mathrm{d}x^2). \tag{5.3.12}$$

这里 $\tilde{\tau}=\dfrac{\tau}{2r_+}$, $0\leqslant\tilde{\tau}\leqslant 2\pi$,

$$x=\left(\frac{r-r_+}{r_B-r_+}\right)^{1/2}e^{(r-r_B)/2r_+},\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{5.3.13}$$

且共形因子 σ 为

$$\sigma(r)=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{r_B-r_+}{r}\right)+\frac{r_B-r}{r_+}+2\ln\left(\frac{2r_+}{\mu}\right)\right]. \tag{5.3.14}$$

为保持量纲一致，在平直空间度规(5.3.12)中引入了量纲为长度的参数 μ. 上述共形变换

$$\gamma_{\mu\nu}\to\tilde{\gamma}_{\mu\nu}=e^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu} \tag{5.3.15}$$

是区域 M_B 到平直 2 维单位盘 D^2(用 μ 的单位测量)上的映射. 可以证明，μ 的选择不影响物理结果.

对于共形场，此映射下 W_1 的变换式在后面 §5.11 中给出. 用 C 表示单位盘 D^2[(5.3.12)式]的重整化单圈有效作用量，采用关系式(5.11.9)，得到

$$W_1(\beta,r_B)=\tilde{W}_1[\beta,y(\beta,r_B)]. \tag{5.3.16}$$

式中 $y=r_+/r_B$，而且

$$\tilde{W}_1(\beta,y)=\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y}+2\ln y+17-2y-13y^2\right]-\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}+C. \tag{5.3.17}$$

此二式需作些解释. 首先，不仅边界处的温度倒数 β 依赖于"半径"r_B，单圈有效作用量也依赖于 r_B. 对给定的 r_B 和 β，引力半径 r_+ 由式(5.3.6)定义. 为了简化表达，我们采用无量纲变量 $y=$

r_+/r_B，而不用 r_B. (5.3.6)式意味着 y 是由关系式

$$y(1-y)^{1/2}=\frac{\beta}{4\pi r_B} \tag{5.3.18}$$

定义的 β 和 r_B 的函数.

自由能和热力学熵的各自单圈贡献 F_1 和 S_1^{TD} 由下列公式确定：

$$F_1(\beta, r_B)=\beta^{-1}W_1(\beta \ r_B),$$
$$S_1^{TD}=\beta\frac{\partial W_1(\beta \ r_B)}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}-W_1(\beta, r_B). \tag{5.3.19}$$

W_1 的导数可用 $\widetilde{W}_1$ 的导数表示：

$$\frac{\partial W_1(\beta, r_B)}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}=\frac{\partial\widetilde{W}_1(\beta, y)}{\partial\beta}\bigg|_y+\frac{\partial\widetilde{W}_1(\beta, y)}{\partial y}\bigg|_\beta\frac{\partial y}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}. \tag{5.3.20}$$

式中 $$\frac{\partial y}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}=\frac{2y(1-y)}{\beta(2-3y)}. \tag{5.3.21}$$

后一等式来源于(5.3.18). 根据(5.3.19)～(5.3.21)，最后得到

$$S_1^{TD}(y, \beta)=\frac{1}{48(2-3y)}\left[\frac{8}{y}-13y-28y^2+13y^3\right]-\frac{1}{24}\ln y+\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}-\frac{17}{48}-C. \tag{5.3.22}$$

此量是有限的. 无量纲常数 C 不依赖于系统的参数，而反映熵定义中的不确定性. 对于进一步讨论，这不确定性并不重要，因此这项和其他类似常数可省略. 当 r_B 很大($r_B\gg r_+$ 或 $y\ll 1$)时，S_1^{TD} 中的主要项是 $\frac{\pi}{3}r_B\beta^{-1}$. 此项和一维无质量标量量子热气体的熵相合. 我们所考虑的情况总是 $r_B<\frac{3}{2}r_+$，所以上面的限制只有形式上的意义. 当 $r_B=\frac{3}{2}r_+$时，$S_1^{TD}=\infty$，致使 $y=\frac{3}{2}$时热容量为无限大. 可以预见，4 维情况下这些量有相同的行为.

§5.4 离壳方法

在前面的讨论中我们用到了(5.3.6)式. 它可以写成 $\beta_\infty = \beta_H$. 其中 $\beta_\infty = \beta(1-r_+/r_B)^{-1/2}$，是无限远处观测到的边界 Σ_B 处的温度的倒数，$(1-r_+/r_B)^{-1/2}$是红移因子. β_H 是 Hawking 温度倒数(也是在无限远处测量的). $\beta_\infty = \beta_H$ 明显给出了热辐射和黑洞之间的平衡条件. 也正因为有这一条件，我们才谈及即壳量.

下面我们讨论另一种方法——离壳方法，其中背景度规不满足 $\beta_\infty = \beta_H$. 这时有效作用量的单圈贡献为三个变量(β, r_B 和 r_+)的函数：

$$W_1^* = W_1^*(\beta, r_+, r_B, \cdots).$$

用上标 * 表示此量依赖于离壳方案的选择. W_1^* 的自变量中的省略号表示它还可能依赖于某些附加参数，这些参数由于离壳方案的不同而不相同. 因为这些参量并不重要，故下面将不再表示出来.

在一般情况下，离壳熵定义为离壳自由能 $F^* = \beta^{-1}W^*$ 对温度变化的反应. 条件是系统的参数(r_B)和黑洞参数(r_+)固定. 按这个定义，单圈离壳熵为

$$S_1^* = \beta \left.\frac{\partial W_1^*}{\partial \beta}\right|_{r_B, r_+} - W_1^*. \tag{5.4.1}$$

这里假定计算结束后要回到即壳极限. 这就是说，令 S_1^* 中的 r_+ 等于即壳值，此值由解相应的引力场方程确定.

如果不采用 r_B 和 r_+，而采用无量纲变量

$$y = y(r_B, r_+) = \frac{r_+}{r_B},$$
$$\alpha = \alpha(\beta, r_B, r_+) = \frac{\beta_\infty}{\beta_H} = \frac{\beta}{4\pi r_+\sqrt{1-\dfrac{r_+}{r_B}}}, \tag{5.4.2}$$

则 W_1^* 和 S_1^* 的显式就可以变得很简单. 变量 α 是离壳参数. 当系统即壳时，$\alpha=1$. 定义

$$W_1(\beta, r_B, r_+, \cdots) =$$
$$\widetilde{W}_1(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_+, r_B), \cdots). \qquad (5.4.3)$$
当固定 r_+ 和 r_B 时，y 也固定，于是(5.4.2)表明 α 正比于 β. 因此有

$$S_1^* = \beta \frac{\partial \widetilde{W}_1^*(\beta, \alpha, y, \cdots)}{\partial \beta}\bigg|_{\alpha\ y} + \alpha \frac{\partial \widetilde{W}_1^*(\beta, \alpha, y, \cdots)}{\partial \alpha}\bigg|_{\beta\ y} - W_1^*. \qquad (5.4.4)$$

如前所说，当计算完毕后，须令 $\alpha=1$. 于是 S_1^* 相应的即壳值只依赖于边界条件 β 和 r_B. 做了一般的讨论之后，下面我们讨论具体的离壳方法.

§5.5 砖墙模型

1. 有效作用量

作为离壳方法的第一个例子，我们讨论所谓"砖墙模型"(brick-wall model)，它由't Hooft 提出[60]，随后有诸多文章讨论[61~67]. 其基本思想是在离黑洞视界很近的地方(固有距离为 ϵ)引入一附加的类光边界 Σ_ϵ，Σ_B 和 Σ_ϵ之间的区域表示为 $M_{B,\epsilon}$(如图

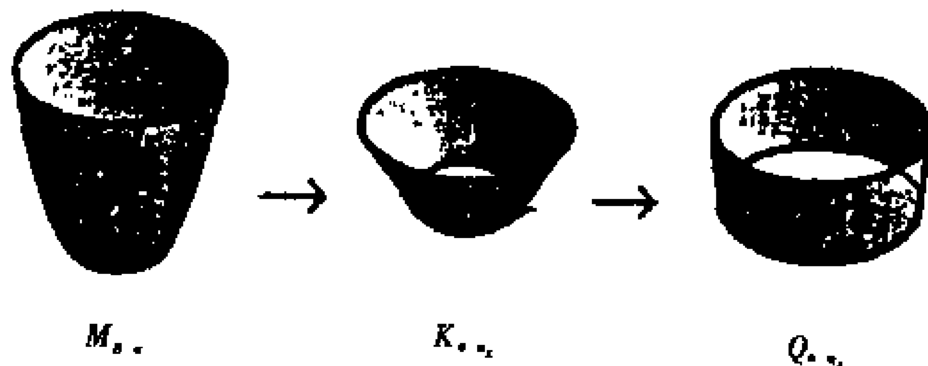


图 4-16

4-16)，按't Hooft 的意见，进一步假设场 φ 在两边界 Σ_B 和 Σ_ϵ 处都满足狄里赫利条件. 砖墙模型的出发点是在区域 $M_{B,\epsilon}$中的无质量标量场的配分函数 $Z_1^{BW}(\beta)$:

$$\ln Z_1^{BW}(\beta)=-\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta). \qquad (5.5.1)$$

式中 β 为 Σ_B 处测得的温度的倒数. “lndet”理解为重整化量，Δ 是区域 M_B 内满足狄里赫利条件的标量场的拉普拉斯算符. 由于内边界 Σ_ϵ的存在，热气体不能穿透的黑洞视界附近区域就被完全消除掉了. 因此，无论参数 β 和 m 的关系如何，这系统都不是奇异的. 而且砖墙模型适用于离壳情况. 为了区别用这一离壳方法算得的量，我们用缩写字母 BW 作为上标，相应的配分函数 Z_1^{BW} 和作用量 W_1^{BW} 不仅依赖于 β 和 r_B，也依赖于 ϵ 和视界处的 dilaton 值 r_+. 现在我们的任务是找出 $W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$.

显然，这一问题可以简化为某种“标准”2 维平直区域的有效作用量的计算. 我们取圆柱面为这一区域(如图).

一个比较方便的方法是分两次完成共形变换.

首先，采用映射(5.3.15)，其中 σ 由(5.3.14)给出，在此变换下，度规形式为

$$d\bar{s}^2=\mu^2(x^2 d\bar{\tau}^2+dx^2),\ 0\leqslant\bar{\tau}\leqslant 2\pi\alpha,\ \epsilon_x\leqslant x\leqslant 1. \qquad (5.5.2)$$

此空间的嵌入图见上图. 它是圆锥 C_α 在面 $\Sigma_B(x=1)$ 和 $\Sigma_\epsilon(\epsilon_x)$之间的部分 K_{α,ϵ_x}，$x=\epsilon_x$ 的值和固有距离 ϵ 的联系为

$$\epsilon_x=\epsilon\,\frac{2\pi\alpha}{\beta}\sqrt{y}\exp\left(\frac{y-1}{2y}\right). \qquad (5.5.3)$$

式中参数 y 和 α 由(5.4.2)式确定.

其次，把 K_{α,ϵ_x}映射到度规为 $\mu^2(d\bar{\tau}^2+dz^2)$的圆柱 Q_{α,ϵ_z}上：

$$d\bar{s}^2=\mu^2(x^2 d\bar{\tau}^2+dx^2)=x^2[\mu^2(d\bar{\tau}^2+dz^2)],\ z=-\ln x. \qquad (5.5.4)$$

此柱面周长为 $2\pi\alpha$，母线长为 $\epsilon_z=-\ln\epsilon$(在 μ 单位下).

因此，只要知道“标准”柱 Q_{α,ϵ_z}的有效作用量 $W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]$，通过共形变换，就可以得到作用量 $W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$. 可以证明(见 § 5.12)

$$W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]=-\ln\mathrm{Tr}\,e^{-2\pi\alpha\mu\hat{H}}. \qquad (5.5.5)$$

式中 $\hat{H}$ 是满足狄里赫利边界条件的无质量标量场在区间$(0, \mu\epsilon_z)$内的哈米顿. 于是，对于 $\epsilon_z\gg 1$ 有(见 § 5.12)

$$W_1[Q_{\alpha}\ \ ]=-\frac{1}{12\alpha}\epsilon_z-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\epsilon_z}+o\left(\frac{1}{\epsilon_z}\right). \tag{5.5.6}$$

尺度参量 μ 在上式中不出现是因为柱面上的作用量有尺度不变性. 共形变换下有效作用量 $W_1[K_{\alpha},]$ 为

$$W_1[K_{\alpha},\epsilon_z]=W_1[Q_{\alpha},]-\frac{\alpha}{12}\epsilon_z, \tag{5.5.7}$$

而变换(5.3.15)给出

$$W_1[M_B,]=W_1[K_{\alpha}\ \epsilon_z]+\alpha f(y), \tag{5.5.8}$$

$$f(y)=-\frac{1}{48}\left(-\frac{2}{y}+2\ln y+2y+13y^2-13\right). \tag{5.5.9}$$

应用(5.5.6)～(5.5.8), 可以得到最后结果. 用$(\beta, \alpha, y, \epsilon)$写出的有效作用量 $W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+, \epsilon)$为

$$W_1^{BW}(\beta, r_B, r_+\ \epsilon)=\widetilde{W}_1^{BW}(\beta, \alpha(\beta, r_B, r_+), y(r_B, r_+), \epsilon), \tag{5.5.10}$$

$$\widetilde{W}_1^{BW}(\beta, \alpha, y, \epsilon)=\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{2\pi\alpha\epsilon}{\beta}-$$
$$\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}+\frac{\alpha}{48}(15-2y-13y^2)+$$
$$\frac{1}{24\alpha}\left(1-\frac{1}{y}+\ln y\right)+o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)). \tag{5.5.11}$$

当 $\alpha=1$, 就是即壳情况, 此时作用量可以写成和的形式:

$$\widetilde{W}_1^{BW}(\beta, \alpha=1, y, \epsilon)=\widetilde{W}_1(\beta, y)+$$
$$\frac{1}{6}\ln\epsilon-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{\ln(\beta/2\pi\epsilon)}+o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)). \tag{5.5.12}$$

式中区域 M_B 上的热力学作用量$\widetilde{W}_1(\beta, y)$由式(5.3.17)给出, 而附加项来源于墙的存在, 当 $\epsilon\to 0$ 时它对数发散.

2. 熵

砖墙模型的熵 S_1^{BW} 由(5.4.1)用 W_1^{BW} 给出. 写成$(\beta, \alpha, y, \epsilon)$的形式为

$$S_1^{BW}(\beta, \alpha, y, \epsilon)=\frac{1}{12\alpha}\left(2\ln\frac{\beta}{2\pi\alpha\epsilon}-\ln y+\frac{1}{y}-1\right)+$$
$$\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}+o(\ln^{-1}(\beta/\epsilon)). \tag{5.5.13}$$

令 $\alpha=1$ 便得到 S_1^{BW} 的即壳值.

这里应注意，重整化参数 μ 未出现于(5.5.11)和(5.5.13)，故砖墙作用量 W_1^{BW} 和熵 S_1^{BW} 都不含有 μ. 这是因为在常共形变换下，有效作用量需附加一正比于流形的欧拉示性数的项. 但是 $M_{B,\epsilon}$与柱面的拓扑相同，欧拉示性数为零. 因此，有效作用量在常共形变换下不变，并不含 μ. 另一方面，完全规则瞬子的欧拉示性数与 D^2 相同，都不为零. 结果共形反常积分不为零，因而 μ 作为维数变换的参数出现在热力学作用量和熵中.

下面我们证明，砖墙熵(5.5.13)和统计力学熵相合，并可写成

$$S_1^{BW}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=-\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_\epsilon^H(\beta)\ln\hat{\rho}_\epsilon^H(\beta)]. \qquad (5.5.14)$$

式中 $\hat{\rho}_\epsilon^H(\beta)$是黑洞附近区域 $M_{B,\epsilon}$中的无质量气体的热密度矩阵，β 是 Σ_B 处测得温度的倒数. 在'tHooft 的砖墙模型中，这种热气体被认为是黑洞的内部自由度.

为了证明(5.5.14)式，我们先把 S_1^{BW} 的表示式改写一下. (5.5.7)和(5.5.8)式给出

$$W_1^{BW}(\beta,r_B,r_+,\epsilon)=\alpha f(y)-\frac{\alpha\epsilon_z}{12}+W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]. \qquad (5.5.15)$$

为了得到 S_1^{BW}，我们固定 r_B，r_+和 ϵ. 于是 y 不依赖于 β，而 α 正比于 β，结果(5.5.15)中前两项对 S_1^{BW} 无贡献，故有

$$S_1^{BW}=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-1\right)W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]=\frac{1}{6\alpha}\epsilon_z+\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\epsilon_z}+o(\epsilon_z^{-1}). \qquad (5.5.16)$$

易证此式和(5.5.13)相合. 注意 $W_1[Q_{\alpha,\epsilon_z}]$由(5.5.5)给出，量 $(1-\beta(\partial/\partial\beta))\ln Tre^{-\beta\hat{H}_L}$可写成

$$-\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_L(\beta)\ln\hat{\rho}_L(\beta)].$$

式中 $\hat{H}_L$ 是长 L 区域内的哈米顿，而

$$\hat{\rho}_L(\beta)=\rho_0 e^{-\beta H_L}.$$

应用这些关系式，可以把(5.5.16)写为

$$S_1^{BW}=-\mathrm{Tr}[\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)\ln\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha)]. \qquad (5.5.17)$$

此式表明 S_1^{BW} 是区间 $\mu\epsilon$ 内温度为$(2\pi\mu\alpha)^{-1}$的 1 维热气体的熵[由

于前面说明的原因，μ 不出现在(5.5.16)中].

此结果可以用来证明(5.5.14)式，因为密度矩阵 $\hat{\rho}_{\mu\epsilon}(2\pi\mu\alpha)$ 和黑洞密度矩阵 $\hat{\rho}_L^H(\beta)$ 相合. 实际上，我们用了保持对称性(Killing 矢量)的共形变换，并没有影响边界条件. 在这些条件下，共形无质量场的哈米顿是不变的，故密度矩阵也是不变的. 但是要注意，我们用来定义温度和距离的尺度会改变. 为了定义能量、温度等，我们必须保证 Killing 矢量的归一性. 现在我们选择(在外边界 Σ_B 处)条件$(\xi^2)_B=1$. 若共形因子 σ 在边界处不为零，则必须重新标度 $\xi^\mu\to\tilde{\xi}^\mu=\exp(-\sigma_B)\xi^\mu$，使得共形变换后，在边界处有$\tilde{\xi}^2=1$. 我们有

$$
e^{-\beta H_L}=e^{-\tilde{\beta}\tilde{H}_{\tilde{L}}}, \tag{5.5.18}
$$

式中 $\tilde{\beta}=\exp(-\sigma_B)\beta$, $\tilde{H}=\exp(\sigma_B)\hat{H}$.

$\tilde{L}$是共形相关度规 $\tilde{\gamma}_{\mu\nu}=e^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu}$中区间的固有长度.

特别是考虑到我们在第一步中用到的共形映射(5.3.11)和(5.3.14)，(5.5.18)给出

$$
\hat{\rho}_L^H(\beta)=\hat{\rho}^R_{\mu\epsilon_r}(2\pi\mu\alpha). \tag{5.5.19}
$$

式中$\hat{\rho}^H$ 是初始黑洞密度矩阵，$\hat{\rho}^R$ 是 Rindler 空间中的热密度矩阵，其度规为

$$
\mathrm{d}\tilde{s}^2=\mu^2[x^2\mathrm{d}\tilde{T}^2+\mathrm{d}x^2]=\left(\frac{X}{\mu}\right)^2\mathrm{d}T^2+\mathrm{d}X^2. \tag{5.5.20}
$$

Rindler 空间的温度倒数 $2\pi\mu\alpha$ 是在边界 $X=\mu$ 处测量的，此处满足 $g_{TT}=1$. 参数 $\mu\epsilon_r$ 为内边界到视界的固有距离，用 Rindler 度规测量. 注意固有距离并非共形不变量. 最后，把 Rindler 空间映射到平直空间[相应的有效作用量的变换 $K_{\alpha,\epsilon_r}\to Q_{\alpha,\epsilon_z}$由(5.5.4)式给出]，可以得到 Rindler 密度矩阵和区间内的密度矩阵之间的关系：

$$
\hat{\rho}^R_{\mu\epsilon_r}(2\pi\mu\alpha)=\hat{\rho}_{\mu\epsilon_z}(2\pi\mu\alpha). \tag{5.5.21}
$$

S_1^{BW} 的统计力学形式(5.5.14)便可由(5.5.17)、(5.5.19)和(5.5.21)得到.

§5.6 顶角奇异性方法

我们可以不去掉视界附近的 ϵ-区域，而直接研究完整的黑洞几何. 但是若 β_∞ 和 Hawking 值 β_H 不同，时空不再是规则的. 因为视界 $r=r_+$ (Killing 矢量的固定点)处有角亏损为 $2\pi(1-\alpha)$ 的顶角奇异性. 这样的空间在顶角处具有类 δ 的曲率. 因此，它不是真空爱因斯坦场方程的解. 我们称这空间为奇异瞬子，用 M_B^α 表示(如图)：

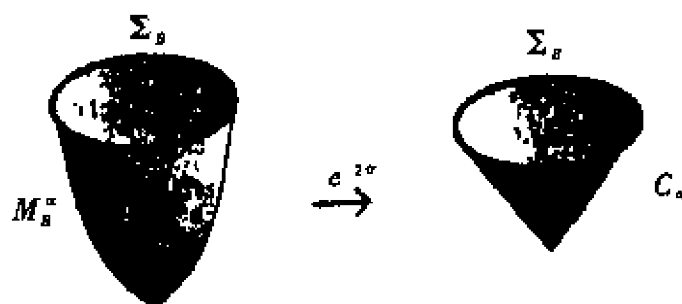


图 4·17

直接用这一流形做单圈计算是可能的. 我们把相应的方法称为顶角奇异性方法. 所得结果和规则空间的区别在于紫外发散性的结构. 顶角奇异性导致有效作用量中出现附加的、源于视界面的发散项；重整化需要新的项. 但是重要的是这些项的数量级为

$$(\beta_\infty-\beta_H)^2\sim(1-\alpha)^2,$$

故即壳时它们对黑洞熵和自由能均无贡献.

在 2 维情况下，由(5.11.2)和(5.11.3)，可将奇异瞬子 M_B^α 上作用量的发散部分写成：

$$W_1^{\rm div}[M_B^\alpha] = -\frac{1}{8\pi\delta}\int_{M_B^\alpha}\sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}^2x + \frac{\ln\delta}{12}\left\{\chi[M_B^\alpha]+\frac{1}{2\alpha}(1-\alpha)^2\right\}. \tag{5.6.1}$$

$$\chi[M_B^\alpha] = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_{M_B^\alpha}R\,\mathrm{d}^2x + 2\int_{\Sigma_B}k\,\mathrm{d}y + 4\pi(1-\alpha)\right\}. \tag{5.6.2}$$

如(5.3.9)一样，式中 δ 是紫外截断参数，R 是规则曲率. 量 $\chi[M_B^\alpha]$是 M_B^α 的欧拉示性数，且与 Gibbons-Hawking 瞬子相同：

$$\chi[M_B^\alpha]=\chi[M_B]=1.$$

因此，精确到$(1-\alpha)^2$，规则瞬子的发散项与奇异情况相合[比较(5.3.9)和(5.6.1)]，而其差在即壳时不影响熵. 如前，我们假设已重整化，只采用重整化的量.

现在我们用顶角奇异性方法计算离壳有效作用量 W_1^{CS} 和熵 S_1^{CS}.

与前面的讨论相似，β 为 Σ_B 处的温度倒数，$\alpha=\beta_\infty/\beta_H$ 为离壳参数. 我们再次采用共形变换(5.3.1). 但是现在它把奇异瞬子映射到标准锥 C_α，其母线为单位长度(以 μ 为单位)：

$$d\bar{s}^2=\mu^2(x^2d\bar{\tau}^2+dx^2),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant \tau\leqslant 2\pi\alpha. \quad (5.6.3)$$

利用(5.3.11)、(5.3.14)和(5.11.9)式，可以把有效作用量 W_1^{CS} 和 C_α 上的作用量联系起来. 如前，用变量(β,α,y)写出，此作用量为：

$$W_1^{CS}(\beta,r_B,r_+)=\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_+),y(r_B,r_+)). \quad (5.6.4)$$

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha,y)=-\frac{\alpha}{48}\left(2y+13y^2-15+4\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right)-\frac{1}{24\alpha}\left(\frac{1}{y}-1-\ln y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right)+C(\alpha). \quad (5.6.5)$$

式中 $C(\alpha)$是单位锥的有效作用量，当 $\alpha=1$ 时，与单位盘 D^2 的有效作用量相同：$C(\alpha=1)=C$. 函数 $C(\alpha)$不含 μ，并导致熵的一纯数项. 它的形式对我们不重要.

取即壳极限 $\alpha=1$ 时，顶角奇异性消失，故

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha=1,y)=\widetilde{W}_1(y,\beta). \quad (5.6.6)$$

式中 $\widetilde{W}_1(y,\beta)$是(5.3.17)给出的即壳有效作用量.

熵 S_1^{CS} 由$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta,\alpha,y)$通过式(5.4.4)确定，于是有

$$S_1^{CS}(\beta,\alpha,y)=\frac{1}{12\alpha}\left(\frac{1}{y}-1-\ln y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu\alpha}\right)+C^{CS}(\alpha). \tag{5.6.7}$$

式中
$$C^{CS}(\alpha)=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}-1\right)C(\alpha) \tag{5.6.8}$$

在 $\alpha=1$ 时是无关常数. 在顶角奇异性方法中，重整化作用量 W_1^{CS} 和熵 S_1^{CS} 都是有限的.

§5.7 钝锥方法

考虑前页图中的奇异瞬子和一系列在顶角处几何略有变化的规则流形(如图). 这些几何,黎曼曲率处处规则，仅在视界附近和奇异瞬子不同. 我们称这种几何为“钝瞬子”，而把这种离壳延拓称为钝锥方法. 在这一方法中，可以避免无限曲率流形的量子化和重整化问题. 计算的最后才去掉顶角奇异性的规则化.

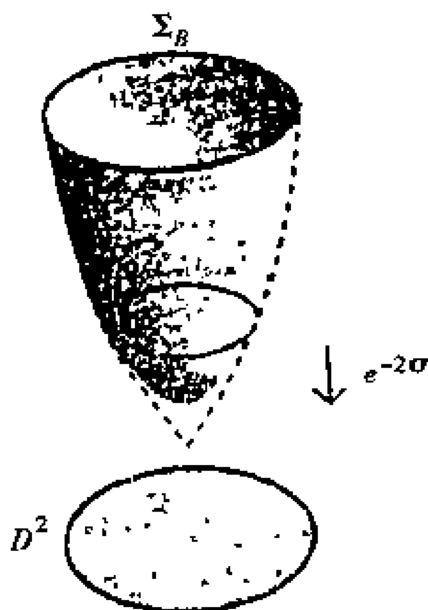


图 4-18

为了简化计算，我们选择离壳延拓的一种特殊形式. 它由两个参量表征：离壳参数 $\alpha=\beta_\infty/\beta_H$ 和一个新参数 η，它描述钝瞬子顶点圆化的程度. 钝瞬子度规取为

$$ds^2=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)(\rho^2 d\tau^2+b^2 d\rho^2),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant 1; \tag{5.7.1}$$

$$b=\frac{1}{(1-\rho^2+y\rho^2)^2}\frac{\rho^2+\alpha\eta^2}{\alpha\rho^2+\alpha\eta^2}.$$

区域的边界 Σ_B 位于 $\rho=1$，其长为 β. 如前，黑洞质量参数含于无量纲量 $y=r_+/r_B$ 中. 惟一确定钝瞬子的参数为 β, r_B, r_+ 和 η. 当 $\alpha=1$，此度规和 G-H 瞬子度规相同.

为了计算钝瞬子上重整化的单圈有效作用量，我们把这一钝瞬子映射到一单位盘 D^2 上. 首先考虑一任意的静态欧氏 2 维流形，其线元 $\mathrm{d}s^2$ 和单位盘上线元 $\mathrm{d}\tilde{s}^2$ 共形：

$$\mathrm{d}s^2=\left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2[a^2\mathrm{d}\tau^2+b^2\mathrm{d}\rho^2]=\exp(2\sigma)\mu^2[x^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2+\mathrm{d}x^2].$$

(5.7.2)

式中 $0\leqslant\tau\leqslant2\pi$， $0\leqslant\tilde{\tau}\leqslant2\pi$， $0\leqslant\rho\leqslant1$，

$0\leqslant x\leqslant1$.

于是，度规系数 a，b 和共形因子

$$\sigma(\rho)=\ln\frac{a(\rho)}{a(1)}+\int_\rho^1\mathrm{d}\rho\,\frac{b}{a}+\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right) \tag{5.7.3}$$

都只含 ρ. 归一化条件要求

$$\sigma(1)=\ln(\beta/2\pi\mu)$$

和 $\tilde{\tau}=\tau$.

把共形反常积分(见 § 5.11)用于度规(5.7.2)，得到单圈有效作用量

$$W_1^{BC}=-\frac{1}{6}\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right)-\frac{1}{12}\int_0^1\mathrm{d}\rho\frac{(a'-b)^2}{ab}-\left(\frac{a'}{4b}\right)_{\rho=1}+\frac{1}{4}+C. \tag{5.7.4}$$

这里 $a'=\mathrm{d}a/\mathrm{d}\rho$，常数 C(与前面类似)是单位盘 D^2 的有效作用量. 在导出此式时已用到视界处度规的规则化条件 $(a'/b)|_{\rho=0}=1$. 对于钝瞬子度规(5.7.1)，有

$$a=\rho,\quad b=\frac{1}{(1-\rho^2+y\rho^2)^2}\frac{\rho^2+\alpha\eta^2}{\alpha\rho^2+\alpha\eta^2}, \tag{5.7.5}$$

$$\sigma=\ln\rho+\frac{1}{2}\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z\frac{z+\alpha\eta^2}{z(\alpha z+\alpha\eta^2)(1-z+yz)^2}+\ln\left(\frac{\beta}{2\pi\mu}\right).$$

钝锥有效作用量为

$$W_1^{BC}(\beta,r_B,r_+,\eta)=\widetilde{W}_1^{BC}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_-),y(r_B,r_+),\eta), \tag{5.7.6}$$

$$\tilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha, y, \eta) = -\frac{1}{6}\ln\left[\frac{\beta}{2\pi\mu}\right] -$$
$$\frac{(\alpha-1)}{24\alpha}\frac{1}{(1+\eta^2-y\eta^2)^2}\ln\left|\frac{\eta^2}{1+\eta^2}\right| +$$
$$\frac{\alpha-1}{24}(1+\alpha\eta^2-y\alpha\eta^2)^2\ln\left|\frac{\alpha\eta^2}{1+\alpha\eta^2}\right| + \frac{1}{24}\ln|y|\times$$
$$\left\{1-\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{1}{(1+\eta^2-y\eta^2)^2}\right\} +$$
$$\frac{1}{24}(1-y)\left\{2\alpha-\frac{1+\alpha\eta^2-y\alpha\eta^2}{\alpha y(1+\eta^2-y\eta^2)}\right\} -$$
$$\frac{1}{48}\alpha(1-y)^2\{1-2(\alpha-1)\eta^2\} - \frac{1}{4}\frac{\alpha+\alpha\eta^2}{1+\alpha\eta^2}y^2 + \frac{1}{4} + C. \tag{5.7.7}$$

参数 η 的作用类似于砖墙模型中的截断参数 ϵ. 当规则化参数 $\eta \to 0$ 时，作用量变为

$$\tilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha, y, \eta) = -\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu} + \frac{1}{48}\left[-\frac{2}{\alpha y} + \frac{2}{\alpha}\ln y - 2\alpha y -\right.$$
$$\left. 13\alpha y^2 + 2(\alpha-1)\ln\alpha + \frac{2}{\alpha} + 3\alpha + 12\right] +$$
$$C + \frac{1}{24\alpha}(\alpha-1)^2\ln\eta^2 + o(\eta^2). \tag{5.7.8}$$

在即壳时($\alpha=1$)，度规(5.7.1)变为 G-H 瞬子度规，相应的即壳有效作用量为

$$\tilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha=1, y, \eta) = -\frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu} +$$
$$\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y} + 2\ln y - 2y - 13y^2 + 17\right] + C. \tag{5.7.9}$$

与(5.3.17)给出的即壳作用量 $\tilde{W}_1(\beta, y)$ 相同，相应的钝锥熵当 $\eta=0$ 时有限，且为

$$S_1^{BC}(\beta, 1, y, 0) = \frac{1}{12y} - \frac{1}{12}\ln y + \frac{1}{6}\ln\frac{\beta}{2\pi\mu} - \frac{1}{2} - C. \tag{5.7.10}$$

此结果和顶角奇异性方法得到的熵 S_1^{CS} 相同(差一个不重要的常数).

§5.8 体积截断方法

本节，我们再讨论一种黑洞有效作用量 W_1 的离壳定义. W_1 可以表示为某一拉格朗日密度 $\mathscr{L}_1(x)$对背景空间的体积分：

$$W_1 = \int \sqrt{g}\, \mathrm{d}x \mathscr{L}(x). \tag{5.8.1}$$

相应的拉氏密度可写成热核算符在坐标表象中的对角元素的项：

$$\mathscr{L}_1(x) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s} \langle x | e^{s\triangle} | x \rangle, \tag{5.8.2}$$

于是，对作用量本身有标准公式

$$W_1 = \frac{1}{2}\ln \det(-\mu^2 \triangle) = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{s} \mathrm{Tr} e^{s\mu^2 \triangle}. \tag{5.8.3}$$

现在考虑一奇异瞬子，并对规则点 $r > r_+$ 计算 $\mathscr{L}_1(x)$. 令 Σ_ϵ 表示距视界一很小距离 ϵ 的面. 把积分限制在 Σ_ϵ 外的区域 $M_{B,\epsilon}$ 中，如图. 于是，作用量 W_1 依赖于新参量 ϵ，我们称这一离壳方

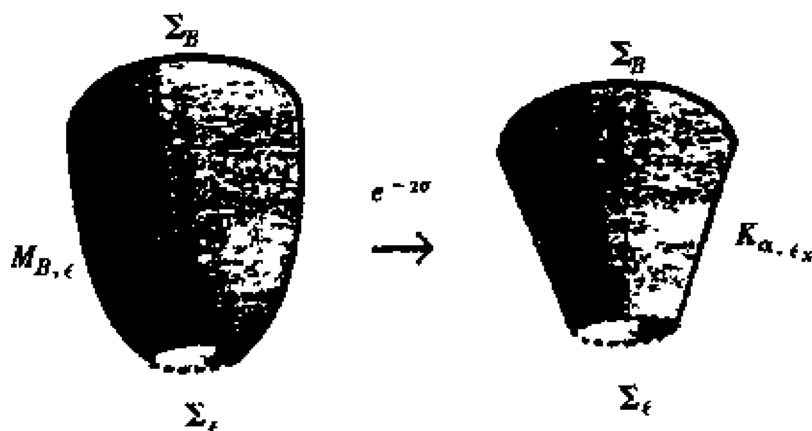


图 4-19

法为体积截断方法，相应的量用上标 vc 表示.

体积截断方法自然地来源于黑洞熵的动力学-内部方案[55]. 在这一方法中，黑洞的内部自由度等同于在视界附近传播的场的态. 由于视界的量子涨落，对于视界极近处的传播模式，其量子涨落幅相对较大，故将这些模式区分为外部(在视界处传播)和内部(在视界内传播)是不可能的. 因此，在此方案中计算黑洞统计

力学熵时对模式的求和只能限制为视界涨落区域外的模式．这等效于上述有效作用量体积分中的截断．体积截断方法已被许多文章所采用．在文献[57]中，黑洞度规被映射到一光学(极端静态)度规上，视界则映射到无限远．此光学空间的固有体积变成无限大．为处理这种发散，很自然地要把体积分限制在一有限区域．这一方法可以就熵修正获得许多有趣的结果，即使对高于 2 维的空间内的有质量场和非零自旋的共形场也能做到这一点．

在某种意义上，体积截断法很像砖墙法．但它们肯定是不同的．因为体积截断法不需要在 Σ 上满足任何边界条件．它还和比 Σ 更接近视界的区域内的量子场行为无关．

离壳黑洞解上的拉格朗日 $\mathscr{L}_1$ 的计算可以通过到顶角空间的共形变换进行，由(5.11.9)有

$$\mathscr{L}_1 = e^{-2\sigma}\mathscr{L}_1(C_\alpha) - \frac{1}{24\pi}\times \left[R\sigma - (\nabla\sigma)^2 + (2k\sigma + 3\sigma_{;\mu}n^\mu)\delta(r, r_B)\right]. \tag{5.8.4}$$

式中 $\mathscr{L}_1(C_\alpha)$是单位锥 C_α 上的拉格朗日，只对视界外的区域适用．$\delta(r, r_B)$是不变 δ 函数，可以在外边界处产生表面项．因子 σ 见(5.3.14)式．注意(5.11.9)式中由共形因子 σ 在顶角处的值决定的项对 W_1^1 [(5.8.4)式中]无贡献．

为找到 $\mathscr{L}_1(C_\alpha)$，可采用顶角空间(5.6.3)上拉普拉斯算符的热核 $K_\alpha(x, x') = \langle x | e^{t\Delta} | x'\rangle$的索末非表象：

$$K_\alpha(x, x', \tilde{\tau} - \tilde{\tau}') = K(x, x', \tilde{\tau} - \tilde{\tau}') + \frac{i}{4\pi\alpha}\times \int_\Gamma \cot\left(\frac{w}{2\alpha}\right) K(x, x', \tilde{\tau} - \tilde{\tau}' + w)\mathrm{d}w, \tag{5.8.5}$$

式中热核 $K(x, x', \tilde{\tau} - \tilde{\tau}')$是对单位盘 D^2 的．积分路径 Γ 位于复平面上，包括两条曲线，从 $\mp\pi - (\tilde{\tau} - \tilde{\tau}') \pm i\infty$ 到 $\mp\pi - (\tilde{\tau} - \tilde{\tau}') \pm i\infty$，与实轴的交点位于被积函数的极点$(-2\pi\alpha, 0)$和$(2\pi\alpha)$之间．此公式的推导和讨论见[68～71]．锥上的拉格朗日很容易计算，只要代入(5.8.5)和(5.8.3)．结果很简单：

$$\mathscr{L}_1(C_\alpha)=\mathscr{L}_1(D^2)-\frac{1}{24\pi x^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right). \tag{5.8.6}$$

式中 $\mathscr{L}_1(D^2)$是单位盘 D^2 上的拉格朗日密度. 由于它在 W_1^{VC} 中导致一无关紧要的常数项，下面将略去它. 第二项产生于(5.8.5)中的积分，而且当 $\alpha=1$ 时为零. 在这一计算中，先对 S 积分，然后再用下面的公式：

$$\frac{1}{8\pi\alpha}\int_\Gamma\frac{\cot(w/2\alpha)}{\sin^2 w/2}\mathrm{d}w=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right). \tag{5.8.7}$$

令 $W_1^{VC}[C_\alpha]$为锥 C_α 上的有效作用量，可由(5.8.6)式积分(到点 $x=\epsilon_x$)得到. 和前面类似，ϵ_x 与到视界的距离 ϵ 的关系由(5.5.3)给出. 这一泛函为

$$W_1^{VC}[C_\alpha]=\frac{1}{12}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\ln\epsilon_x^{-1}. \tag{5.8.8}$$

于是，由(5.8.6)和(5.8.3)得到体积截断法中的完全有效作用量

$$W_1^{VC}(\beta,r_B,r_+,\epsilon)=W_1^{VC}[C_\alpha]-\frac{1}{24\pi}\left(\int_{M_B}[R\sigma-(\nabla\sigma)^2]+\int_{\Sigma_B}(2K\sigma+3\sigma_{,\mu}n^\mu)\right). \tag{5.8.9}$$

所以最后我们得到

$$W_1^{VC}(\beta,r_B,r_+,\epsilon)=\tilde{W}_1^{VC}(\beta,\alpha(\beta,r_B,r_+),y(r_B,r_+),\epsilon),$$

$$\tilde{W}_1^{VC}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=\frac{1}{12}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\ln\frac{\mu}{\epsilon}-\ln\frac{2\pi\mu\alpha}{\beta}-\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{2}+\frac{1}{2y}\right)+\frac{\alpha}{48\pi}\left(-\frac{2}{y}+2\ln y-2y-13y^2+17+8\ln\frac{2\pi\mu\alpha}{\beta}\right)+o(\epsilon). \tag{5.8.10}$$

即壳时($\alpha=1$)，发散项 $\ln\epsilon$ 为零，$\tilde{W}_1^{VC}$ 和规则空间上的作用量(5.3.17)相同：

$$\tilde{W}_1^{VC}(\beta,\alpha=1,y,\epsilon)=\tilde{W}_1(\beta,y). \tag{5.8.11}$$

由作用量(5.8.10)得到的熵为

$$S_1^{VC}(\beta,\ \alpha,\ y,\epsilon)=\frac{1}{12\alpha}\left(2\ln\frac{\mu}{\epsilon}+2\ln\frac{\beta}{2\pi\alpha}-\ln y-1+\frac{1}{y}\right).$$

(5.8.12)

即壳时，S_1^{VC} 与顶角奇异性熵 S_1^{CS} 只差一含 ϵ 的奇异项：

$$S_1^{VC}(\beta,\ \alpha=1,y,\epsilon)=S_1^{CS}(\beta,\ \alpha=1,y)+\frac{1}{6}\ln\frac{\mu}{\epsilon}.$$

(5.8.13)

熵 S_1^{VC} 也可以写为

$$S_1^{VC}(\beta,\ \alpha,\ y,\epsilon)=\frac{1}{6\alpha}\ln\epsilon_r^{-1}. \qquad (5.8.14)$$

故此量与从作用量 $W_1^{VC}(C_\alpha)$ 得到的熵相合. 这种吻合的原因是用来区分 $W_1^{VC}(\beta,\ \alpha,\ y,\epsilon)$ 和 $W_1^{VC}(C_\alpha)$ 的反常项正比于 β，且对 S_1^{VC} 没有贡献.

另外，S_1^{VC} 与尺度为 $\ln\epsilon_r^{-1}$ 的体积内的量子气体的热熵相同. 砖墙熵 S_1^{BW} 中的 $\ln\ln\epsilon^{-1}$项在体积截断熵中不出现，因为 Σ 处量子场边界条件不必满足，而场可以自由地在边界上涨落，见 §5.13.

§5.9 离壳与即壳计算结果的比较

1. 离壳与即壳的有效作用量

本节我们讨论、比较表明黑洞热力学特征的离壳与即壳计算的结果. 先讨论有效作用量的已得结果. 为了表述方便，引入记号

$$\begin{aligned}U(\beta,\ \alpha,\ y)=&-\frac{1}{6}\ln\left[\frac{\beta}{2\pi\mu}\right]+\\&\frac{1}{48}\left[-\frac{2}{y}+2\ln y+17-2y-13y^2\right]+\\&\frac{\alpha-1}{48\alpha}\left(\frac{2}{y}-2\ln y-2+15\alpha-2\alpha y-13\alpha y^2\right)-\\&\frac{(\alpha-1)^2}{12\alpha}\ln\left[\frac{\beta}{2\pi\mu}\right]+\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\alpha.\end{aligned} \qquad (5.9.1)$$

各种离壳方法得到的有效作用量单圈贡献可写为

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta, \alpha, y)=U(\beta, \alpha, y)+C(\alpha), \tag{5.9.2}$$

$$\widetilde{W}_1^{BW}(\beta, \alpha, y, \epsilon)=U(\beta, \alpha, y)+\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\ln\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)}, \tag{5.9.3}$$

$$\widetilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha, y, \eta)=U(\beta, \alpha, y)+\frac{(\alpha-1)^2}{12\alpha}\ln\left[\frac{\eta\beta}{2\pi\alpha\mu}\right]+\frac{\alpha-1}{24}\ln\alpha-\frac{\alpha-5}{4}+C, \tag{5.9.4}$$

$$\widetilde{W}_1^{VC}(\beta, \alpha, y, \epsilon)=U(\beta, \alpha, y)-\frac{1}{12}\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{\epsilon}{\mu}. \tag{5.9.5}$$

式中 $y=r_+/r_B$,

$$\alpha(\beta, r_B, r_+)=\beta/(4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}).$$

常数 C 和 $C(\alpha)$ 分别是单位盘 D^2 和单位锥 C_α 上的有效作用量 $W_1=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta)$.

用同样的记号，即壳单圈有效作用量表示为

$$\widetilde{W}_1(\beta, y)=U(\beta, \alpha=1, y)+C. \tag{5.9.6}$$

比较(5.9.2)、(5.9.4)和(5.9.6)，得到

$$\widetilde{W}_1^{CS}(\beta, \alpha=1, y)=\widetilde{W}_1^{BC}(\beta, \alpha=1, y, \eta)=\widetilde{W}_1^{VC}(\beta, \alpha=1, y, \epsilon)=\widetilde{W}_1(\beta, y). \tag{5.9.7}$$

[忽略(5.9.4)和(5.9.5)中不重要的常数]. 这就是说，用顶角奇异性、钝锥、体积截断方法计算得到的单圈有效作用量的即壳值和即壳单圈有效作用量 $\widetilde{W}_1(\beta, y)$ 相同. $\widetilde{W}_1^{CS}$ 总是有限的，而 $\widetilde{W}_1^{BC}$ 和 $\widetilde{W}_1^{VC}$ 仅在即壳($\alpha=1$)时才是有限的(即不含 $\ln\eta$ 或 $\ln\epsilon$ 发散项). 惟一发散的即壳值是砖墙有效作用量 $\widetilde{W}_1^{BW}$.

(5.9.3)式可以这样解释. 回忆有效作用量 W_1^{CS} 的计算过程，先是共形映射到锥 C_α 上[见(5.6.3)式]，故 W_1^{CS} 可以附加一作用量 $W_1[C_\alpha]=C[\alpha]$. 也可以映射到尺度为 ϵ 的锥 $C_{\alpha,\epsilon}$ 上. 这样两种计算结果是可以比较的，只要采用 $W_1[C_\alpha]$ 和 $W_1[C_\alpha,\epsilon]$ 的差. 而这个差值容易得，因为这两个锥互为平凡伸缩：

$$\mathrm{d}s^2(C_\alpha)=\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^2\mathrm{d}s^2(C_{\alpha,\epsilon}). \tag{5.9.8}$$

由(5.11.9)得到

$$W_1[C_\alpha]=W_1[C_{\alpha,\epsilon}]+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha}+\alpha\right)\ln\frac{\epsilon}{\mu}. \tag{5.9.9}$$

于是可以把(5.9.3)写为

$$W_1^{BW}(\beta,\alpha,y,\epsilon)=W_1^{CS}(\beta,\alpha,y)-W_1[C_{\alpha,\epsilon}]+W_1^{\mathrm{Cas}}(\beta,\alpha,\epsilon). \tag{5.9.10}$$

式中
$$W_1^{\mathrm{Cas}}(\beta,\alpha,\epsilon)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln(\beta/2\pi\alpha\epsilon)} \tag{5.9.11}$$

是 Casimir 效应的贡献. 关于这一项以及它与砖墙边界条件的关系见§5.13.

2. 为什么熵的即壳和离壳单圈贡献会不同

在式(5.9.7)中，所有(除砖墙)离壳有效作用量等于即壳有效作用量并不能保证相应的熵也相等. 而且正如下面我们将看到的，所有离壳计算给出的熵都与即壳熵不同. 在给出具体关系式之前，先看看这为什么会发生.

离壳计算的出发点是作为参数 β, r_B 和 r_+ 的函数的单圈作用量 W_1. 在砖墙和体积截断方法中，W_1 还含有 ϵ；在钝锥方法中，还含有 ϵ 和 η. 量 β 和 r_B 是确定这个问题的外参数. r_+ 由下面的即壳条件给出：

$$\alpha(\beta,r_B,r_+)=\frac{\beta}{4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}}=1. \tag{5.9.12}$$

先考虑顶角奇异性方法、钝锥和体积截断方法. 它们的作用量当即壳(5.9.12)时，与(5.3.16)和(5.3.17)给出的热力学作用量 $W_1(\beta,r_B)$ 相同：

$$W_1^*(\beta, r_B, r_+)|_{\alpha=1}=W_1(\beta, r_B). \tag{5.9.13}$$

式中星号代表 CS、BC 和 VC. 热力学熵 S_1^{TD} 由(5.3.19)给出:

$$S_1^{TD}=\beta\frac{\partial W_1(\beta, r_B)}{\partial\beta}\bigg|_{r_B}-W_1(\beta, r_B), \tag{5.9.14}$$

而即壳熵由(5.4.1)给出:

$$S_1^*=\beta\frac{\partial W_1^*(\beta, r_B, r_+)}{\partial\beta}\bigg|_{r_B, r_+}-W_1^*(\beta, r_B, r_+).$$

注意计算 S_1^* 时 r_+是固定的. 由此可得两个熵之差:

$$\Delta S^*=S_1^{TD}-s_1^*=$$

$$\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta}W_1(\beta, r_B)-\frac{\partial}{\partial\beta}W_1^*(\beta, r_B, r_+)\right)\bigg|_{\alpha=1}. \tag{5.9.15}$$

显然, ΔS^*不为零. 这说明为什么在一般情况下由离壳方法得到的黑洞熵单圈贡献和由即壳作用量经热力学计算得到的贡献不同.

3. 离壳熵与即壳熵的关系

现在我们给出各种离壳熵的显式. 和前面类似, 假定在做完熵的计算后令 $\alpha=1$. 得到的熵总认为是表征系统的参数 β 和 r_B 的函数. 为了简化, 我们以后略去这些说明. 也要注意, 有效作用量包含任意常数, 记为C 和 $C(\alpha)$. 类似的常数当然也出现在熵中. 这些常数已出现在前面熵的表达式中. 它们可能对讨论与热力学第三定律有关的问题很重要, 但对我们现在讨论的问题并不重要, 因此我们将不再提及它们. 我们也略去当其他参数取极限值($\epsilon=1,\eta=0$)时等于零的项.

比较方便的是从顶角奇异性方法得到的熵开始讨论. 由(5.9.2)式给出的有效作用量 $W_1^{CS}(C(\alpha=1)=0)$, 或者由(5.9.1)式给出的U, 得到

$$S_1^{CS}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{y}-1-\ln y+2\ln\frac{\beta}{2\pi\mu}\right). \tag{5.9.16}$$

令 $$S_1^T(\epsilon)=\frac{1}{6}\ln\frac{\mu}{\epsilon},\ S_1^{Las}(\epsilon)=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{\ln\frac{\beta}{2\pi\epsilon}}, \tag{5.9.17}$$

则前面所得各结果可表示为

$$S_1^{BW}=S_1^{CS}+S_1^T+S_1^{Cas}, \tag{5.9.18}$$

$$S_1^{VC}=S_1^{CS}+S_1^I, \tag{5.9.19}$$

$$S_1^{BC}=S_1^{CS}. \tag{5.9.20}$$

这样，钝锥方法和顶角奇异性方法给出相同的熵(有限的). 砖墙方法和体积截断方法给出的表达式含发散项 $\ln\epsilon$. S_1^{BW} 和 S_1^{VC} 之差 S_1^{Cas} 来源于两种方法边界条件的不同. 以上所有离壳熵都和(5.3.22)式给出的热力学熵单圈贡献 S_1^{TD} 不同. 后者可写为

$$S_1^{TD}=S_1^{CS}+\Delta S. \tag{5.9.21}$$

式中
$$\Delta S=\beta\left(\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\frac{\partial W_1^{CS}}{\partial r_+}\bigg|_{\beta, r_B}\right)_{\alpha=1}=$$

$$\frac{1}{48(2-3y)}(-14+26y-28y^2+13y^3)+\frac{1}{24}\ln y. \tag{5.9.22}$$

(5.9.18)式可以写成另一种便于解释的形式. 由(5.5.16)、(5.5.17)和(5.5.21)可得

$$S_1^{BW}=-\mathrm{Tr}[\hat\rho_\epsilon^H(\beta)\ln\hat\rho_\epsilon^H(\beta)]. \tag{5.9.23}$$

另一方面，

$$S_1^T+S_1^{Cas}=S_\epsilon^R(2\pi\mu)=-\mathrm{Tr}[\hat\rho_\epsilon^R(2\pi\mu)\ln\hat\rho_\epsilon^R(2\pi\mu)]. \tag{5.9.24}$$

此式就是 Rindler 空间中距视界(固有距离) ϵ 和 μ 的二镜面间无质量热辐射的熵. 距视界 μ 处测得的辐射温度为 $(2\pi\mu)^{-1}$. 故有

$$S_1^{CS}=-\{\mathrm{Tr}[\hat\rho_\epsilon^H(\beta)\ln\hat\rho_\epsilon^H(\beta)]-\mathrm{Tr}[\hat\rho_\epsilon^R(2\pi\mu)\ln\hat\rho_\epsilon^R(2\pi\mu)]\}. \tag{5.9.25}$$

容易证明，在内镜边界(ϵ 处)存在时，只要等式右边的量是用体积截断法计算的，同样的表达式仍然成立. 对于砖墙法和体积截断法，(5.9.25)右边的每一项当 $\epsilon\to0$ 时都发散，但其差有限. 若形式地定义黑洞和 Rindler 度规背景中的密度矩阵

$$\hat\rho^H(\beta)=\lim_{\epsilon\to0}\hat\rho_\epsilon^H(\beta),\quad \hat\rho^R(2\pi\mu)=\lim_{\epsilon\to0}\rho_\epsilon^R(2\pi\mu), \tag{5.9.26}$$

则对于体积截断法和砖墙法，有

$$S_1^{CS}(\beta, \alpha=1, y) = -\{\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^H(\beta)\ln\hat{\rho}^H(\beta)] -$$
$$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^R(2\pi\mu)\ln\hat{\rho}^R(2\pi\mu)]\}. \tag{5.9.27}$$

采用(5.9.21)式，我们最后得到

$$S_1^{TD} = -\{\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^H(\beta)\ln\hat{\rho}^H(\beta)] -$$
$$\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^R(2\pi\mu)\ln\hat{\rho}^R(2\pi\mu)]\} + \Delta S. \tag{5.9.28}$$

这一关系式表明，热力学熵单圈修正可由统计力学熵用下面的方法得到：先减去 Rindler 熵以消除发散性，再加上一有限的修正项 ΔS. 在后一部分我们将证明，第二项 ΔS 就是由于背景时空的量子修正引起的经典 B-H 熵的变化.

这里应提到，为得到进入黑洞的熵流的正确表达式，Thorne 和 Zurek[72, 73]提出从统计力学熵中减去黑洞热气的熵. 后者在视界附近和 S_{Rin}^{SM}相同. (5.9.28)式可以用来证明这个假设. 但是 Thorne 和 Zurek 并未考虑我们这里讨论的熵的量子修正. (5.9.28)式不仅解释了 S^{SM}中的无限大体积是如何分割的，还给出了熵的量子修正依赖于物理特性的精确表达式.

4. 熵和反作用效应

含量子单圈修正的黑洞热力学熵为

$$S^{TD} = S^{BH}(r_+) + S_1^{TD}. \tag{5.9.29}$$

式中 $\quad S^{BH}(r_+) = \pi r_+^2$

是 Bekenstein-Hawking 熵. 由于量子效应，含量子修正的"真实解$(\bar{\gamma}, \bar{r})$与经典史瓦希解(γ, r)不同. 特别是，dilaton 场在$\bar{\gamma}$的视界处取值$\bar{r}_+$与其经典值r_+不同. 现在我们证明(5.9.29)式可以写成

$$S^{TD} = \pi\bar{r}_+^2 + S_1^{CS}. \tag{5.9.30}$$

证明的第一步是得到决定$\bar{r}_+$的方程. 对于给定的边界条件(β, r_B)，欧氏有效作用量的极值点确定一规则量子解. 这个解可由解场方程

$$\frac{\delta W}{\delta\bar{\gamma}} = \frac{\delta W}{\delta\bar{r}} = 0$$

得到，解中的任意常数可由视界规则条件确定，这样决定了$\bar{r}_+$是

(β, r_+)的函数. 对于常数的其他选择，此解有类顶角奇异性. 我们称这解为量子奇异瞬子，它遵从局域场方程，但能给出 W 的整体极值点. 量子奇异瞬子由(β, r_B)和任意参数 $\bar{r}_+$确定. 我们将此解记为$[\bar{\gamma}(\bar{r}_-), \bar{r}(\bar{r}_+)]$. 在量子奇异瞬子上，计算得到有效作用量为

$$W(\beta, r_B, \bar{r}_+) \equiv W[\beta, r_B, \bar{\gamma}(\bar{r}_-), \bar{r}(\bar{r}_-)] = \\ I[\beta, r_B, \bar{\gamma}(\bar{r}_-), \bar{r}(\bar{r}_-)] + W_1^{CS}[\beta, r_B, \bar{\gamma}(\bar{r}_-), \bar{r}(\bar{r}_-)]. \tag{5.9.31}$$

W 的整体极值条件

$$\frac{\partial W(\beta, r_B, r_+)}{\partial r_+} = 0 \tag{5.9.32}$$

给出规则量子瞬子的视界半径 $\bar{r}_- = \bar{r}_+(\beta, r_B)$. 在这些计算中，我们只保留到 $\hbar$ 的一阶项. 因此，可以把(5.9.31)中右边的第二项换成由经典奇异瞬子得到的 W_1^{CS}：

$$W_1^{CS}[\beta, r_B, \bar{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)] \to W_1^{CS}[\beta, r_B, \gamma(\bar{r}_+), r(\bar{r}_+)].$$

也可以把(5.9.31)中经典作用量 I 中的$[\bar{\gamma}(\bar{r}_-), \bar{r}(\bar{r}_+)]$替换成经典奇异瞬子解$[\gamma(\bar{r}_+), r(\bar{r}_+)]$，只要保持 dilaton 场在视界处的值 $\bar{r}_+$不变. 为了证明这一点，考虑经典作用量(5.3.1)的一般变分，固定 r_B 和 β，得到

$$I[\beta, r_B, \bar{\gamma}, \bar{r}] = I[\beta, r_B, \gamma, r] + \\ \int\left[\frac{\delta I}{\delta\gamma_{ab}}\bigg|_{\gamma_{ab}}(\bar{\gamma}_{ab} - \gamma_{ab}) + \frac{\delta I}{\delta r}\delta r\right] + r_{,\mu}n^\mu\big|_{r=r_+}\delta r_+ - \\ 2\pi(1-\alpha) r_+ \delta r_+ + o(\hbar^2). \tag{5.9.33}$$

假设 dilaton 场在顶角处的值为 r_+，相应的由(γ, r)在 r_-处确定的角亏损记为 $2\pi(1-\alpha)$. (5.9.33)表明，若 γ 和 $\bar{\gamma}$ 的 r_+值相同，且(γ, r)为经典方程 $\delta I/\delta\gamma_{ab} = 0$ 和 $\delta I/\delta r = 0$ 的解，则由$(\bar{\gamma}, r)$得到的经典作用量的值与经典值 $I[\beta, r_B, \gamma, r]$只差一量级为 $o(\hbar^2)$ 的项. 这就是为什么我们可以把(5.9.31)中的 $I[\beta, r_B, \bar{\gamma}(\bar{r}_+), \bar{r}(\bar{r}_+)]$换成由经典奇异瞬子所得的值 $I(\beta, r_B, r_+)$. 后者容易计

算，其表达式为

$$I(\beta,\ r_B,r_+)=\beta E(r_B,r_+)-\pi r_+^2,\tag{5.9.34}$$

$$E(r_B,\ r_+)\equiv r_B[1-(1-r_+/r_B)^{1/2}].$$

式中 E 为准局域能量[49,74].

定义量子视界"位置"$\bar{r}_+$的(5.9.32)可写为

$$\frac{\partial W_1^{CS}(\beta,\ r_B,r_+)}{\partial r_+}=-2\pi\bar{r}_+(\bar{\alpha}-1).\tag{5.9.35}$$

式中

$$\alpha=\alpha(\beta,\ r_B,r_+)=\beta[4\pi r_+\sqrt{1-r_+/r_B}]^{-1},$$

$\bar{\alpha}$ 为与 $r_+=\bar{r}_+$对应的经典离壳参数 α 的值. 对于经典规则瞬子，$\alpha=1$. 这表明精确到 $\hbar^2$，我们可以得到

$$2\pi\bar{r}_+(\bar{\alpha}-1)=2\pi r_+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r_+}\right)_{\alpha=1}\Delta r_+.\tag{5.9.36}$$

式中 $\Delta r_+=\bar{r}_+-r_+$，是量子修正引起的黑洞视界"位置"的改变. 由 α 的显式易得

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r_+}\right)_{\alpha=1}=-\left[\beta\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\right]_{\alpha=1}^{-1}.\tag{5.9.37}$$

因此有 $$2\pi r_+\Delta r_+=\beta\left[\frac{\partial r_+}{\partial\beta}\frac{\partial W_1^{CS}}{\partial r_+}\right]_{\alpha=1},\tag{5.9.38}$$

且由(5.9.22)得到

$$\Delta S=2\pi r_+\Delta r_+.\tag{5.9.39}$$

于是，精确到 $o(\hbar^2)$，量 ΔS 可以写成

$$\Delta S=S^{BH}(\bar{r}_+)-S^{BH}(r_+).$$

另一方面，考虑到(5.9.21)，热力学熵(5.9.29)可以写为

$$S^{TD}=S^{BH}(r_+)+\Delta S+S_1^{CS}.$$

这些式子便证明了(5.9.31)式.

§5.10 小　　结

现在讨论把即壳结果和各种离壳结果进行比较所得到的结论. 首先，直接计算证明了，由自由能对温度变分得到的黑洞热

力学熵 S^{TD}和由 $S^{SM}=-\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^H\ln\hat{\rho}^H)$（$\hat{\rho}^H$ 为黑洞内部自由度的密度矩阵）确定的统计力学熵 S^{SM}是不同的．热力学熵包括主体部分 $S^{BH}=A/4$ 和有限单圈修正 S_1^{TD}．而 S_1^{TD} 可以由即壳有效作用量得到．统计力学熵 S^{SM}定义为一单圈量，且其计算要用离壳方法．S^{SM}可等同于体积截断熵 S_1^{VC}．于是包含发散项 $\ln\epsilon$，其中 ϵ 是使体积分有限而引入的固有距离截断．S^{SM}中主要对数项也出现于砖墙模型中，但一般地，由于 Casimir 效应，S_1^{BM} 中有另一发散项 $\ln|\ln\epsilon|$．

S^{TD}和 S^{SM}不同的物理原因与作为热力学系统的黑洞的特殊性质有关．黑洞的内部自由度由在黑洞几何内传播的激发来确定．而这一几何又由质量参数惟一确定．在热平衡态中，质量是外部温度的函数．因此，要得到 S_1^{TD} 须改变温度．这导致描述这些内部激发的哈米顿的改变．另一方面，在计算 S^{SM}时，黑洞质量和哈米顿是固定的．

我们已经证明，黑洞的热力学熵可以表示为下面的形式：

$$S^{TD}=S^{BH}(\bar{r}_+)+[S^{SM}-S^{SM}_{\text{Rindler}}]. \tag{5.10.1}$$

式中 $S^{BH}(\bar{r}_+)=\pi\bar{r}_+^2$ 是 B-H 黑洞的熵，$\bar{r}_+$是“量子”黑洞视界的“半径”．第二项是黑洞和 Rindler 空间的统计力学熵之差．二者的表达式分别为

$$S^{SM}=-\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^H(\beta)\ln\hat{\rho}^H(\beta)]$$

和
$$S^{SM}_{\text{Rindler}}=-\mathrm{Tr}[\hat{\rho}^R(2\pi\mu)\ln\hat{\rho}^R(2\pi\mu)].$$

删减法则自动去掉 S^{SM}中的发散项．

我们曾在 2 维情况下用直接计算证明了式(9.10.1)；但这似乎是普遍性质，它（或其推广）对 4 维情况肯定成立．这是因为即壳重整化量 S^{TD}总是有限的，故(5.10.1)中的差项总会导致 S^{SM}中体积发散的消除[75]．在 4 维情况下导出类似于(5.10.1)的关系的一种可行方法是利用光学度规，使得所需的差项可由高温展开得到．因此，差项中奇异项 ϵ 的不同阶的系数必须与 Schwinger-De Witt 系数相联系．

顶角奇异性方法的一个显著特点是（至少在 2 维情况下）可以

立即给出有限的结果：

$$S_{\rm I}^{CS}=S^{SM}-S_{\rm Rm}^{CS}. \tag{5.10.2}$$

$S_{\rm I}^{CS}$ 有限而 $S_{\rm I}^{YC}$ 含有体积发散的数学原因与用来计算相应的有效作用量的流形拓扑不同有关. 对于 $S_{\rm I}^{YC}$，标准流形有柱面(或环)的拓扑；而对于 $S_{\rm I}^{CS}$，拓扑为 D^2，与 G-H 瞬子的拓扑相同. 当从标准单位盘 D^2 上切下一半径为 ϵ 的小盘而变成环时，其数学操作可解释为减去缠绕熵[76] $S_{\rm Rm}^{SM}=-{\rm Tr}(\hat{\rho}^K\ln\rho^K)$.

再次强调，在我们所采用的方法中，一开始就已经完成了重整，故只有可观测的有限耦合常数出现于结果中. 我们论证了某些离壳方法需要附加一截断参数 ϵ. 它与紫外截断 δ 完全无关，见(5.3.9)和(5.6.1). 而且参数 ϵ 只出现在中间运算过程中，不含于最后的可观测的结果中. 我们证明了物理可观测量的量子修正总可由即壳量得到. 于是，对于质量远大于普朗克质量的黑洞而言，可观测量的量子修正很小，与普朗克尺度的物理无关. 这就区分了即壳量和离壳量，如 S^{SM}.

还有一个更一般的问题要说明. 既然表征热平衡黑洞或表征黑洞从一平衡态到另一平衡态的跃迁的可观测量可以只由即壳量得到，那么为什么在黑洞热力学中还要用离壳方法呢? 我们已经看到，原因之一是建立统计力学熵和热力学熵之间关系的需要，在这个意义上，离壳方法可以看作计算和解释即壳量的有用工具. 但我们相信，除了这个简单的理由以外，一定还有更深层次的原因. 离壳方法对描述含黑洞系统的非平衡过程也会是有用的. 在这种情况下，热力学系统的量子涨落和热涨落可由随机噪声来描述，这相当于系统离壳情况. 因此，可以想到，由视界附近能量激增而激发的黑洞向平衡态过渡的过程，会用到某些上述的离壳特性.

下面三节相当于前面推导过程的附录. 为了使前几节的内容更集中，把它们抽出来放在后面.

§ 5.11　二维有效作用量的共形变换

为了完整，本节推导下面有效作用量的共形变换：

$$W_1[\gamma] = \frac{1}{2}\ln\det[-\Delta] = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\mathrm{Tr}(e^{s\Delta}),$$

(5.11.1)

它定义在 2 维欧氏流形 M_α 上，其边界为 ∂M_α，M_α 在点 x_r 处有顶角奇异性，亏损角为 $2\pi(1-\alpha)$. 我们采用[77]给出的方法，并利用维数规则法，考虑 d 维空间共形不变算符 $D=\Delta-(d-2)[4(d-1)]^{-1}R$ 的有效作用量 W_1. 它的发散部分 W_1^{div} 可由渐近热核展开得到：

$$\mathrm{Tr}(e^{SD}) = \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}}\sum_{n=0,1/2}^{\infty} a_n^{(d)}s^n. \tag{5.11.2}$$

在 2 维情况下，对维数规则，

$$W_1^{\mathrm{div}}=\frac{1}{d-2}\frac{a_1^{(d)}}{4\pi}. \tag{5.11.3}$$

式中对于任意 α 有

$$a_1^{(d)} = \left(\frac{1}{6}-\frac{d-2}{4(d-1)}\right)\int_{M_\alpha}R + \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\int_\Sigma + \frac{1}{3}\int_{\partial M_\alpha}k. \tag{5.11.4}$$

这里，奇点 x_r 被维数为 $d-2$ 的奇异面 Σ 代替，标曲率 R 的积分沿着 M_α 的规则部分，k 是类空边界 ∂M_α 的第二基本形式，定义为 $k=\nabla^\mu n_\mu$.

重整化作用量由非重整化(裸)作用量 W_1^{bare} 和它的发散部分 W_1^{div} 之差确定：

$$W_1=W_1^{\mathrm{bare}}-W_1^{\mathrm{div}}. \tag{5.11.5}$$

在 M_α 上度规共形变换($\tilde{\gamma}_{\mu\nu}=e^{-2\sigma}\gamma_{\mu\nu}$)下，重整化作用量变为[75]

$$W_1(\bar{\gamma})-W_1(\gamma)=\frac{1}{4\pi}\lim_{d\to 2}\frac{1}{2-d}[a_1^{(d)}(\bar{\gamma})-a_1^{(d)}(\gamma)]. \tag{5.11.6}$$

我们只考虑不“挤压”顶角奇异性的那些变换. 于是利用关系式

$$\tilde{R}=e^{2\sigma}\{R+(d-1)[2\Delta\sigma+(2-d)\sigma_{,\alpha}\sigma^{,\alpha}]\}, \tag{5.11.7}$$

$$\tilde{k}=e^{\sigma}[k-(d-1)\sigma_{,\mu}n^{\mu}]. \tag{5.11.8}$$

由(5.11.6)得到

$$W(\bar{\gamma})-W(\gamma)=\frac{1}{24\pi}\left[\int_{M_\alpha}\mathrm{d}x[R\sigma-(\nabla\sigma)^2]+\int_{\partial M_\alpha}\mathrm{d}x(2k\sigma+3\sigma_{,\mu}n^{\mu})\right]+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\sigma(x_s). \tag{5.11.9}$$

这就是期望的有效作用量的共形变换；如果流形在几个点 x_s 处有顶角奇异性，角亏损为 $2\pi(1-\alpha_s)$，则(5.11.9)中最后一项应换成对所有 x_s 求和. 若流形无顶角奇异性，此项为零($\alpha=1$)，(5.11.9)可以写成另一等价形式：

$$W(\bar{\gamma})-W(\gamma)=\frac{1}{48\pi}\int_{M_\alpha}\mathrm{d}^2x\sigma(\bar{\gamma}^{1/2}\tilde{R}+\gamma^{1/2}R)+\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M_\alpha}\mathrm{d}x\sigma(\tilde{h}^{1/2}\tilde{k}+h^{1/2}k)-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M_\alpha}\mathrm{d}x(\tilde{h}^{1/2}\tilde{k}-h^{1/2}k)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)\sigma(x_s). \tag{5.11.10}$$

式中 $\quad h^{1/2}k-\tilde{h}^{1/2}\tilde{k}=h^{1/2}n^{\alpha}\partial_{\alpha}\sigma,$

共形因子 σ 应理解为方程

$$-2\gamma^{1/2}\Box\sigma=\gamma^{1/2}R-\tilde{\gamma}^{1/2}\tilde{R}$$

的解.

§ 5.12 二维标量场的有效作用量和自由能

考虑 2 维流形上的共形无质量标量场 ϕ. 设度规不含欧氏时

间，可写为

$$ds^2=\exp[2\sigma(x)]\{d\tau^2+dx^2\},0\leqslant\tau\leqslant\beta,\ x_0\leqslant x\leqslant x_1. \tag{5.12.1}$$

共形标量场满足

$$\Delta\phi=\exp[-2\sigma(x)]\left\{\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}\phi=0. \tag{5.12.2}$$

为了简单，我们考虑具有狄里赫利边界条件 $\phi(x_0)=\phi(x_1)=0$ 的问题.

利用有效作用量的共形变换(见§5.11)，可以把流形(5.12.1)上的有效作用量计算简化为柱面 Q 上的计算. Q 在欧氏时间上有周期 β，长为 $L=x_1-x_0$. 柱面的单圈有效作用量 $W_1^Q(\beta,L)$ 可写成

$$\begin{aligned}W_1^Q(\beta,L)&=\frac{1}{2}\ln\det(-\mu^2\Delta)=\\&-\frac{1}{2}\zeta'(0)+\frac{1}{2}\zeta(0)\ln\mu^2=\\&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}\sum_\lambda(\mu^2\lambda)^{-z}\right]_{z=0}.\end{aligned}$$

式中 μ 为一任意参数，量纲为长度，广义函数 $\zeta(z)=\Sigma_\lambda[\mu^2\lambda]^{-z}$ 表示对算符 Δ 的所有本征值 λ 求和. 虽然有效作用量中 μ 有伸缩不确定性，但所有物理量都是有确定定义的. 对于狄里赫利边界条件，把柱面拉普拉斯算符的本征值

$$\lambda_{mn}=(2\pi/\beta)^2n^2+(\pi/L)^2m^2$$

代入，得到

$$\begin{aligned}W_1^Q(\beta,L)&=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\mu^2\left(\frac{4\pi^2}{\beta^2}n^2+\right.\right.\right.\\&\left.\left.\left.\frac{\pi^2}{L^2}m^2\right)\right]^{-z}\right\}_{z=0}=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2\pi\mu}{\beta}n\right)^{-2z}\times\right.\\&\left.\left(1+\frac{\beta^2}{4L^2}\frac{m^2}{n^2}\right)^{-z}\right\}_{z=0}.\end{aligned} \tag{5.12.3}$$

应用式

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)=\frac{\sinh\pi\alpha}{\pi\alpha}, \tag{5.12.4}$$

并把其余的无限和与积用黎曼 ζ 函数的项表示，最后得到

$$W_1^Q(\beta, L) = \beta\mathscr{F} - \frac{\pi\beta}{24L}, \tag{5.12.5}$$

式中
$$\beta\mathscr{F} = \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \exp\left[-\beta\frac{\pi}{L}n\right]\right). \tag{5.12.6}$$

现在证明 $\mathscr{F}$ 就是体积 L 中标量粒子气体的热力学自由能. 在统计力学中，系统的自由能定义为

$$\exp[-\beta\mathscr{F}] = \mathrm{Tr}\exp[-\beta :\hat{H}:]. \tag{5.12.7}$$

若选取哈米顿 $\hat{H} = \sqrt{-\partial_x^2}$ 的本征函数为基函数，自由能可写为对所有动力学自由度求和：

$$\beta\mathscr{F} = \sum_n \ln(1 - e^{\beta\omega_n}). \tag{5.12.8}$$

式中 β 为温度倒数，ω_n 为量子系统的能级. 这样，只要知道系统的能谱，便可以计算自由能.（5.12.2）容易解出，并得到系统的能级：

$$\omega_n = \frac{\pi}{L}n,\ L = x_1 - x_0.$$

注意 $n=0$ 的模式应从(5.12.8)的求和中去掉，因为其幅由狄里赫利边界条件确定，因而不是可重整化的，不是一个动力学自由度(对于 Newmann 边界条件，零模式将会对自由能有贡献).
所以，对于狄里赫利边界条件，自由能为

$$\mathscr{F} = \frac{1}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1 - \exp\left[-\beta\frac{\pi}{L}n\right]\right),$$

与(5.12.6)相同.

现在我们考虑高温极限. 即柱长 L 远大于 β. 在这一极限条件下，能级之间的距离远小于温度：$\pi/L \ll 1/\beta$，对 n 的求和可以用欧拉-麦克劳林公式计算：

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty}\mathrm{d}x f(x) - \int_0^1 \mathrm{d}x f(x) + \frac{1}{2}f(1) + \sum_{n=1}^{\infty} c_k f^{(k)}(1).$$

式中系数 c_k 可用伯努利数

$$c_k=(-1)^k\frac{B_{k-1}}{(k+1)!}$$

表示，并假设函数 $f(x)$ 连同它的所有导数在无限远处减小. 把函数式

$$f(x)=\ln[1-\exp(-sx)]$$

代入，考虑到关系式

$$\ln\Gamma(z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\ln(z)-z+\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)(2m-1)z^{2m-1}},$$

$$|\arg z|<\pi,$$

可以证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1-\exp[-sn])=-\frac{\pi^2}{6s}-\frac{1}{2}\ln\left[\frac{s}{2\pi}\right]+\frac{1}{24}s+o(s). \tag{5.12.9}$$

对于自由能，可得

$$\beta\mathscr{F}=-\frac{\pi L}{6\beta}-\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{2L}+\frac{\pi\beta}{24L}+o\left(\frac{\beta}{L}\right). \tag{5.12.10}$$

有效作用量为

$$W_1^Q=-\frac{\pi L}{6\beta}-\frac{1}{2}\ln\frac{\beta}{2L}+o\left(\frac{\beta}{L}\right). \tag{5.12.11}$$

可以证明，表达式 $o(\beta/L)$ 不是解析的，且当 $\beta\leqslant L$ 时很快趋于零.

注意，就构成而言，共形场的 $\beta\mathscr{F}$ 是共形不变的，因为能谱是共形不变的. 这一性质把它和欧氏有效作用量 W_1 区别开. 重整化的有效作用量 $W_1{}^Q(\beta, L)$ 和 $\beta\mathscr{F}$ 只差 $-\beta$ 的线性项[78, 79].

§5.13 砖墙边界附近的 Casimir 效应和场涨落

本节我们详细讨论视界附近边界处的场涨落及其和砖墙方法中出现的 Casimir 效应之间的关系. 这里不考虑黑洞背景，而考虑

Rindler 空间中的量子场，在 $x=1$ 处测得温度的倒数为 $2\pi\alpha$，且令 $\mu=1$. 这一简化是可行的，因为我们只对视界附近[空间类似一个锥(5.6.3)]发生的效应感兴趣.

假设砖墙位于点 $x=\epsilon$ 处，于是砖墙有效作用量就是 C_α 的 $K_{\alpha,\epsilon}$ 部分上的作用量，如图.



图 4-20

这样，由(5.5.6)、(5.5.7)和(5.9.9)，对圆锥而言，与(5.9.10)对应的式子为

$$W_1^{BW}(\alpha,\epsilon)=W_1[K_{\alpha,\epsilon}]=$$
$$W_1[C_\alpha]-W_1[C_{\alpha,\epsilon}]+W_1^{\mathrm{Cas}}(2\pi\alpha,\alpha,\epsilon),$$
$$W_1^{\mathrm{Cas}}(2\pi\alpha,\alpha,\epsilon)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\pi\alpha}{\ln\epsilon^{-1}}. \tag{5.13.1}$$

现在我们的任务是分析 Casimir 项 $W_1^{\mathrm{Cas}}(2\pi\alpha,\alpha,\epsilon)$是如何与 $x=\epsilon$ 附近的量子涨落相联系的. 故首先分析 C_α 上配分函数的路径积分表示：

$$Z_1[C_\alpha]=e^{-W_1[C_\alpha]}=\int[\mathrm{D}\phi]e^{-I[\phi]}=$$
$$\int[\mathrm{D}\phi]\exp\left(-\frac{1}{2}\int\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}\right). \tag{5.13.2}$$

我们可以把所有的变量分成三组：

$$Z_1[C_\alpha]=\int[\mathrm{D}\phi_1][\mathrm{D}\psi][\mathrm{D}\phi_2]e^{-I[\phi]}. \tag{5.13.3}$$

式中 ϕ_1 和 ϕ_2 分别为区域 $x<\epsilon$ 和 $x>\epsilon$ 内的场，而 $\psi=\phi(x=\epsilon)$. 在每一组，可以作变换

$$\phi_k=\phi_k'+\chi_k, \tag{5.13.4}$$

$$\Delta\chi_k=0,\ \chi_k(x=\epsilon)=\psi,\ k=1,\ 2,\ \chi_2(x=1)=0. \tag{5.13.5}$$

新变量 ϕ'_k 满足狄里赫利边界条件. 由此并考虑到场 χ_k 是谐和的，可以把经典作用量表示为

$$I[\phi_1+\phi_2]=I[\phi_1']+I[\phi'_2]+W[\psi]. \tag{5.13.6}$$

式中

$$W[\psi]=I[\chi_1]+I[\chi_2],$$

当 $\chi_1(x=\epsilon)=\chi_2(x=\epsilon)=\psi.$

现在，配分函数表示成乘积形式：

$$Z_1[C_\alpha]=\int[\mathrm{D}\phi_1']e^{-I[\phi_1']}\int[\mathrm{D}\psi]e^{-W[\psi]}\int[\mathrm{D}\phi_2']e^{-I[\phi_2']}=$$

$$Z[C_{\alpha,\epsilon}]Z[K_{\alpha,\epsilon}]\int[\mathrm{D}\psi]e^{-W[\psi]}. \tag{5.13.7}$$

上式中第一个因子是半径为 ϵ(很小)的锥上的配分函数，第二个因子是空间 $K_{\alpha,\epsilon}$ 上的配分函数，由砖墙模型作用量 $W_1^{BW}(\alpha,\epsilon)$决定：

$$Z[K_{\alpha,\epsilon}]=e^{-W_1[K_\alpha]}=e^{-W_1^{BW}(\alpha,\epsilon)}. \tag{5.13.8}$$

对 ψ 的积分描述点 $x=\epsilon$ 处场的量子涨落. 我们证明，正是这一积分产生了有效作用量中的Casimir 项. 实际上，(5.13.5)具有如下解：

$$\chi_1(x,\ \tau)=\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n^{(1)}\cos\frac{n\tau}{\alpha}+\psi_n^{(2)}\sin\frac{n\tau}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\epsilon}\right)^{n/\alpha}, \tag{5.13.9}$$

$$\chi_2(x,\ \tau)=\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n^{(1)}\cos\frac{n\tau}{\alpha}+\psi_n^{(2)}\sin\frac{n\tau}{\alpha}\right)\times$$

$$\left(\frac{\epsilon}{x}\right)^{n/\alpha}\frac{1-x^{2n/\alpha}}{1-\epsilon^{2n/\alpha}}+\frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi\alpha}}\ln x/\epsilon. \tag{5.13.10}$$

式中 $\psi_n^{(k)}$，ψ_0 是边界上场 ψ 的傅里叶系数：

$$\psi(\tau)=\sqrt{\frac{1}{\pi\alpha}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi_n^{(1)}\cos\frac{n\tau}{\alpha}+\psi_n^{(2)}\sin\frac{n\tau}{\alpha}\right)+\frac{\psi_0}{\sqrt{2\pi\alpha}}, \tag{5.13.11}$$

它们由圆 $0\leqslant\pi\leqslant 2\pi\alpha$ 上的正交基确定.精确到 $o(\epsilon)$项，上式给出作用量，形式为

$$W[\psi]=I[\chi_1]+I[\chi_2]=$$

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}[(\psi_n^{(1)})^2+(\psi_n^{(2)})^2]+\left(2\ln\frac{1}{\epsilon}\right)^{-1}\psi_0^2+o(\epsilon). \tag{5.13.12}$$

对 ψ 的积分具有高斯形式，可以精确求值.积分测度(差一归一化数字系数)可写为

$$[\mathrm{D}\psi]=\epsilon^{1/2}\mathrm{d}\psi_0\prod_{n=1}^{\infty}\epsilon^{1/2}\mathrm{d}\psi_n^{(1)}\prod_{n=1}^{\infty}\epsilon^{1/2}\mathrm{d}\psi_n^{(1)}. \tag{5.13.13}$$

式中乘数 $\epsilon^{1/2}$的出现是由于含有因子 $g^{1/4}$(在 $x=\epsilon$ 处)的协变测度.这样，对场 ψ 的积分结果是

$$\int[\mathrm{D}\psi]e^{-\beta W[\psi]}=N\left(\epsilon\ln\frac{1}{\epsilon}\right)^{1/2}\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\ln(\alpha\epsilon)\right). \tag{5.13.14}$$

式中 N 为数字常数.用黎曼 zeta 函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}=\lim_{z\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}=\zeta_R(0)=-\frac{1}{2}$$

把(5.13.14)中的无穷和规则化以后，给出 Casimir 项

$$\int[\mathrm{D}\psi]e^{-\beta W[\psi]}=N\left(\frac{\ln\epsilon^{-1}}{\alpha}\right)^{1/2}=Ne^{W_1^{\mathrm{Cas}}(\alpha,\epsilon)}. \tag{5.13.15}$$

由(5.3.7)和(5.3.15)得到

$$e^{W_1[C_\alpha]}=Z_1[C_{\alpha,\epsilon}]Z[K_{\alpha,\epsilon}]e^{W_1^{\mathrm{Cas}}(\alpha,\epsilon)}=$$

$$\exp\{-(W[C_{\alpha,\epsilon}]+W[K_{\alpha,\epsilon}]-W_1^{\mathrm{Cas}}[\alpha,\epsilon])\}. \tag{5.13.16}$$

此式显然给出了砖墙模型作用量 W_1^{BW}和锥上作用量 $W_1[C_\alpha]$之间的关系[(5.9.1)式]，我们在前面曾经用共形变换得到过.

本章的后一部分讨论荷电黑洞的量子修正.

首先从 4 维爱因斯坦-麦克斯威理论出发，通过球对称退化，得到荷电黑洞的 2 维模型，并讨论其量子修正.考虑任意温度的

系统，用离壳方法重新表述了经典热力学．考虑视界处存在顶角奇异性，引力作用量也应有一定义在视界处的修正项．作用量泛函的变分程序得到自洽表述[56]．我们发现对于规则流形($T=T_H$)自由能取极值．还重新审查了对作用量的单圈贡献(Liouville-Polyakov 形式)，从而建立 L-P 项对量子场状态的依赖关系，得到有顶角亏损的 2 维时空对 L-P 项的修正．还要讨论 Hawking 辐射(详见下一章)对时空几何的反作用，并用微扰方法计算量子修正的黑洞度规．在离壳框架下，得到单圈热力学能量和熵．揭示它们都包含两部分：一部分来自黑洞周围的热气体，一部分来自黑洞本身．而且热气体的贡献可以通过适当选择参考几何(一般是非平直的)来消除．对量子修正的黑洞，得到熵与视界面积关系对经典定理的偏离，还将讨论其可能产生的物理效应．

在黑洞物理中，量子效应有双重作用．半经典地看，可认为黑洞被 Hawking 辐射所包围，此辐射在远处变成热态的[热澡(heat bath)]．由于辐射具有能-动张量，其反作用导致黑洞几何的改变．另一方面，量子修正将改变有效作用量．这又将导致计算黑洞能量和熵的公式的改变．几何的量子修正会影响黑洞参量，如视界半径；因而会带来数量级为 $\ln M$ 的修正，这是不能忽略的．因此，当考虑黑洞量子热力学时，必须包括反作用效应[80]．

2 维物理研究得不少[81,82]，上述问题也可以精确求解．2 维非定域的 L-P 作用量把 Hawking 辐射及其对几何的反作用都可以包括进来．因此，在经典引力作用量中加入 L-P 项将给出黑洞的完全半经典描述．有一点应该强调，即 L-P 作用量有某些不确定性，除非具体说明量子场的状态．在黑洞和热辐射平衡的情况下，则要说明远处的热澡．结果有效作用量依赖于量子场的热态．原则上，这个态可以由一温度(非霍金温度)所表征．一个由来已久的明显事实是，这样的态可以有效地用奇异瞬子上的量子场来描述．这可能解决了为什么欧氏奇异性方法(见前节)给出了黑洞热力学的合理表述．

我们下面将从含边界项的 4 维爱因斯坦-麦克斯威理论开始．

接着考虑球对称度规，令此模型退化为一个有效的 2 维模型(dilaton 类). 其经典解描述著名的 R-N 荷电黑洞.

§5.14 四维爱因斯坦-麦克斯威理论的球对称退化

考虑与麦克斯威场耦合的 4 维爱因斯坦引力. 其作用量为(取欧氏号差)

$$W_{\mathrm{cl}}=-\frac{1}{16\pi G}\int_{M^4}R^{(4)}\sqrt{g}\,\mathrm{d}^4x+\frac{1}{16\pi G}\int_{M^4}F_{\mu\nu}^2\sqrt{g}\,\mathrm{d}^4x-\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial M^4}K^{(4)}\sqrt{h}\,\mathrm{d}^3x. \tag{5.14.1}$$

式中 $R^{(4)}$是 4 维标曲率. 我们加入了边界项. $K^{(4)}$是边界 ∂M^4 的外曲率的迹. 若 n^μ 是垂直于 ∂M^4 的外单位矢，我们有

$$K^{(4)}=\nabla_\mu n^\mu. \tag{5.14.2}$$

当边界 ∂M 趋于无穷远时，作用量(5.14.1)发散. 单圈有效作用量也同样. 因此需要某种删除法则. 一般地，可以把这个发散量和定义在特定背景时空中的同一个量进行比较. 若 $g^0_{\mu\nu}$为背景度规，我们定义删减后的表达式为

$$W_{\mathrm{sub}}=W[g_{\mu\nu}]-W[g^0_{\mu\nu}]. \tag{5.14.3}$$

式中 W 包括经典项(5.14.1)和单圈引力作用量. 在量子的情况下，必须考虑减掉渐近非平直参考度规. 因此我们讨论任意的参考系(背景).

第一个目标是在球对称时空的情况下约化作用量(5.14.1). 球对称度规为

$$\mathrm{d}s^2=\gamma_{\alpha\beta}(z)\mathrm{d}z^\alpha\mathrm{d}z^\beta+r^2(z)(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{5.14.4}$$

式中 $\alpha,\beta,\cdots=0,1$；$\gamma_{\alpha\beta}(z)$是有效 2 维空间 M^2 上的度规；$z^\alpha=(\tau,x)$和 $r^2(z)$是 M^2 上的标量场. 对于度规(5.14.4)，曲率标量为

$$R^{(4)}=R^{(2)}+\frac{2}{r^2}(\nabla r)^2-\frac{2}{r^2}\Box r^2+\frac{2}{r^2}. \tag{5.14.5}$$

式中所有的几何量都是由 2 维度规定义的.

对于球对称情况，M^4 的边界 ∂M^4 是一直积 $\partial M^4=\partial M^2\times S^2$，

其中∂M^2是2维空间M^2的边界，S^2是2维球.法矢n^μ只在与M^2相切的方向上才有非零分量，$n^\mu=(n^a, 0, 0)$.因此，对边界的外曲率之迹(5.14.2)，我们有

$$K^{(4)}=k+2n^a\frac{\partial_a r}{r},$$

$$k\equiv\nabla_a n^a\equiv\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_a(\sqrt{\gamma}n^a)=\partial_a n^a+\frac{1}{2\gamma}\partial_a\gamma n^a. \tag{5.14.6}$$

式中$\gamma=\det\gamma_{\alpha\beta}$.如果度规又是静态的，则可写成史瓦希形式：

$$ds^2=g(x)d\tau^2+g^{-1}(x)dx^2+r^2(x)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5.14.7}$$

于是$n^a=(0, g^{1/2})$，且有

$$K^{(4)}=k+\frac{2}{r}r'g^{1/2},\ k=(g^{1/2})'.$$

和我们的球对称假设一致，麦克斯威场与M^2相切，即规范曲率的惟一非零分量为$F_{\tau r}\neq 0$.

由于方程(5.14.1)中对θ, φ积分导致

$$\int\sqrt{g}\,d\theta d\varphi=4\pi r^2\sqrt{\gamma},$$

我们最终得到

$$W_{cl}=-\frac{1}{4G}\int_{M^2}[r^2R+2(\nabla r)^2+2]\sqrt{\gamma}d^2z+\frac{1}{4G}\int_{M^2}r^2F^2_{\alpha\beta}\sqrt{\gamma}d^2z-\frac{1}{2G}\int_{\partial M^2}r^2k. \tag{5.14.8}$$

2维情况下，$F_{\alpha\beta}$只有一个分量

$$F_{\alpha\beta}=\epsilon_{\alpha\beta}F. \tag{5.14.9}$$

式中$\epsilon_{\alpha\beta}$为勒维-西维塔张量.故从麦克斯威方程得到

$$\nabla_\alpha(r^2F^{\alpha\beta})=0,$$

$$F=\frac{Q}{r^2},\ Q=\text{const}. \tag{5.14.10}$$

式中Q为电荷.

把(5.14.9)和(5.14.10)代入作用量(5.14.8)，我们发现整个理论退化为2维dilaton引力：

$$W_{cl} = -\frac{1}{4G}\int_{M^2}[r^2R + 2(\nabla r)^2 + 2U(r)]\sqrt{\gamma}\,d^2z - \frac{1}{2G}\int_{\partial M^2} r^2 k. \tag{5.14.11}$$

式中场 $r^2(z)$起 dilaton 场的作用. dilaton 势为

$$U(r)=1-\frac{Q^2}{r^2}. \tag{5.14.12}$$

到欧氏度规的 Wick 转动伴随着相应的电荷复化 $Q\to iQ$，只要假设最后又回到实的 Q 即可. 记住这些，我们就可以使用表达式(5.14.11)和(5.14.12)，其中 Q 已经是实数. 把作用量(5.14.11)对 dilaton r^2 变分，得到 dilaton 运动方程

$$rR-2\Box r+U'_{,r}=0, \tag{5.14.13}$$

对度规 $\gamma_{\alpha\beta}$取变分则给出

$$G_{\alpha\beta}\equiv-2r\nabla_\alpha\nabla_\beta r+\gamma_{\alpha\beta}[\Box r^2-(\nabla r)^2-U]=0. \tag{5.14.14}$$

上式表明矢量 $\xi_\alpha=\epsilon_\alpha^\beta\partial_\beta r$ 是一 Killing 矢量. 在$(\nabla r)^2\neq0$ 的区域，Killing 时间 $t(\xi^\alpha\partial_\alpha=\partial_t)$和 r 可作为 M^2 的坐标. 方程 $G_\tau^\tau-G_r^r=0$ 意味着其度规为

$$ds^2=g(r)d\tau^2+\frac{1}{g(r)}dr^2. \tag{5.14.15}$$

方程(5.14.14)的迹为

$$\Box r^2=2U(r). \tag{5.14.16}$$

这一关系式给出

$$g(r)=g_{cl}(r)=\frac{1}{r}\int^r U(r')dr' = 1-\frac{2MG}{r}+\frac{Q^2}{r^2}=\frac{(r-r_+)(r-r_-)}{r^2}. \tag{5.14.17}$$

式中 M 是积分常数，恰为 ADM(Arnowitt-Deser-Misner)质量，$r_\pm=MG\pm\sqrt{M^2G^2-Q^2}$是外内视界半径.

§5.15 Tree-Level 黑洞热力学

欧氏作用量(5.14.11)是表述经典黑洞热力学的出发点. 描述

场系统热力学性质的标准程序是通过 Wick 转动变到欧氏空间，闭合 τ 使具有周期 $2\pi\beta=T^{-1}$，T 是系统温度. 假设系统处在长 L 的盒子里. 原则上场位形不需满足任何场方程. 只有在要求适当边界条件下的自由能泛函取极值时，场才满足场方程.

类似地，黑洞热力学可以用离壳的方式表述. 考虑一般形式的欧氏静态度规

$$ds^2=g(x)d\tau^2+\frac{e^{2\lambda(x)}}{g(x)}dx^2. \tag{5.15.1}$$

式中 $0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\overline{\beta}$；$x_+\leqslant x\leqslant L$. 下面我们假设外边界位于 $x=L$，而 $x=x_+$是视界位置.

系统的温度在边界处是固定的，可写成坐标无关的形式：$T^{-1}=\int d\tau\sqrt{g_{00}}\,|_{x=L}$. 系统也由 dilaton 场在边界处的取值 $r_B=r|_{x=L}$来表征. 由于系统包含非极端黑洞，故在某些点 $x=x_+$(视界)函数 $g(x)$有单纯零点：$g(x_+)=0$. 在这种情况下，(5.15.1)描述的空间的欧拉示性数固定为 $x=1$，因此，系统由以下量表征：(1)固定外边界处的 T 和 γ_B；(2)固定黑洞拓扑. 这一统计系综包括所有满足这些条件的函数(g, λ, r). 这种形式的任意度规，$\beta_H\equiv(2e^{-\lambda}/g')_{x=x_+}$是度规的泛函而不被上述条件确定. 一般情况下，这样的度规描述在视界 $x=x_+$处具有顶角奇异性的欧氏空间，其角亏损为 $\delta=(1-\alpha)2\pi$，式中 $\alpha=\overline{\beta}/\beta_H$. 这意味着曲率标量中有来自顶角的类 δ 项：

$$R^{(2)}=2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\delta(x-x_+)+\overline{R}^{(2)},\ \alpha=\frac{\overline{\beta}}{\beta_H}. \tag{5.15.2}$$

式中 $\overline{R}^{(2)}$是曲率标量的规则部分. 当 $\alpha=1$ 时，顶角奇异性消失. 注意，仅 $\alpha=\overline{\beta}/\beta_H$ 有不变的意义，而 β_H 和 $\overline{\beta}$ 是和坐标有关的.

我们这里所用的方法与已有的工作不同，由条件(1)和(2)确定的统计系综既包括规则度规又包含有顶角奇异性的度规. 对于一般的度规(具有任意的 α)，由方程(5.15.2)，可将经典作用量(5.14.11)改写为

$$W_{cl} = -\frac{1}{4G}\int_{\bar{M}}[r^2\bar{R} + 2(\nabla r)^2 + 2U(r)]\sqrt{\gamma}\,d^2z - \frac{1}{2G}\int_{\partial\bar{M}} r^2 k^{(2)} - \frac{\pi r_+^2}{G}(1-\alpha). \tag{5.15.3}$$

代入静态度规(5.15.1)，得到作用量(5.15.3)的表达式

$$W_{cl} = -\frac{(2\pi\bar{\beta})}{4G}\int_{x_+}^{L}[(r^2)'e^{\lambda}g' + 2ge^{\lambda}(r_x')^2 + 2Ue^{-\lambda}]dx - \frac{\pi r_+^2}{G}. \tag{5.15.4}$$

于是，可以定义自由能 F，熵 S 和能量 E：

$$F=(2\pi\beta)^{-1}W_{cl},\ S=(\beta\partial_\beta-1)W_{cl},\ E=\frac{1}{2\pi}\partial_\beta W_{cl}. \tag{5.15.5}$$

式中 $2\pi\beta=T^{-1}$，$\beta=\bar{\beta}\sqrt{g_B}$. 将这些式子应用到(5.15.4)，我们得到能量的表达式

$$E=-\frac{1}{4Gg_B^{1/2}}\int_{x+}^{L}[(r^2)'e^{\lambda}g' + 2ge^{\lambda}(r_x')^2 + 2Ue^{-\lambda}]dx, \tag{5.15.6}$$

熵的表达式

$$S_{BH}=\frac{\pi r_+^2}{G}. \tag{5.15.7}$$

正是标准的 Bekenstein-Hawking 形式. 在计算过程中没有假定 $\alpha=1$，因此这些计算是离壳的. 现在，我们固定温度 $T=(2\pi\beta)^{-1}$，并考虑自由能 $F=E-TS$ 的极值，或等效地，考虑作用量 W_{cl}的极值. 显然，这样的平衡态位形自动满足热力学第二定律：

$$\delta E = T\delta S. \tag{5.15.8}$$

这里须注意，仅 $x=L$ 处的 T 和 r_B 以及视界处的条件 $g(x_+)=0$ 是固定的. 函数 $g(x)$，$g'(x)$，$r(x)$以及视界处 $r_+=r(x_+)$、$g'(x_+)$(或 β_H)的值都是可变的. 作用量 W_{cl}的全变分为

$$\delta W_{cl}=\delta_r W_{cl}+\delta_R W_{cl}+\delta_\lambda W_{cl}.$$

其中

$$\delta_r W_{cl} = -\frac{2\pi r(x_+)}{G}(1-\alpha)\delta r(x_+) - \frac{(2\pi\overline{\beta})}{4G}\times$$
$$\int_{x_+}^{L}\delta r[-2r(e^{\lambda}g')' - 4(ge^{\lambda}r')' + 2U'_{,r}e^{-\lambda}]\mathrm{d}x.$$

(5.15.9)

$$\delta_g W_{cl} = -\frac{(2\pi\overline{\beta})}{4G}\int_{x_+}^{L}\delta g[-(e^{\lambda}(r^2)')' + 2e^{\lambda}r'^2_x]\mathrm{d}x.$$

(5.15.10)

$$\delta_\lambda W_{cl} = -\frac{(2\pi\overline{\beta})}{4G}\int_{x_+}^{L}\delta\lambda[e^{\lambda}(r^2)'g' +$$
$$2e^{\lambda}g(r'_x)^2 - 2Ue^{-\lambda}]\mathrm{d}x. \qquad (5.15.11)$$

对函数(r, g, λ)的变分(在区域 $x_+\leqslant x\leqslant L$)，得到运动方程

$$-2r(e^{\lambda}g')' - 4(ge^{\lambda}r')' + 2U'_{,r}e^{-\lambda} = 0,$$
$$-(e^{\lambda}(r^2)')' + 2e^{\lambda}r'_x{}^2 = 0,$$
$$e^{\lambda}(r^2)'g' + 2e^{\lambda}g(r'_x)^2 - 2Ue^{-\lambda} = 0. \qquad (5.15.12)$$

当然，它们和(5.14.13～14)一致. 在边界(x_+, L)处，方程(5.15.9～11)中的变分 $\delta g'(x_+)$和 $\delta g'(L)$已抵消;这是因为方程(5.15.3)中存在外边界和奇异点(顶角)的“表面”项.

在某种意义上，顶角 Σ 可以看做 ∂M 外空间 M 的某种边界. 正是引力作用量(5.15.3)中有定义在 Σ 处的附加项，才使得有顶角的空间上的变分有很好的定义. 与顶角相关的项补偿了度规导数在 Σ 处的变分，正如标准 G-H 项在外边界 ∂M 上的行为一样. 作用量的变分也包含与 δr_+成正比的一项. 条件 $\delta_r W_{cl}=0$ 给出 $\alpha=1$. 这正是所需要的结果. 它意味着在规则流形(无顶角奇异性的 G-H 瞬子)上达到平衡态.

方程(5.15.12)表明可取 $r=x$. 度规函数 $g(r)$取(5.14.17)的形式:

$$g(r) = \frac{1}{r}\int_{r_+}^{r}U(\rho)\mathrm{d}\rho. \qquad (5.15.13)$$

特别是，我们有

$$g(L) = \frac{1}{L}\int_{r_+}^{L}U(r)\mathrm{d}r,\ g'_{,r}(L) = L^{-1}U(L) - L^{-1}g(L).$$

$$(5.15.14)$$

另一方面，在视界处，

$$\frac{2}{\beta_H} \equiv g'_{,r}(r_+) = \frac{U(r_+)}{r_+}. \tag{5.15.15}$$

能量泛函 E(5.15.6)可写为

$$E = \frac{1}{2Gg_B^{1/2}} \int_{x_-}^{L} G_0^0 e^{-\lambda} \mathrm{d}x + E_{\mathrm{surf}},$$

$$E_{\mathrm{surf}} = -\frac{1}{2G}(e^{\lambda}(r^2)' g^{1/2})_{x=L}. \tag{5.15.16}$$

由于 $G_0^0=0$，E 只有表面项. 等价地，我们得到能量(5.15.16)的坐标无关的表达式：

$$E = -\frac{1}{2\pi\beta} \frac{1}{G} \int_{\partial M} r n^a \partial_a r. \tag{5.15.17}$$

当 ∂M 趋于无限远时，量(5.15.17)发散，由前面讲到的删除法则得到

$$\begin{aligned} E &= E[g] - E[g_0] = \\ &\frac{1}{G}\left(\frac{1}{2\pi\beta_0} \int_{\partial M} r n_0^a \partial_a r - \frac{1}{2\pi\beta} \int_{\partial M} r n^a \partial_a r \right) = \\ &\frac{1}{G}[r(g_0^{1/2} - g^{1/2})]_{r=L}. \end{aligned} \tag{5.15.18}$$

这里对于背景度规，取 $r_0=r$. 应注意，对背景的自然要求是当 $L\to\infty$ 时背景温度 $T=(2\pi\beta_0)^{-1}$ 与无限远处的黑洞温度相合. 即 $g_0=\lim\limits_{L\to\infty} g(L)$. 对于渐近平直度规，

$$g(L) = 1 - \frac{2MG}{L} + o\left(\frac{1}{L}\right),$$

我们有 $g_0=1$. 所以

$$E = \frac{1}{G}[1 - \sqrt{g(L)}]. \tag{5.15.19}$$

当 $L\to\infty$ 时，

$$E = M. \tag{5.15.20}$$

为了表述荷电度规的变分过程，固定于边界处的量还应包括表征麦克斯威部分的电量 Q 或势 A_0. 对 A_μ 的变分将给出麦克斯威方

程组. 但这里我们不这样做. 我们先精确解出麦克斯威部分，从而所有信息都包含在 dilaton 势 $U(r)$ 中，就只要对引力部分变分了. 这两种方法显然导致相同的结果.

以上方法对任意势 $U(r)$ 都适用，只要其形式固定. 对于改变其形式的变分，从(5.15.19)得到

$$\delta E = \delta M - \frac{1}{2G}\int_{r_+}^{L} \delta U(r)\mathrm{d}r. \tag{5.15.21}$$

由(5.14.12)式定义的势 $U(r)$，我们得到荷电黑洞的第二定律：

$$\delta M = T\delta S + \frac{Q}{Gr_+}\delta Q. \tag{5.15.22}$$

但是特殊形式的势 $U(r)$ 对于上述方法是不重要的. 可以证明，量子修正会改变势的形式，并导致黑洞度规(5.15.13)的改变.

极端黑洞值得注意. 这时有

$$U(r_+) = 0, \quad g'(r_+) = 0. \tag{5.15.23}$$

极端黑洞瞬子的几何与非极端情况大不一样. 在度规

$$\mathrm{d}s^2 = g(r)\mathrm{d}\tau^2 + g^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 \tag{5.15.24}$$

中，τ 可以具有任意周期 $2\pi\beta$ 而不会形成任何奇异性. 现在视界与瞬子流形上的其他任何点的固有距离都是无限大. 视界附近，极端瞬子像一个常曲率空间，其度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{r_+^2}{z^2}(\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}z^2). \tag{5.15.25}$$

当 $r \to r_+$ 时，$z \to -\infty$. 极端黑洞瞬子可以看成与平直圆柱形空空共形的空间.

这些极端几何的特点对于极端黑洞热力学的表述是很重要的. 由于视界处无顶角奇异性，作用量中无附加项：

$$W = 2\pi\beta E. \tag{5.15.26}$$

式中能量 E 具有形式(5.15.19). 由(5.15.26)式可以得到系统的自由能 $F=E$. 因此，极端黑洞的熵为零：

$$S_{\mathrm{ext}} = 0. \tag{5.15.27}$$

而且由于自由能不依赖于温度 β^{-1}，β 固定时自由能取极值的要求不会给出非极端情况下 r_+ 和 β 的关系. 这意味着极端黑洞可以

在任何温度下处于平衡态.这种形式结果的物理意义还不清楚.量子效应肯定会改变这个结论.

§5.16 L-P 作用量及量子场热态的选择

为了在分析中包括单圈量子效应，我们考虑 2 维量子共形无质量标量场.对配分函数的贡献为

$$Z=e^{-\Gamma},\ \Gamma=\frac{1}{2}\ln\ \det\Box. \tag{5.16.1}$$

式中$\Box=\nabla_{\mu}\nabla^{\mu}$，是 2 维拉普拉斯算符.有效作用量 Γ 的计算常用到对共形反常的积分[83].计算结果得到

$$\Gamma_{\rm PL}[g]=\frac{1}{96\pi}\int R\Box^{-1}R. \tag{5.16.2}$$

应用上式时至少会遇到两个问题.第一，这个作用量在常数(整体的)共形变换 $g_{\mu\nu}\to\Lambda g_{\mu\nu}$下不能很好地变换[84].第二，当把它应用到平直空间($R=0$)时，由(5.16.2)式变分得到的能-动张量的平均值$\langle T^{\mu\nu}\rangle$恒为零.这对真空态成立，而对其他可能态就不成立.所以，把有效作用量写成这一形式就会失去量子场的态的具体信息.我们要给(5.16.2)式加入边界项，并证明关于量子场的态的信息与边界项直接相关.因此，为了考虑单圈量子效应，我们将仔细处理 L-P 作用量，考虑到所有边界项.

应强调指出，导出(5.16.2)式所需要的对共形反常的积分并不给出有效作用量 $\Gamma(g)$的绝对值，只给出两个共形相关($g_{\mu\nu}=e^{2\sigma}g_{\mu\nu}$)流形的有效作用量之差：

$$\Gamma[g]=\Gamma[g]-\frac{1}{24\pi}\left(\int_{M}(\nabla\sigma)^{2}+\int_{M}R\sigma+2\int_{\partial M}\mathrm{d}s\,k\sigma\right)-\frac{1}{8\pi}\int_{\partial M}\mathrm{d}s\,n^{\mu}\partial_{\mu}\sigma. \tag{5.16.3}$$

式中 n^{μ} 和 $k=\nabla_{\mu}n^{\mu}$ 分别为 n^{μ} 和 k 的对应量.

$\Gamma[g]$可以写成仅由度规 $g_{\mu\nu}$确定的形式，只要引入一满足方程

$$\Box\Psi=R \tag{5.16.4}$$

的附加场 Ψ. 对共形相关度规 $g_{\mu\nu}=e^{2\sigma}g_{\mu\nu}$，各个量的关系为

$$R=e^{-2\sigma}(R-2\Box\sigma),\ \psi=\psi-2\sigma,$$
$$k=e^{-\sigma}(k+n^{\nu}\partial_{\nu}\sigma),\ n^{\mu}=e^{-\sigma}n^{\mu}. \qquad (5.16.5)$$

由这些关系可以证明，(5.16.1)式的有效作用量具有形式

$$\Gamma[g]=\frac{1}{48\pi}\int_M\left[\frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2+\Psi R\right]+$$
$$\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M}k\Psi\mathrm{d}s+\frac{1}{16\pi}\int_{\partial M}n^{\mu}\Psi_{;\mu}\mathrm{d}s+\Gamma_0, \qquad (5.16.6)$$

式中所有量都由 $g_{\mu\nu}$定义，而"积分常数"Γ_0 是一个共形不变泛函.

现在我们考虑共形无质量场 φ，它在有视界的时空中以温度 T 处于一热态. 相关的欧氏静态度规为

$$\mathrm{d}s^2=g(x)\mathrm{d}\tau^2+\frac{1}{g(x)}\mathrm{d}x^2 \qquad (5.16.7)$$

或

$$\mathrm{d}s^2=g(\rho)\mathrm{d}\tau^2+\mathrm{d}\rho^2. \qquad (5.16.8)$$

式中 $0\leqslant\tau\leqslant2\pi\overline{\beta}$，$0\leqslant\rho\leqslant L_{\rho}$. 假设 $g(x)$在 $x=x_+$处有一阶零点，这是 Killing 视界. 在视界附近有

$$g(\rho)=\frac{\rho^2}{\beta_H^2},\ \beta_H=\frac{2}{g'x(r_-)}.$$

对于 $\overline{\beta}=\beta_H$，(5.16.8)式描述规则黑洞瞬子. 如果 $\overline{\beta}\neq\beta_H$，此度规在 $\rho=0$ 处有顶角奇异性，角亏损为 $\delta=2\pi(1-\alpha)$，$\alpha=\overline{\beta}/\beta_H$. 度规 (5.16.8)可以写成共形的形式：

$$\mathrm{d}s^2=e^{2\sigma}\mathrm{d}s_0^2,\ \mathrm{d}s_0^2=(\mathrm{d}z^2+\alpha^2z^2\mathrm{d}\tilde{\tau}^2),$$
$$e^{2\sigma}=\beta_H^2\frac{g}{z^2},\ z=z_0\exp\left[\frac{1}{\beta_H}\int_{L_\rho}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{g}}\right]. \qquad (5.16.9)$$

式中

$$\alpha=\overline{\beta}/\beta_H,\ \tau=\overline{\beta}\tilde{\tau},\ 0\leqslant\tilde{\tau}\leqslant2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant z_0.$$

在视界附近，$z\approx\rho$，故共形因子在视界处是规则的.

当 $\overline{\beta}=\beta_H$，由(5.16.9)可知，黑洞瞬子度规与半径为 z_0 的平直盘 D 上的度规共形. 与共形度规 $g_{\mu\nu}$和 $\hat{g}_{\mu\nu}$对应的能-动张量之间有关系式

$$T_{\mu\nu}[g]=T_{\mu\nu}[\bar{g}]+\frac{1}{48\pi}\{-4\nabla_\mu\nabla_\nu\sigma+4\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma+$$

$$g_{\mu\nu}[4\Box\sigma-2(\nabla\sigma)^2]\}.\tag{5.16.10}$$

因此，按(5.16.9)，我们得到

$$T_{\tau\tau}=T_{\tau\tau}^{(0)}+\frac{1}{48\pi}\left(\frac{2}{\beta_H^2}+2g''_\rho-\frac{3}{2}\frac{(g'_\rho)^2}{g}\right).\tag{5.16.11}$$

式中 $T_{\tau\tau}^{(0)}$ 是平直盘 D 上量子场的能量密度. 在无限远处，$\rho=\infty$，$g=1$，故

$$T_{\tau\tau}=T_{\tau\tau}^{(0)}+\frac{1}{24\pi\beta_H^2}.\tag{5.16.12}$$

假设 D 上量子场的态处处满足 $T_{\tau\tau}^{(0)}=0$，我称之为“盘上的真空”. 物理上，此态即 Rindle 空间中的闵可夫斯基真空态，或 Hartle-Hawking 真空态.

这一选择，由于(5.16.12)式与温度为 T_H 的热噪能量密度相同，故黑洞瞬子上量子场处于 H-H 真空态. 因此，从“盘上真空态”出发，经过规则共形变换(5.16.9)，可以得到黑洞瞬子上温度为 T_H 的量子场. 如果从盘 D 上有限温度 $T_0=(2\pi\beta_0)^{-1}$ 的态出发，则可以得到黑洞瞬子上温度为 $T=(2\pi\beta)^{-1}=(2\pi)^{-1}[\beta_0^{-2}+\beta_H^{-2}]^{1/2}$ 的态. 此态与 H-H 态不相同.

在做过这些一般性讨论之后，现在考虑满足 $0\leqslant\tau\leqslant2\pi\bar{\beta}(\bar{\beta}\neq\beta_H)$ 的奇异黑洞瞬子. 由(5.16.9)，它与平直锥 $C_\alpha(\alpha=\bar{\beta}/\beta_H)$ 共形，且 z_0 是圆锥母线的固有长度. 共形因子 σ 处处规则；我们还发现这两个空间上的能-动张量 $T_{\mu\nu}$ 仍由(5.16.10)和(5.16.11)相联系. 只是现在 $T_{\tau\tau}^{(0)}$ 是平直圆锥 C_α 上的能量密度：

$$T_\tau^{\tau(0)}=\frac{1}{24\pi}\frac{1}{z^2}\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}\right),\quad \alpha=\frac{\bar{\beta}}{\beta_H}\tag{5.16.13}$$

在无限远处有

$$T_{\tau\tau}\to\frac{1}{24\pi\bar{\beta}^2},$$

正是温度为 $T_\infty=(2\pi\bar{\beta})^{-1}$ 的热形式. 因此，黑洞引力场上 $T\neq T_H$ 的量子场的热态可以等效地描述成奇异瞬子上的量子场.

可以利用黑洞瞬子 M_α 上的度规直接计算 $T_{\mu\nu}$[85]. 对于度规(5.16.8)，方程(5.16.4)有解

$$\psi = -\ln g + b\int^x \frac{\mathrm{d}x}{g} + C = -\ln g + b\int^\rho \frac{\mathrm{d}\rho}{\sqrt{g}} + C. \tag{5.16.14}$$

为了确定常数 b，考虑由 Ψ 表示的重整化能-动张量

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{48\pi}\left\{2\nabla_\mu\nabla_\nu\psi - \partial_\mu\psi\partial_\nu\psi + g_{\mu\nu}\left[-2R + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right]\right\}. \tag{5.16.15}$$

此式的共形变换由(5.16.10)给出. 把(5.16.14)代入上式，得到

$$T_{\tau\tau} = \frac{1}{48\pi}\left(2g''_\rho - \frac{3}{2}\frac{(g'_\rho)^2}{g} + \frac{b^2}{2}\right). \tag{5.16.16}$$

由于在无限远处 $T = (2\pi\bar{\beta})^{-1}$，故 $b = -2/\bar{\beta}$.

由此得到，在极限 $\rho \to 0$ 下，(5.16.14)中的 Ψ 满足

$$\psi \to \psi_c = -2\left(1 - \frac{\beta_H}{\bar{\beta}}\right)\ln\rho, \tag{5.16.17}$$

与锥方程的解相同：

$$\Box_c\psi_c = R_c,\ R_c = 2\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\delta(\rho). \tag{5.16.18}$$

式中 $\Box_c$ 是平直圆锥 C_α 上的拉普拉斯算符. 因此，无限远处温度为 $T = (2\pi\bar{\beta})^{-1}$ 的态的能-动张量和视界有顶角奇异性($\bar{\beta} \neq \beta_H$)的黑洞瞬子(5.16.9)上量子场的能-动张量相同.

为了确定(5.16.14)中的常数 C(它依赖于系统的特征)，考虑由 σ 决定的共形变换(5.16.9)：

$$2\sigma(x) = \ln g(x) + \frac{2}{\beta_H}\int_x^L \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} + 2\ln\frac{\beta_H}{z_0}, \tag{5.16.19}$$

于是，此二空间中的函数 $\psi(x)$ 有如下关系：

$$\psi_{M^\alpha}(x) = \psi_{C_\alpha}(z) - 2\sigma(x). \tag{5.16.20}$$

式中 $z(x)$ 由(5.16.9)给出. 另一方面，对于 ψ_{M^α} 和 ψ_{C_α}，我们有表达式(5.16.14)：

$$\psi_{M^\alpha}(x) = -\ln g(x) - \frac{2}{\bar{\beta}}\int_x^L \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} + C,$$

$$\psi_{C_\alpha}(z) = -2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\ln\frac{z}{z_0} + C(\alpha, z_0). \qquad (5.16.21)$$

式中 $C(\alpha, z_0)$仅为 α 和 z_0 的函数.

把(5.16.19)和(5.16.21)代入(5.16.20)，得到常数

$$C = -2\ln(\beta_H/z_0) + C(\alpha, z_0).$$

实际上，由于重新标度 $z_0 \to e^\gamma z_0$ 之后，有

$$C(\alpha, z_0) \to C(\alpha, z_0) - 2\ln\gamma,$$

C 不依赖于 z_0，于是最后得到

$$\psi_{M^\alpha}(x) = -\ln g(x) - \frac{2}{\beta}\int_x^L \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} - 2\ln\frac{\beta_H}{z_0} + C(\alpha, z_0). \qquad (5.16.22)$$

为了写出这种情况下的 Liouville-Polyakov 作用量，须注意到在顶角奇异性存在时有效作用量(5.16.1)的共形变换要修改. 如果空间 M^α 和 M^α[具有顶点 Σ 和角亏损 $\delta = 2\pi(1-\alpha)$]由规则共形变换 $g_{\mu\nu} = e^{2\sigma} g_{\mu\nu}$相联，则相应的有效作用量有如下关系[86]：

$$\Gamma[g] = \Gamma[g] - \frac{1}{24\pi}\left(\int_{M^\alpha}(\nabla\sigma)^2 + \int_{M^\alpha} R\sigma + 2\int_{\partial M^\alpha}\mathrm{d}s\, k\sigma\right) - \frac{1}{8\pi}\int_{\partial M^\alpha}\mathrm{d}s\, n^\mu\partial_\mu\sigma - \frac{1}{12}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\sigma_h. \qquad (5.16.23)$$

式中 σ_h 是圆锥顶点 Σ 处的值.

考虑 ψ 的变换规律(5.16.5)，M^α 上的有效作用量[按(5.16.23)变换]可以写为

$$\Gamma[M^\alpha] = \frac{1}{48\pi}\int_{M^\alpha}\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \psi\overline{R}\right] + \frac{1}{24}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\psi_h + \frac{1}{24\pi}\int_{\partial M^\alpha} k\psi\mathrm{d}s + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M^\alpha} n^\mu\psi_{,\mu}\mathrm{d}s + \Gamma_0. \qquad (5.16.24)$$

式中 $\overline{R}$ 是曲率标量的规则部分，$\psi(x)$是方程

$$\Box\psi = R \equiv 2[(1-\alpha)/\alpha]\delta_\Sigma + \overline{R}$$

的解. 对于静态度规(5.16.7)，ψ 取(5.16.22)的形式.

值得注意的是，表达式(5.16.24)可写成两种等价的形式. 第一种用定义在全顶角空间 M^α 上的量表示：

$$\Gamma[M^\alpha] = \frac{1}{48\pi}\int_{M^\alpha}\left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \psi R\right] + \frac{(1-\alpha)^2}{24\alpha}\psi_h +$$

$$\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M^{\alpha}} k\psi \mathrm{d}s + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M^{\alpha}} n^{\mu}\psi_{,\mu}\mathrm{d}s + \Gamma_0, \qquad (5.16.25)$$

$$R = 2(\alpha^{-1} - 1)\delta_{\Sigma} + \overline{R},\ \Box\psi = R.$$

另一种方式是用定义在规则部分 $M^{\alpha}\backslash\Sigma$ 上的量写出：

$$\Gamma[M^{\alpha}] = \frac{1}{48\pi}\int_{M^{\alpha}\backslash\Sigma}\left[\frac{1}{2}(\nabla\overline{\psi})^2 + \overline{\psi R}\right] + \frac{1}{12}(1-\alpha)\overline{\psi}_h +$$

$$\frac{1}{24\pi}\int_{\partial M^{\alpha}}\overline{k\psi}\mathrm{d}s + \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M^{\alpha}} n^{\mu}\overline{\psi}_{,\mu}\mathrm{d}s + o((1-\alpha)^2).$$

$$(5.16.26)$$

式中 $\overline{\psi} = \psi_{\alpha=1}$，$\Box\overline{\psi} = \overline{R}$.

§5.17 量子修正的黑洞几何

在半经典近似(度规不量子化)下，要得到单圈量子效应，可以在经典引力作用量中加上积分物质场得到的量子部分：

$$W = W_{cl} + \Gamma. \qquad (5.17.1)$$

出于球对称考虑，我们取 W_{cl}为(5.14.11)的形式(还要减去参考度规的贡献，见 §5.15)，而单圈贡献 Γ 取为 L-P 作用量(5.16.24).当然，在自洽的处理中，量子有效作用量 Γ 也应该由 4 维物质场经过球对称退化得到，就像得到引力部分 W_{cl}那样.但是有效作用量非常复杂而使得分析很困难.因此，这里只考虑最简单的情况:有效 2 维物质场是共形的，且 Γ 为非定域的 L-P 泛函.

为了考虑黑洞的单圈量子效应，先研究作用量的量子修正(5.17.1)所引起的黑洞经典几何的修正.此式对度规取变分，得到

$$G_{\alpha\beta} = -T_{\alpha\beta}, \qquad (5.17.2)$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{G}{24\pi}\left\{2\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\psi - \partial_{\alpha}\psi\partial_{\beta}\psi - \gamma_{\alpha\beta}\left[2R - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2\right]\right\}.$$

$$(5.17.3)$$

式中 $G_{\alpha\beta}$由(5.14.14)给出.对 dilaton 场 $r^2(x)$的变分给出与经典

情况相同的方程：

$$\gamma R-2\Box r+U'_{r}=0. \tag{5.17.4}$$

方程(5.17.2)和(5.17.4)的一个重要结果是时空奇点现在位于有限半径(dilaton 值)$r=r_{cr}^2\equiv G/12\pi$ 上. 这是引力的 2 维模型的典型行为. 对于这个 dilaton 值，(5.17.1)的动力学项发散. 另一方面，取(5.17.2)式的迹，得到

$$\Box r^2-2U(r)=\frac{G}{12\pi}R. \tag{5.17.5}$$

再考虑到(5.17.4)，得

$$R=\frac{2U-rU'-2(\nabla r)^2}{r^2-r_{cr}^2}. \tag{5.17.6}$$

此式表明在 $r=r_{cr}$ 处有奇异性. 这里我们不研究此点附近方程(5.17.2)和(5.17.4)的解的行为，而是假定外视界 $r_+\gg r_{cr}$. 于是，在区域 $r\geqslant r_+$ 内，我们可以用微扰法(对 r_{cr}/r_+)解方程(5.17.2)和(5.17.4)，把方程(5.17.2)的右端看成微扰. 这样可以给出黑洞的一级修正(正比于 $\hbar$).

和前面类似，我们考虑静态解. 定义函数 f 和 M：

$$f=(\nabla r)^2,\ M=\frac{1}{2}r[1-(\nabla r)^2]+\frac{Q^2}{2r}, \tag{5.17.7}$$

并选择 r 为一个坐标，Killing 时间 t 为另一坐标. 于是有

$$ds^2=f(r)e^{2\Phi(r)}dt^2+\frac{1}{f(r)}dr^2, \tag{5.17.8}$$

$$f(r)=1-\frac{2M(r)}{r}+\frac{Q^2}{r^2}. \tag{5.17.9}$$

方程(5.17.2)可改写为

$$2r\nabla_\alpha\nabla_\beta r=\gamma_{\alpha\beta}\left(\frac{2M}{r}-\frac{2Q^2}{r^2}\right)-\gamma_{\alpha\beta}T+T_{\alpha\beta},\ T=\gamma_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}. \tag{5.17.10}$$

微分(5.17.7)，并利用(5.17.10)，得到

$$2\partial_\alpha M=\partial_\beta r(\delta_\alpha^\beta T-T_\alpha^\beta). \tag{5.17.11}$$

取 $\alpha=0$，此式恒成立；取 $\alpha=1$，此式给出

$$\partial_r M=\frac{1}{2}T_t^t. \tag{5.17.12}$$

取(5.17.10)的迹，得到关于函数 $\Phi(r)$ 的方程：

$$\partial_r\Phi=\frac{1}{2rf}(T^t_t-T^r_r). \tag{5.17.13}$$

把(5.17.12)和(5.17.13)的右端看作微扰，并在经典背景中计算它们. 我们有 $\Phi(r)=0$，$M=\text{const}$；对于度规(5.17.8)，能-动张量〔式(5.17.3)〕为

$$T^t_t=\kappa\left[+2f''-\frac{1}{2f}\left(f'^2-\frac{4}{\beta_H^2}\right)\right],$$

$$T^r_r=\kappa\left[\frac{1}{2f}\left(f'^2-\frac{4}{\beta_H^2}\right)\right]. \tag{5.17.14}$$

式中 $\kappa=G/24\pi$，$\beta_H=2/f'(r_+)$. 我们必须把经典度规(5.14.17)代入(5.17.14)，其中

$$f=g_{tt}(r)=r^{-2}(r-r_+)(r-r_-),$$

$$r_\pm=MG\pm\sqrt{(MG)^2-Q^2}.$$

须注意，(5.17.14)给出的 $T_{\alpha\beta}$ 在内视界 $r=r_-$ 处发散. 这个众所周知的发散使得微扰方案在 $r=r_-$ 附近失效. 为了得到微扰方案适用的条件，先考虑外视界 $r=r_+$ 处的 T^α_β，再令 $r_-\sim r_+$. 这时我们发现，(5.17.14)式定义的 T^t_t 和 T^r_r 在此极限下有限，而(5.17.13)中的 $f^{-1}(T^t_t-T^r_r)$ 则以 $\kappa[(r_+-r_-)r_+]^{-1}$ 的形式发散. 要使微扰方案成立，必须消去这一令人不愉快的一项. 即要满足 $\kappa[(r_+-r_-)r_+]^{-1}\ll 1$，或者 $\kappa\gamma_+^{-2}\ll 1-r_-/r_+$. 这样，只要令 r_+ 足够大，我们总能任意接近极端情况 $r_-\sim r_+$. 这个重要条件使我们可以把此方法运用到 $Q\sim M$ 的荷电黑洞，保证外边界"半径"r_B 任意大的热力学系综的稳定性.

(5.17.12)和(5.17.13)很容易积分，令

$$m(r)=2\kappa^{-1}[M-M(r)]. \tag{5.17.15}$$

积分(5.17.12)，得到

$$m(r)=-\frac{1}{\kappa}\int^r T^t_t(r)\mathrm{d}r=C(r)+$$

$$A\ln\frac{(r-r_-)}{l}+B\ln\frac{r}{l},$$

$$C(r) = -\frac{2}{\beta_H^2}r - \frac{(r_+ - r_-)^2}{2r_+ r_- r} - \frac{2(r_+ + r_-)}{r^2} + \frac{10r_+ r_-}{3r^3},$$

$$A = -\frac{(r_+ - r_-)^2(r_+ + r_-)(r_+^2 + r_-^2)}{2r_+^4 r^2}$$

$$B = \frac{(r_+ - r_-)^2(r_+ + r_-)}{2r_+^2 r_-^2}. \tag{5.17.16}$$

和前面类似，$r_\pm$表示经典内外视界的"半径". 常数 A 和 B 之间的恒等式 $A+B=-4MG\beta_H^{-2}$ 是很有用的. 在(5.17.16)中，我们引入了一个距离 l，为了使对数的自变量无量纲. 下一节计算的能量和熵的最后结果和此参量无关. 可以自然地假设 l 具有普朗克长度的量级 $l\sim r_{cr}$. 但这一点对于下面的讨论并不重要.

类似地，积分(5.17.13)，得到

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\int_r^L \frac{1}{rf}(T_r^r - T_t^t)\mathrm{d}r, \tag{5.17.17}$$

对于 $f=g_{cl}(r)$，再加上条件 $\Phi(L)=0$，得到

$$\Phi(r)=\frac{1}{2}\kappa[F(L)-F(r)],$$

$$F(r)=-\frac{(r_+^4-r_-^4)}{r_+^4 r_-(r-r_-)}+\frac{4}{r^2}+\frac{4(r_++r_-)}{r_+r_-r}+$$

$$D\ln[(r-r_-)/l]+E\ln(r/l),$$

$$D=\frac{1}{r_+^4 r_-^2}(3r_+^4+2r_+^3r_-+2r_+^2r_-^2+2r_+r_-^3-r_-^4),$$

$$E=\frac{1}{r_+^2 r_-^2}(-3r_+^2-2r_+r_--3r_-^2). \tag{5.17.18}$$

现在考虑特殊情况:不带电黑洞($Q=0$). 其经典度规函数为

$$g_{cl}(r)=1-r_+/r,\ r_+=2MG,\ \beta_H=2r_+.$$

对于量子修正度规，我们得到

$$f(r)=1-\frac{2MG}{r}+\frac{\kappa m(r)}{r}, \tag{5.17.19}$$

$$m(r)=-\frac{7r_+}{4r^2}+\frac{1}{2r}-\frac{2r}{\beta_H^2}-\frac{1}{2r_+}\ln\frac{r}{l} \tag{5.17.20}$$

和

$$\Phi(r)=\frac{1}{2}\kappa[F(L)-F(r)],$$

$$F(r)=\frac{3}{2r^2}+\frac{2}{r_-r}-\frac{1}{r_+^2}\ln\frac{r}{l}. \tag{5.17.21}$$

当盒子的线度 L 很大时，有

$$\exp(2\Phi(r))=\left(\frac{r}{L}\right)^{\kappa/r_+^2}\exp\left[-\kappa\left(\frac{3}{2r^2}+\frac{2}{r_-r}\right)\right]. \tag{5.17.22}$$

黑洞的一个重要特征是其视界半径. 在我们模型中，它由视界处的 dilaton 值 $\bar{r}_-$ 表示. 对于量子修正解(5.17.15)，它与经典值 r_+ 不同. 为明确起见，令 $f(\bar{r}_+)=0$，得到解

$$\bar{r}_+=M(\bar{r}_+)G+\sqrt{(M(\bar{r}_+)G)^2-Q^2}.$$

将上式按 κ 展开，最后得到

$$\bar{r}_+=r_+-\kappa\beta_H m(r_+)/(2r_+).$$

式中的 r_- 和 β_H 是由 M 和 Q 算得的经典值. 由此得到

$$\bar{r}_+^2=r_+^2-\kappa\beta_H m(r_+). \tag{5.17.23}$$

这一式子可以解释为由于量子修正引起的"视界面积"的变化.

§5.18 热力学量的量子修正

由作用量 W〔式(5.17.1)〕所描述的单圈热力学本质上和§5.15 的初级(tree-lever)近似相同. 我们固定边界 $x=L$ 处的 r_B 和温度 $T=(2\pi\beta)^{-1}$，以及时空几何的黑洞拓扑，并用下式定义离壳熵和能量：

$$S=(\beta\partial_\beta-1)W,\quad E=\frac{1}{2\pi}\partial_\beta W. \tag{5.18.1}$$

然后，采用(5.15.1)给出的欧氏度规，其中任意函数 $g(x)$，$\lambda(x)$ 满足上述条件[$g(x)$在 $x=L$ 处有单零点]；我们发现，系统的平衡态由泛函 $W[g(x), r(x), \lambda(x)]$的极值描述：

$$\delta W\equiv\delta_r W+\delta_g W+\delta_\lambda W=0. \tag{5.18.2}$$

在选择量子场作用量的时候，单圈部分 Γ 不含 dilaton 场 $r(x)$. 因此有 $\delta_r W=\delta_r W_{cl}$[见(5.15.9)]，其中 $r(x_+)=\bar{r}_+$ 是视界处 dilaton 场的量子值. 这意味着极值位形满足

$$\frac{2}{g'(x_+)}=\beta_H=\overline{\beta}, \tag{5.18.3}$$
和经典情况一样，在没有顶角奇异性的规则流形上可以取极值. 泛函 W 的极值描述量子修正的黑洞位形，其微扰形式见§5.17[(5.17.8～9)和(5.17.15)].

对度规取变分时，和经典情况一样，含 $\delta g'(x_+)$ 和 $\delta g'(L)$ 的项不存在[见式(5.15.10)]. 因此，对于单圈有效作用量 W，变分过程也定义得很好，因为在外边界($x=L$)和顶点($x=x_+$)处对度规导数变分的贡献都被相应的边界项抵消了.

计算离壳量(5.18.1)的一个方便的方法是把度规写成类史瓦希形式：

$$ds^2=g(x)d\tau^2+g^{-1}(x)dx^2. \tag{5.18.4}$$

式中 $0\leqslant\tau\leqslant 2\pi\overline{\beta}$. 利用(5.15.1)中的规范自由度，令 $\lambda(x)=0$，就可以做到这一点. 坐标变换

$$x\to\int^x e^{-\lambda(x)}dx$$

须伴随着相应的积分限(x_+, L)的变换. 在即壳情况下，它们会依赖于 r_B 和 β_H. 但是对于计算坐标不变的离壳量(如有效作用量)，使用(5.18.4)而不用(5.15.1)只是为了选择坐标系的方便. 相应的 L-P 作用量为

$$\Gamma[g]=\frac{1}{24}\int_{x_+}^{L}\left(\frac{2}{\overline{\beta}g}-\frac{\overline{\beta}}{2}\frac{g'^2}{g}\right)dx+$$
$$\frac{1}{12}\left(\alpha+\frac{(1-\alpha^2)}{2\alpha}\right)\psi(x_+)-\frac{\overline{\beta}}{8}g'(L)+\Gamma_0. \tag{5.18.5}$$

式中 $\alpha=\overline{\beta}/\beta_H$，$\beta_H=2[g'(x_+)]^{-1}$，$\psi(x)$由(5.16.22)定义. 这里应注意，上式在下极限处发散. 引入规则化 $x^+\to x^++\epsilon$，我们得到上式的发散部分：

$$\Gamma_{\mathrm{div}}=\ln\epsilon\,\frac{(1-\alpha)^2}{24\alpha^2}. \tag{5.18.6}$$

这是由于顶点处($\overline{\beta}\neq\beta_H$)重整化的 $T_{\mu\nu}$[(5.16.15)和(5.16.16)]为无限大所引起的物理发散. 注意 Γ_{div}正比于$(1-\alpha)^2$. 因此，这一

发散不影响 Hawking 温度($\bar{\beta}=\beta_H$)下的物理量. 原则上，要把这一发散规则化，可以在(5.18.5)中减去度规函数为 $g_R(x)=(2/\beta_H)(x-x_-)$的 Rindle 空间 L-P 作用量. 但我们现在不做这种处理.

由(5.18.3)可以计算平衡态($\beta=\beta_H$)的能量:

$$E=E_{cl}+E_q,$$

其中经典部分 E_{cl}见(5.15.5)式，量子部分为

$$E_q=\frac{1}{2\pi g^{1/2}(L)}\partial_{\bar{\beta}}\Gamma|_{\bar{\beta}=\beta_H}=\frac{g^{-1/2}(L)}{96\pi}\times \int_{x_-}^{L}\frac{1}{g}\left(\frac{4}{\beta_H^2}-g'^2(x)\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{16\pi g^{1/2}(L)}g'(L). \tag{5.18.7}$$

对于上节得到的量子修正的度规，$g'(L)$在极限 $L\to\infty$下等于零. 因此，下面我们将此项略去.

类似地得到平衡态的熵的表达式

$$S=\frac{\pi\bar{r}_+^2}{G}+S_q, \tag{5.18.8}$$

式中

$$S_q=(\beta\partial_\beta-1)\Gamma|_{\beta=\beta_H}=-\frac{1}{12}\psi(x_+)=\frac{1}{12}\int_{x_+}^{L}\frac{\mathrm{d}x}{g(x)}\left(\frac{2}{\beta_H}-g'(x)\right)+\frac{1}{6}\ln\frac{\beta_H g^{1/2}(L)}{z_0}+c(z_0). \tag{5.18.9}$$

在上二式中，$\bar{r}_+$和 β_H 分别为视界的量子位置和量子 Hawking 温度的倒数，而 $g(x)$是量子黑洞的度规. 注意 E_q 和 S_q 在下极限都不发散. 对于与平直度规共形的度规 $g_{\mu\nu}=e^{2\sigma}\delta_{\mu\nu}$，有 $\psi(x)=-2\sigma(x)$，熵(5.18.9)与[87]中得到的相同.

对于能量泛函，我们有

$$E=\frac{1}{2Gg^{1/2}(L)}\int_{x_+}^{L}(G_0^0+T_0^0)\mathrm{d}x+\frac{1}{12\pi\beta_H g^{1/2}(L)}+E_{\text{surf}}. \tag{5.18.10}$$

式中表面项 E_{surf}与(5.15.16)相同.

由外边界处的温度 $T=[2\pi\beta_H\sqrt{g(L)}]^{-1}$是固定的，当运动方程(5.17.2)成立时，$E$ 简化为

$$E=E_{\text{surf}}+\frac{T}{6}, \tag{5.18.11}$$

或者写成坐标不变形式：

$$E=\frac{T}{G}\int_{\partial M} rn^a\partial_a r+\frac{T}{6}=-\frac{1}{G}(rg^{1/2})_{r=L}+\frac{T}{6}. \tag{5.18.12}$$

注意上式的两项都定义在外边界 $r=L$ 上.

现在，减去背景 g_0 的能量，得到

$$E[g]-E[g_0]=\frac{1}{G}[r(g_0^{1/2}-g^{1/2})]_{r=L}+\frac{1}{6}(T-T_0). \tag{5.18.13}$$

式中 $T_0=[2\pi\beta_H^0\sqrt{g_0(L)}]^{-1}$是背景度规的温度. 式(5.18.11)和(5.18.12)中的温度 T 是在外边界测量的. 但是含 T 的项却源于视界，这可以由(5.18.11)式通过分部积分得到(5.18.12)的过程中看出来. 因此，(5.18.11)和(5.18.12)中的 $T/6$ 是黑洞拓扑的结果. 在非黑洞的情况下(热空间)这一项不存在. 取 $T_0=T$，(5.18.13)中第二项为零，于是得到能量的经典表达式，但现在 g_0 和 g 都是相应的量子修正度规.

上面关于能量和熵的表达式是对于静态度规(5.18.4)给出的. 上一节中得到量子修正的度规要变成这种形式，只要做坐标变换 $r\to x(r)$，$\partial_r x=e^{\Phi(r)}$，并令 $g(x)=fe^{2\Phi}$. 由于 $\Phi(L)=0$，在边界 $x=L$ 处有 $x\approx r$，和 $g(L)=f(L)$.

下面讨论经过量子修正的黑洞，其质量和熵.

1. 量子修正黑洞的质量

前面得到的量子修正解(5.17.15)和(5.17.16)在盒子尺度 L 很大时为

$$g(L)\approx 1-\frac{2MG}{L}-\frac{2\kappa}{\beta_H^2}-\frac{4MG\kappa}{L\beta_H^2}\ln\frac{L}{l}+o\left(\frac{1}{L}\right). \tag{5.18.14}$$

我们看到，当 $L\to\infty$ 时，$g(L)\to g_0=1-2\kappa/\beta_H^2$ 而不是 1. 引入普朗克温度 $T_{pl}=(2\pi r_+)^{-1}$，有 $g_0=1-(T_H/T_{pl})^2$. 可以发现，g 的渐近行为和背景的改变本质上是温度效应. 实际上，若像经典情况一样，取背景 $g_0=1$，能量将有一发散项

$$E_{th}=(\pi/6)T_H^2L,$$

这正是黑洞周围热气体的能量.

我们可以这样解释，所研究的系统是两部分的复杂相互作用:黑洞和热气体. 远离视界处，气体的效应显得更重要，而在视界附近，黑洞占主导地位. 因此，系统的特征量(如能量和熵)包含这两个子系统的贡献. 依赖于系统尺度 L 的部分是热气体的贡献，可以消去. 另一方面，黑洞本身的贡献不依赖于 L.

明显地，适当选择(5.18.13)式中的参考度规，可以消去热气体的贡献，从而得到黑洞本身的贡献. 实际上，如果取

$$g_0=1-2\kappa\beta_H^{-2},$$

则

$$E=M+\frac{\kappa M}{\beta_H^2}\eta. \tag{5.18.15}$$

式中

$$\eta=1+2\ln\frac{L}{l}.$$

可以看出，(5.18.15)中 E_{th} 不存在，但仍存在对数发散项. 我们认为这一发散是由于无质量场的红外行为所致. 可以预见，当考虑有质量物质时，此发散会消失. 因此，为了使红外行为规则化为有限，我们固定盒子尺度 L，但它远大于黑洞的特征尺度 r_-. (5.18.15)式可写为

$$E=M\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{T_H}{T_{Pl}}\right)^2\eta\right]. \tag{5.18.16}$$

比较(5.18.15)和(5.18.16)，我们得出结论:一级量子修正(对 G 而言)，和黑洞质量的温度修正是相同的.

2. 量子修正黑洞的熵

把经典度规函数

$$g_{cl}=r^{-2}(r-r_+)(r-r_-)$$

代入 S_q 的表达式，得到

$$S_q=\frac{\pi}{3}T_H(L-r_+)-\frac{1}{12}\left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2\ln\left(\frac{L-r_+}{r_+-r_-}\right)+$$

$$\frac{1}{12}\ln\left(\frac{L-r_+}{r_+-r_-}\right)+\frac{1}{6}\ln\frac{r_+}{z_0}. \tag{5.18.17}$$

式中 z_0 是(5.16.9)式中出现的圆锥母线的固有长度. 和能量一样，S_q 在极限 $L\to\infty$ 下发散. 第一项线性发散，是装在盒子中的2维热气体的熵，盒子尺度为 $L-r_+$，温度为 T_H. 由于我们只对黑洞本身的熵感兴趣，故将此项略去.

在(5.18.8)式中，第一项包含视界的量子修正半径 $\bar{r}_+$. 在外视界 $r=r_+$ 附近，量子修正度规(5.17.15)和(5.17.16)为

$$f(r)=(r-\bar{r}_+)(r-\bar{r}_-)r^{-2}.$$

式中 $\quad \bar{r}_\pm=r_\pm\pm\kappa r_+^q.$

而 $r_\pm$ 是经典值. 因此，在 S_q(正比于 $\hbar$)中，可用量子修正值 $\bar{r}_\pm$ 代替经典值. 于是，取极限 $L\to\infty$，我们得到用量子修正视界值 $\bar{r}_\pm$ 表示的黑洞完全量子熵：

$$S=\frac{\pi\bar{r}_+^2}{G}+\frac{1}{12}\left[1-\left(\frac{\bar{r}_-}{\bar{r}_+}\right)^2\right]\ln\frac{L}{(\bar{r}_+-\bar{r}_-)}+\frac{1}{6}\ln\frac{\bar{r}_+}{z_0}. \tag{5.18.18}$$

这是量子水平上对经典熵和视界面积关系的修正.

有几种情况很有趣. 第一种情况，$\bar{r}_+\to\bar{r}_-$. 此时质量的修正[(5.18.15)和(5.18.16)]等于零，另一方面，S_q[(5.18.17)式]却存在极限

$$S_q^{ext}=\frac{1}{6}\ln\frac{\bar{r}_+}{z_0}=\frac{1}{12}\ln\left(\frac{A_+}{\pi z_0^2}\right), \tag{5.18.19}$$

此式给出熵的对数修正. 第二种情况，取 $\bar{r}_-=0$(不荷电黑洞)，得到

$$S=\frac{A_+}{4G}+\frac{1}{24}\ln\frac{A_+}{\pi z_0^2}. \tag{5.18.20}$$

式中 $A_+=4\pi\bar{r}_+^2$ 是视界面积，我们省略一项 $\sim\ln\frac{L}{z_0}$. 这一结果和[88]中4维史瓦希黑洞的结果类似.

现在还不清楚在什么样的现象中熵的对数修正项才会变得重

要. 我们猜测在黑洞蒸发的最后阶段它们会起作用. 这个问题仍需进一步研究.

下面几节我们用顶角奇异性方法讨论荷电 Kerr 黑洞的主级(tree-level)熵及其单圈量子修正.

前面几节讨论的都限于静态、非旋转的黑洞. 对稳态黑洞采用顶角奇异性方法必须解决 Kerr-Newman 黑洞的欧氏化(或复化)的问题和对其顶角几何的一般周期性分析. 虽然前面我们已给出欧氏化和周期性的解决方案，但是 K-N 情况下任意周期的顶角几何仍不清楚. 另外一个著名的问题是稳态黑洞熵的紫外(UV)发散性，以及重整化是否像静态情况一样有效. 下面几节将详细讨论这些问题.

§5.19 欧氏克尔-纽曼几何

在 Boyer-Lindquist 坐标系中，采用闵氏号差，克尔-纽曼度规具有形式

$$
\begin{aligned}
&ds^2=g_{rr}dr^2+g_{\theta\theta}d\theta^2+g_{tt}dt^2+2g_{t\phi}dtd\phi+g_{\phi\phi}d\phi^2,\\
&g_{rr}=\frac{\rho^2}{\Delta},\ g_{\theta\theta}=\rho^2,\ g_{tt}=-\frac{(\Delta-a^2\sin^2\theta)}{\rho^2},\\
&g_{t\phi}=-\frac{a\sin^2\theta(r^2+a^2-\Delta)}{\rho^2},\\
&g_{\phi\phi}=\left(\frac{(r^2+a^2)^2-\Delta a^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right)\sin^2\theta,\\
&\Delta(r)=r^2+a^2+q^2-2mr,\ \rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta.
\end{aligned}
\tag{5.19.1}
$$

函数 Δr 可以写成 $\Delta r=(r-r_+)(r-r_-)$，其中

$$
r_\pm=m\pm\sqrt{m^2-a^2-q^2}.
$$

此空间有一对正交的 Killing 矢量：

$$
\begin{aligned}
&K=\partial_t+\frac{a}{r^2+a^2}\partial_\phi,\ \tilde{K}=a\sin^2\theta\partial_t+\partial_\phi,\\
&K^2=-\frac{\Delta\rho^2}{(r^2+a^2)^2},\ \tilde{K}^2=\rho^2\sin^2\theta,\ K\cdot\tilde{K}=0.
\end{aligned}
\tag{5.19.2}
$$

矢量 K 在区域 $r>r_+$ 内类时，$r=r_+$ 类光；$\tilde{K}$ 在轴($\theta=0$, $\theta=\pi$)以

外类空，在轴上 $\widetilde{K}=0$. 和 K，$\widetilde{K}$ 对偶的 1-形式为

$$\omega=\frac{(r^2+a^2)}{\rho^2}(\mathrm{d}t-a\sin^2\theta\mathrm{d}\phi),$$

$$\widetilde{\omega}=\frac{(r^2+a^2)}{\rho^2}\left(\mathrm{d}\phi-\frac{a}{(r^2+a^2)}\mathrm{d}t\right),$$

$$\omega[K]=\widetilde{\omega}[\widetilde{K}]=1,\ \omega[\widetilde{K}]=\widetilde{\omega}[K]=0. \tag{5.19.3}$$

这里存在与史瓦希度规的对立. K 和 $\widetilde{K}$ 对应于 ∂_t 和 ∂_ϕ，ω 和 $\widetilde{\omega}$ 对应于 $\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\phi$. 此对应几乎是精确的，但有一点例外：ω 和 $\widetilde{\omega}$ 与 $\mathrm{d}\theta$ 和 $\mathrm{d}r$ 一起构成 1-形式的非完全基. 这表明不存在整体定义的坐标 X 和 $\widetilde{X}$，使得 $\omega=\mathrm{d}X$，$\widetilde{\omega}=\mathrm{d}\widetilde{X}$.

视界面定义为类时矢量 K 为零（$K^2|_\Sigma=0$）的面. 外视界是 $r=r_+$ 的面. 另外，经常用到矢量 ∂_t 为零的面. 此面称为能层面，由方程

$$r^2+a^2\cos^2\theta+q^2-2mr=0$$

确定. 它位于外视界之外，并在轴 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处与之相连.

现在考虑克尔-纽曼度规的欧氏化. 标准方法是令 $t=i\tau$，并令 $a=i\hat{a}$，$q=i\hat{q}$. 欧氏矢量 K，$\widetilde{K}$ 和相应的 1-形式 ω，$\widetilde{\omega}$ 为

$$K=\partial_\tau-\frac{a}{r^2-\hat{a}^2}\partial_\phi,\ \widetilde{K}=\hat{a}\sin^2\theta\partial_\tau+\partial_\phi,$$

$$\omega=\frac{(r^2-\hat{a}^2)}{\hat{\rho}^2}(\mathrm{d}\tau-\hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi),$$

$$\widetilde{\omega}=\frac{(r^2-\hat{a}^2)}{\hat{\rho}^2}\left(\mathrm{d}\phi+\frac{\hat{a}}{(r^2-\hat{a}^2)}\mathrm{d}\tau\right). \tag{5.19.4}$$

式中 $\rho^2=r^2-a^2\cos^2\theta$.

欧氏度规可写成

$$\mathrm{d}s_E^2=\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\Delta}}\mathrm{d}r^2+\frac{\hat{\Delta}\rho^2}{(r^2-\hat{a}^2)^2}\omega^2+\rho^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\widetilde{\omega}^2). \tag{5.19.5}$$

式中 ω 和 $\widetilde{\omega}$ 见(5.19.4)，$\hat{\Delta}=r^2-a^2-\hat{q}^2-2mr$. $\hat{\Delta}$ 的根为 $\hat{r}_\pm=m\pm\sqrt{m^2+\hat{a}^2\pm\hat{q}^2}$. 由 $r=r_+$ 定义的视界面 Σ 是 Killing 矢量的稳态面. 引入新的径向变量 x，使得在视界附近有

$$\Delta=r(r-\hat{r}_+)=\frac{\gamma^2x^2}{4},$$

$$(r-r_+)=\frac{\gamma x^2}{4}, \gamma=2\sqrt{m^2+\hat{a}^2+\hat{q}^2}. \tag{5.19.6}$$

于是精确至 $o(x^2)$，度规(5.19.5)变为

$$ds_E^2=ds_\Sigma^2+\hat{\rho}_-^2\left\{dx^2+\frac{\gamma^2 x^2}{4(\hat{r}_+^2-\hat{a}^2)^2}\omega^2\right\}. \tag{5.19.7}$$

式中 $\rho_-^2=\hat{r}_+^2-\hat{a}^2\cos^2\theta$,

而 $$ds_\Sigma^2=\hat{\rho}_+^2(d\theta^2+\sin^2\theta\tilde{\omega}^2)=\hat{\rho}_+^2 d\theta^2+\frac{(\hat{r}_+^2-\hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}_+^2}\sin^2\theta d\psi^2 \tag{5.19.8}$$

是视界面 Σ 的度规. 这里我们用到了这样的事实：Σ 上可以引入一定义得很好的角坐标

$$\psi=\phi+[\hat{a}/(r_+^2-\hat{a}^2)]\tau.$$

度规(5.19.8)在点 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$ 处的规则性要求把 Σ 上的 ψ 和 $(\psi+2\pi)$ 看成一个点. 用欧氏 K-N 度规做完所有的计算后，我们再把结果解析延拓到实数 a 和 q.

(5.19.7)式可以写成

$$ds_E^2=ds_\Sigma^2+\rho_+^2 ds_{C_2}^2. \tag{5.19.9}$$

式中 ds_{C_2} 是与视界 Σ 在点(θ, ψ)相连的 2 维盘 C_2 的度规：

$$ds_{C_2}^2=dx^2+\frac{\gamma^2 x^2}{4\hat{\rho}_+^4}(d\tau-\hat{a}\sin^2\theta d\phi)^2. \tag{5.19.10}$$

考虑(θ, ψ)固定的度规(5.19.10). 在 C_2 上引入角坐标 $\chi=\tau-\hat{a}\sin^2\theta\phi$，则度规可写为

$$ds_{C_2}^2=dx^2+\frac{\gamma^2 x^2}{4\hat{\rho}_+^4}d\chi^2. \tag{5.19.11}$$

如果要求在 $x=0$ 处无奇异性，则需把点 χ 和 $(\chi+4\pi\gamma^{-1}\hat{\rho}_+^2)$ 看成同一个点；为了使其不依赖于视界上的坐标 θ，又必须把点(τ, ϕ)和$(\tau+2\pi\beta_H, \phi-2\pi\Omega\beta_H)$等同，式中 $\Omega=\hat{a}/(\hat{r}_+^2-\hat{a}^2)$ 是复角速度，$\beta_H=(\hat{r}_+^2-\hat{a}^2)/\sqrt{m^2+\hat{a}^2+\hat{q}^2}$. 容易看出，等同的点有相同的坐标 ψ.

通过上述等同，我们可以得到视界 Σ 附近的欧氏 K-N 几何的图像. 和视界上每一点(θ, ψ)相连的是坐标为(x, χ)的 2 维盘

C_2. 虽然 χ 不是 4 维空间的整体坐标，在每一点(θ, ϕ)都有一个新的 χ，但 C_2 上点的周期性等同却是普适的，而且独立于视界面上的任何点. 整体来说，K 不是坐标矢量. 但局域来看，我们有 $K=\partial_\chi$. 周期性在矢量 K 方向上，所得到的欧氏空间 E 是规则流形.

§ 5.20 视界的外几何

对于欧氏度规(5.19.5)，可以定义一对正交矢量$\{n_a=n_a^\mu\partial_\mu,\ a=1,\ 2\}$：

$$n_1^r=\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}},\tag{5.20.1}$$

$$n_2^r=\frac{(r^2-\hat{a}^2)}{\sqrt{\hat{\Delta}\hat{\rho}^2}},\ n_2^\phi=\frac{-\hat{a}}{\sqrt{\hat{\Delta}\hat{\rho}^2}}.\tag{5.20.2}$$

其协变分量为

$$n_r^1=\sqrt{\frac{\hat{\rho}^2}{\hat{\Delta}}},\tag{5.20.3}$$

$$n_r^2=\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}},\ n_\phi^2=-\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}}\hat{a}\sin^2\theta.\tag{5.20.4}$$

矢量 n^1 和 n^2 垂直于视界面 Σ[由 $r=r_+$，$\Delta(r=r_+)=0$ 定义]，它是一个 2 维面，其诱导度规为

$$\gamma_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-n_\mu^1n_\nu^1-n_\mu^2n_\nu^2.$$

此度规的非零分量为

$$\gamma_{\theta\theta}=\rho^2,\ \gamma_{\tau\tau}=\frac{\hat{a}^2\sin^2\theta}{\hat{\rho}^2}.$$

$$\gamma_{\tau\phi}=\frac{\hat{a}(r^2-\hat{a}^2)\sin^2\theta}{\hat{\rho}^2}.$$

$$\gamma_{\phi\phi}=\frac{(r^2-a^2)^2\sin^2\theta}{\hat{\rho}^2}.\tag{5.20.5}$$

对于正交矢量 $n^a(a=1,\ 2)$，可以定义面 Σ 的外曲率

$$\kappa_{\mu\nu}^a=-\gamma_\mu^\alpha\gamma_\nu^\beta\nabla_\alpha n_\beta^a:$$

$$\kappa_{\theta\theta}^1=-r\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}},$$

$$\kappa^1_{\tau\tau}=\frac{r\hat{a}^2\sin^2\theta}{\hat{\rho}^4}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}},$$

$$\kappa^1_{\tau\phi}=-\frac{\hat{a}r(r^2-\hat{a}^2)\sin^2\theta}{\hat{\rho}^4}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}},$$

$$\kappa^1_{\phi\phi}=-\frac{r(r^2-a^2)\sin^2\theta}{\hat{\rho}^4}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}}. \tag{5.20.6}$$

和

$$\kappa^2_{\gamma\tau}=-\frac{\hat{a}^2\sin\theta\cos\theta}{\hat{\rho}^2}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}}.$$

$$\kappa^2_{\gamma\phi}=-\frac{\hat{a}(r^2-\hat{a}^2)\sin\theta\cos\theta}{\hat{\rho}^2}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}}. \tag{5.20.7}$$

也可以得到外曲率的迹 $\kappa^a=\kappa^a_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$：

$$\kappa^1=-\frac{2\gamma}{\hat{\rho}^2}\sqrt{\frac{\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^2}},\ \kappa^2=0, \tag{5.20.8}$$

在面 Σ 上为零.

二次缩并

$$\kappa^1_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}_1=\frac{2r^2\Delta}{\hat{\rho}^6},$$

$$\kappa^2_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}_2=\frac{2\hat{a}^2\cos^2\theta\hat{\Delta}}{\hat{\rho}^6}, \tag{5.20.9}$$

在静态($a=0$)和稳态($a\neq0$)情况下在 Σ 上都为零. 故在视界上有 $t_r(\kappa\cdot\kappa)=\kappa^a_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}_a=0$.

§5.21 顶角奇异性和曲率张量

现在我们假设，以任意周期 $2\pi\beta$ 闭合 Killing 矢量 K 的径迹. 在视界附近，这表明在方程(5.19.9)和(5.19.10)中把 C_2 上的点 (τ,ϕ) 和 $(\tau+2\pi\beta,\phi-2\pi\Omega\beta)$ 等同，而 $\beta\neq\beta_H$. 这样等同的点仍有相同的坐标 ψ 值. 于是，角坐标 χ 的周期为

$$2\pi\beta(1+\hat{a}\Omega\sin^2\theta).$$

引入周期为 2π 的新角坐标

$$\chi=\beta\hat{\rho}^2_+(\hat{r}^2_+-\hat{a}^2)^{-1}\overline{\chi},$$

C_2 的度规变成

$$ds^2_{C_{2\ \alpha}} = dx^2 + \alpha^2 x^2 d\overline{\chi}^2, \tag{5.21.1}$$

这正是角亏损为 $\delta = 2\pi(1-\alpha)\ (\alpha = \beta/\beta_H)$ 的 2 维圆锥的度规. 因而，4 维度规(5.19.5)描述有奇异面 Σ 的欧氏顶角空间 E_α.

顶角奇点处曲率张量的行为，在平直 2 维圆锥和一般静态度规的情况下已精确得到. 我们所考虑的 K-N 度规是稳态的而不是静态的. 因此，前面相应的公式必须重新推导.

我们采用在静态情况下已获成功的方法. 先把顶角奇异性规则化，即用一系列由参数 b 表示的规则度规代替顶角度规(5.21.1)：

$$ds^2_{C_{2\ \alpha\ b}} = f(x, b)dx^2 + \alpha^2 x^2 d\overline{\chi}^2. \tag{5.21.2}$$

式中 $f(x, b)$ 是某个光滑的规则化函数，当 $b \to 0$ 时它趋于 1. 例如，

$$f(x, b) = \frac{x^2 + \alpha^2 b^2}{x^2 + b^2}$$

就是一个合适的规则化函数. 在极限 $b \to 0$ 下，由这一系列度规(5.21.2)可以得到曲率的类 δ 贡献.

为了将此方法应用于 Kerr 度规，考虑视界面 Σ 附近的情况. 对于 $\beta \neq \beta_H$，度规可写为

$$ds^2_{E_\alpha} = ds^2_\Sigma + \hat{\rho}^2_+ ds^2_{C_\alpha}. \tag{5.21.3}$$

把顶角度规用 $ds^2_{C_{\alpha\ b}}$ 代替，可以得到一系列规则度规：

$$ds^2_{E_{\alpha\ b}} = ds^2_\Sigma + \rho^2_+ ds^2_{C_{\alpha, b}}. \tag{5.21.4}$$

为了计算曲率，我们定义对度规(5.21.4)而言正交归一化的 1-形式的(非完全)基

$$e^1 = b\hat{\rho}_+ f^{1/2}(y)dy,$$

$$e^2 = by\frac{(m^2 + \hat{a}^2 + \hat{q}^2)^{1/2}}{\hat{\rho}_+}(d\tau - \hat{a}\sin^2\theta d\phi),$$

$$e^3 = \hat{\rho}_+ d\theta,$$

$$e^4 = \frac{(\hat{r}^2_+ - \hat{a}^2)}{\hat{\rho}_+}\sin\theta\left(d\phi + \frac{\hat{a}}{(\hat{r}^2_+ - \hat{a}^2)}d\tau\right). \tag{5.21.5}$$

式中坐标变换为

$$x=by,\ f(y)=(y^2+a^2)/(y^2+1).$$

洛仑兹联络 1-形式 $\omega_b^a=\omega_{bc}^a e^c$ 可以由方程

$$de^a+\omega_b^a\wedge e^b=0. \tag{5.21.6}$$

我们感兴趣的是当 $b\to 0$ 时，洛仑兹联络中的奇异分量. 分析(5.21.5)，我们发现只有 de^2 含有奇异项：

$$de^2=\frac{dy}{y}\wedge e^2+\cdots=[byf^{1/2}(y)]^{-1}e^1\wedge e^2+\cdots \tag{5.21.7}$$

式中省略号表示 $b\to 0$ 时的有限项. 由上式可知，洛仑兹联络的惟一奇异分量为

$$\omega_1^2=[by\hat{\rho}_+ f^{1/2}(y)]^{-1}e^2+\cdots \tag{5.21.8}$$

曲率的 2-形式 $R_b^a=R_{bcd}^a e^c\wedge e^d$ 定义为

$$R_b^a=d\omega_b^a+\omega_c^a\wedge\omega_b^c.$$

它有惟一一个奇异分量

$$R_1^2=d\omega_1^2+\cdots=\frac{1}{2yb^2\hat{\rho}_1^2}\ \frac{f'_y}{f^2}e^2\wedge e^1+\cdots$$

故曲率张量的惟一奇异分量为

$$R_{2121}=\frac{1}{2yb^2\hat{\rho}_+^2}\ \frac{f'_y}{f^2}+\cdots \tag{5.21.9}$$

引入一对矢量[见(5.20.1)和(5.20.2)] $n_a=n_a^\mu\partial_\mu$, $a=1, 2$, 它们垂直于视界 Σ，且与 1-形式 e^a 对偶，则有

$$R_{2121}=\frac{1}{2}R_{\mu\alpha\nu\beta}n_a^\mu n_b^\nu n_a^\alpha n_b^\beta.$$

为了证明当 $b\to 0$ 时 R_{2121}的形为类似 δ 函数，考虑积分

$$I_D=\int_D R_{2121}v(x,\theta,\psi)e^1\wedge e^2\wedge e^3\wedge e^4. \tag{5.21.10}$$

式中小盘 D_ϵ 围绕着视面 Σ, $0\leqslant x\leqslant\epsilon$. 在上式中，$v(x,\theta,\psi)$是一个试验函数，在矢量 K 的轨迹上为常数. 可以把它展开：

$$v(x,\theta,\psi)=v_0(\theta,\psi)+v_1(\theta,\psi)x^2+\cdots=$$
$$v_0(\theta,\psi)+b^2v_1(\theta,\psi)y^2+\cdots$$

记住(θ, ψ)是视界上的坐标. 把(5.21.5)和(5.21.9)代入(5.21.10)，得到

$$I_D = \int_0^{\epsilon/b} \mathrm{d}y \frac{f'_y}{2f^{3/2}} \sqrt{m^2 + \hat{a}^2 + \hat{q}^2} \oint (\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi) \int_\Sigma \frac{1}{\hat{\rho}_+^2}(v_0 + v_1 b^2 y^2 + \cdots) e^3 \wedge e^4. \tag{5.21.11}$$

上式中，我们先在正交于 $\Sigma(\theta,\psi$ 固定)的子空间中对 $e^1 \wedge e^2$ 积分，然后再在视界上做积分 $\int_\Sigma e^3 \wedge e^4$，得到

$$\oint (\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi) = \frac{2\pi\beta\hat{\rho}_+^2}{\hat{r}_+^2 - \hat{a}_+^2}. \tag{5.21.12}$$

式中积分域为(θ,ψ)固定时 Killing 矢量 K 的闭合积分路径.

当 $b \to 0$ 时，(5.21.11)中 y 的积分上限 $\epsilon/b \to \infty$，故

$$\int_0^\infty \mathrm{d}y \frac{f'_y}{2f^{3/2}} = - f^{-1/2}(y)|_0^\infty = \frac{1-\alpha}{\alpha}. \tag{5.21.13}$$

由(5.21.11～13)，当 $b \to 0$ 时，考虑到 $\beta_H = (\hat{r}_+^2 - \hat{a}^2)/\sqrt{m^2+\hat{a}^2+\hat{q}^2}$，最后得到

$$I_D = 2\pi(1-\alpha)\int_\Sigma v_0(\theta,\psi) e^3 \wedge e^4. \tag{5.21.14}$$

由于此式对于任意小的 ϵ 均成立，我们得出结论，在极限 $b \to 0$ 下，R_{2121}的行为类似于 δ 函数. 注意到矢量 n_a 与 Σ 正交，我们得到

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} &= \overline{R}_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + 2\pi(1-\alpha)[(n^\mu n_\alpha)(n^\nu n_\beta) - (n^\mu n_\beta)(n^\nu n_\alpha)]\delta_\Sigma,\\
R_\nu^\mu &= \overline{R}_\nu^\mu + 2\pi(1-\alpha)(n^\mu n_\nu)\delta_\Sigma,\\
R &= \overline{R} + 4\pi(1-\alpha)\delta_\Sigma.
\end{aligned} \tag{5.21.15}$$

式中 δ_Σ 是 δ 函数

$$\int_{\mathscr{M}} f\delta_\Sigma e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 = \int_\Sigma f e^3 \wedge e^4,$$

$$(n_\mu n_\nu) = \sum_{a=1}^2 n_\mu^a n_\nu^a.$$

特别是，由(5.21.15)可以得到

$$\int_{E_\alpha} R e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 =$$

$$\alpha\int_E \overline{R}e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 + 4\pi(1-\alpha)A_\Sigma. \qquad (5.21.16)$$

式中 $A_\Sigma = \int_\Sigma e^3 \wedge e^4$ 是 Σ 的面积. 对于 K-N 度规，$\overline{R}=0$. 显然，(5.21.15～16)和静态情况下得到的结果相同.

为了应用，还需要知道曲率的二次缩并在空间 E_α 上的积分. 根据(5.21.15)式，R 不仅含有 $\overline{R}$ 项，还含有 $(1-\alpha)\delta_\Sigma$ 的贡献. 因此，可以得到一个形式上的结果

$$\int_{E_\alpha}\mathscr{R}^2 = \alpha\int_{E_{\alpha=1}}\overline{\mathscr{R}}^2 + 2(1-\alpha)\int_\Sigma \overline{\mathscr{R}}_n + o((1-\alpha)^2). \qquad (5.21.17)$$

式中 $\overline{\mathscr{R}}_n$ 表示张量 $\overline{\mathscr{R}}$ 到正交于奇异面 Σ 的子空间上的投影. 上式定义得并不好，因为 $\mathscr{R}^2$ 中含有 $[(1-\alpha)\delta_\Sigma]^2$ 项. 幸亏它是 $(1-\alpha)$ 的高阶项，我们把它放到了最后一项中.

文[55]曾就静态情况得到了(5.21.17)式. 为了在 K-N 度规下证明这一点，我们必须写出视界 Σ 附近的度规(5.19.5)，并包含所有 x^2 阶的项. 考虑到前面引入的规则化函数，度规可写为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2_{E_{\alpha\ b}} = {} & byf(y)\mathrm{d}y^2 + \frac{\gamma^2 b^2 y^2}{4\hat{\rho}_-^2}(\mathrm{d}\tau - \hat{a}\sin^2\theta\mathrm{d}\phi)^2 + \\ & \left(\hat{\rho}_+^2 + \frac{\gamma}{2}b^2y^2\hat{r}_+\right)\mathrm{d}\theta^2 + \left[\frac{(\hat{r}_+^2-\hat{a}^2)^2}{\hat{\rho}_+^2} + \frac{(\hat{r}_+^2-\hat{a}^2)}{\hat{\rho}_+^2}\times\right. \\ & \left.\left(1-\frac{(r_+^2-\hat{a}^2)}{2\hat{\rho}_+^2}\right)\gamma\hat{r}_+ + b^2y^2\right]\sin^2\theta\left(\mathrm{d}\phi + \frac{\hat{a}}{\hat{r}_+^2-\hat{a}^2}\mathrm{d}\tau\right)^2 \\ & -\frac{\gamma a b^2 y^2}{2\hat{\rho}_-^2}\sin^2\theta\left(\mathrm{d}\phi + \frac{\hat{a}}{\hat{r}_-^2-\hat{a}^2}\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\tau. \end{aligned} \qquad (5.21.18)$$

曲率二次缩并(用 $\mathscr{R}^2$ 表示)，可以形式地写为

$$\mathscr{R}^2 = b^2A + \frac{f'_y}{b^2}B + \frac{(f'_y)^2}{b^4}C + o(b^4). \qquad (5.21.19)$$

式中函数 A, B, C 不依赖 b，且不含有规则化函数 $f(y)$ 的导数.

由于 Σ 附近，积分的测度与 b^2 成正比，再注意到 $f(y)$ 的导数行为是 $f'(y)\sim(1-\alpha)$，便可知道(5.21.19)中第二、三项积分后在极限 $b\to 0$ 下分别得到(5.21.17)中的第二、三项.

经过直接和冗长的计算，在极限 $b\to 0$ 下，得到

$$\int_{E_\alpha} R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \alpha\int_E \overline{R}^{\mu\nu}\overline{R}_{\mu\nu} + 4\pi(1-\alpha)\times$$

$$\int_\Sigma \overline{R}_{aa} + o((1-\alpha)^2), \tag{5.21.20}$$

$$\int_{E_\alpha} R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \alpha\int_E \overline{R}^{\mu\nu\lambda\rho}\overline{R}_{\mu\nu\lambda\rho} + 8\pi(1-\alpha)\times$$

$$\int_\Sigma \overline{R}_{abab} + o((1-\alpha)^2). \tag{5.21.21}$$

式中 $\overline{R}_{aa} = \Sigma_{a=1,2}\overline{R}_{\mu\nu}n_a^\mu n_a^\nu$，

$\overline{R}_{abab} = \Sigma_{a,b=1,2}\overline{R}_{\mu\nu\lambda\rho}n_a^\mu n_a^\lambda n_b^\nu n_b^\rho$.

在计算过程中，我们用到了 Σ 附近的积分测度

$\mu_{E_{\alpha,b}} = \hat{\rho}_+^2\mu_\Sigma\mu_{C_{\alpha,b}}$，

其中的 $\mu_\Sigma = (\hat{r}_+^2 - a^2)\sin\theta d\theta d\psi (0\leqslant\psi\leqslant 2\pi)$ 是 Σ 面上的测度，而 $\mu_{C_{\alpha,b}} = \alpha b^2 f^{1/2}(y)dyd\overline{\chi}(0\leqslant\overline{\chi}\leqslant 2\pi)$ 是规则化圆锥面 $C_{\alpha,b}$ 上的测度. 对于 R^2 的积分，我们得到

$$\int_{E_\alpha} R^2 = o((1-\alpha)^2).$$

由于 K-N 度规满足 $\overline{R}=0$，上式与期望的结果

$$\int_{E_\alpha} R^2 = \alpha\int_E \overline{R}^2 + 8\pi(1-\alpha)\int_\Sigma \overline{R} + o((1-\alpha)^2) \tag{5.21.22}$$

一致.

对于含顶角奇异性的稳态度规，我们得到了与静态情况一致的结果(5.21.20～22).

对于 K-N 度规，在视界面 Σ 上有

$$\frac{1}{2}\overline{R}_{abab} = \overline{R}_{1212} = \frac{\hat{r}_+^2(4\hat{q}^2 + 8m\hat{r}_+) - (\hat{q}^2 + 6mr_+)\hat{\rho}^2}{\hat{\rho}_+^6},$$

$$\frac{1}{2}\overline{R}_{aa} = \overline{R}_{11} = \overline{R}_{22} = \frac{\hat{q}^2}{\hat{\rho}_+^4}. \tag{5.21.23}$$

在 Σ 上积分，得到

$$\int_\Sigma \overline{R}_{abab} = 8\pi\frac{(\hat{r}_+^2 + \hat{q}^2)}{r_+^2} + 4\pi\frac{\hat{q}^2}{r_-^2}\frac{(\hat{r}_+^2 - \hat{a}^2)}{ar_-}\ln\left(\frac{\hat{r}_+ + \hat{a}}{\hat{r}_+ - \hat{a}}\right),$$

$$\int_\Sigma \overline{R}_{aa} = 4\pi \frac{\hat{q}^2}{\hat{r}_+^2}\left[1 + \frac{(\hat{r}_+^2 - \hat{a}^2)}{2\hat{a}\hat{r}_+}\ln\left(\frac{\hat{r}_+ + \hat{a}}{\hat{r}_+ - \hat{a}}\right)\right]. \quad (5.21.24)$$

将这些式子解析延拓，回到参量 a 和 q 的实数值，需要做代换

$$\hat{q}^2 = -q^2,\ \hat{a}^2 = -a^2,\ \hat{r}_+ = r_+,$$

$$\frac{1}{\hat{a}}\ln\left(\frac{\hat{r}_+ + \hat{a}}{\hat{r}_+ - \hat{a}}\right) = \frac{2}{a}\tan^{-1}\left(\frac{a}{r_+}\right). \quad (5.21.25)$$

§5.22 热核展开和熵

人们对温度为 $T=(2\pi\beta)^{-1}$的统计性场系统应用欧氏路径积分方案时，虚时间 τ 的周期为 $2\pi\beta$. 这对于度规不含 τ 的静态场适用，只要把 Killing 矢量 ∂_t 的积分曲线以周期 $2\pi\beta$ 闭合就行了.

在旋转黑洞的情况下，须闭合矢量 K[见(5.19.4)]的积分曲线. 结果对于任意的 β 得到顶角空间 E_α. 这一几何已经描述过了. 于是配分函数为

$$Z(\beta) = \int[\mathrm{D}_\varphi]\exp[-I_E(\varphi, g_{\mu\nu})], \quad (5.22.1)$$

式中物质的欧氏作用量 I_E 是对空间 E_α 而言的，物质场 φ 加上了边界条件(周期性). 其熵为

$$S = -(\beta\partial_\beta - 1)\ln Z(\beta)|_{\beta=\beta_H}. \quad (5.22.2)$$

虽然 K-N 度规是以电磁场为源的爱因斯坦场方程的解，但是引力作用量却总要被量子修正引起的高阶曲率项所修正. 这样的 R^2 项必须一开始就考虑进来，其裸常数($c_{1,B}$, $c_{2,B}$, $c_{3,B}$)(主级)用来吸收单圈无穷大. 于是，主级引力作用量泛函为

$$W_{gr} = \int\sqrt{g}\,\mathrm{d}^4x\left(-\frac{1}{16\pi G_B}R + c_{1,B}R^2 + c_{2,B}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + c_{3,B}R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}\right). \quad (5.22.3)$$

相应的主级熵可以在引入规则化顶角奇异性和应用式(5.22.1)、(5.22.2)之后做为作用量(5.22.3)的复制品而得到. 应用式(5.21.21～23)，我们得到

$$S(G_B, c_{i,B}) = \frac{1}{4G_B}A_\Sigma - \int_\Sigma(8\pi c_{1,B}\overline{R} + 4\pi c_{2,B}\overline{R}_{aa} +$$

$$8\pi c_{3\ \ B}\overline{R}_{abab}),\tag{5.22.4}$$

这正是静态情况的表达式[89]. 上式对离壳情况是成功的，因为我们并未要求度规满足任何场方程. 即壳时，必须把 K-N 度规满足的场方程 $\overline{R}=0$ 代入上式.

在单圈水平上，物质作用量为

$$I_E = \frac{1}{2}\int_{E_\alpha}(\nabla\varphi)^2,$$

配分函数为

$$\ln Z(\beta) = -\frac{1}{2}\ln\det(\square_{E_\alpha}),$$

式中$\square=\nabla_\mu\nabla^\mu$是顶角空间 E_α 的拉普拉斯算符. 在 Dewitt-Schwinger 固有时间表象中，

$$\ln\det(-\square) = -\int_{\epsilon^2}^{\infty}\frac{ds}{s}\mathrm{Tr}(e^{s\square}).\tag{5.22.5}$$

在 4 维情况下有渐近展开式

$$\mathrm{Tr}(e^{s\square}) = \frac{1}{(4\pi s)^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n s^n.\tag{5.22.6}$$

对 $\ln Z$ 的发散部分有

$$(\ln Z)_{\mathrm{div}} = \frac{1}{32\pi^2}\left(\frac{1}{2}a_0\epsilon^{-4} + a_1\epsilon^{-2} + 2a_2\ln\frac{L}{\epsilon}\right).\tag{5.22.7}$$

式中 L 为红外截断. 众所周知，对于有顶角奇异性的流形，(5.22.6)式中的热核系数是标准部分和顶角部分之和：

$$a_n = a_n^{st} + a_{n\ \ \alpha},\tag{5.22.8}$$

标准系数 a_n^{st} 与光滑流形的情况相同[90]：

$$a_0^{st} = \int_{E_\alpha}1,\quad a_1^{st} = \frac{1}{6}\int_{E_\alpha}\overline{R},$$

$$a_2^{st} = \int_{E_\alpha}\left(\frac{1}{180}\overline{R}_{\mu\nu\alpha\beta}\overline{R}^{\mu\nu\alpha\beta} - \frac{1}{180}\overline{R}_{\mu\nu}\overline{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{30}\square\overline{R} + \frac{1}{72}\overline{R}^2\right),\tag{5.22.9}$$

而来自奇异面 Σ 的部分为

$$a_{0\ \ \alpha} = 0;\quad a_{1\ \ \alpha} = \frac{\pi}{3}\,\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\int_\Sigma\sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}^2\theta;\tag{5.22.10}$$

$$a_{2,\alpha} = \frac{\pi}{3}\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}\int_\Sigma\left(\frac{1}{6}\overline{R} + \lambda_1[\kappa^a\kappa^a - 2\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)]\right)\times \sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}^2\theta - \frac{\pi}{180}\frac{(1-\alpha^4)}{\alpha^3}\int_\Sigma\left(\overline{R}_{aa} - 2\overline{R}_{abab} + \frac{1}{2}\kappa^a\kappa^a + \lambda_2[\kappa^a\kappa^a - 2\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)]\right)\sqrt{\gamma}\,\mathrm{d}^2\theta.$$

式中 λ_1 和 λ_2 为常数，$\kappa^a_{\mu\nu}(a=1,2)$ 是相对于 n^a 的面 Σ 的外曲率，$\kappa^a = g^{\mu\nu}\kappa^a_{\mu\nu}$，$\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa) = \sum_{a=1,2}\kappa^a_{\mu\nu}\kappa^{\mu\nu}_a$.

把(5.22.2)应用于(5.22.7)，并考虑到 $a^a_n \sim \alpha$，可以得到熵的发散量子修正：

$$S_{\mathrm{div}} = \frac{1}{48\pi\epsilon^2}A_\Sigma + \left[\frac{1}{144\pi}\int_\Sigma\overline{R} - \frac{1}{16\pi}\frac{1}{45}\int_\Sigma(\overline{R}_{aa} - 2\overline{R}_{abab}) + \frac{1}{16\pi}\frac{1}{90}\int_\Sigma\kappa^a\kappa^a + \frac{1}{24\pi}\left(\lambda_1 - \frac{\lambda_2}{30}\right)\times \int_\Sigma[\kappa^a\kappa^a - 2\mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa)]\right]\ln\frac{L}{\epsilon}. \tag{5.22.11}$$

我们看到，熵的发散部分既依赖于曲率到正交于视界面 Σ 的子空间的投影 $\overline{R}_{aa}$ 和 $\overline{R}_{abab}$，也依赖于 Σ 的外曲率的二次缩并. 静态情况下，此外曲率为零，上式变成主级熵(5.22.4)的形式. 这一点使人们对任意静态黑洞证明，熵的所有 UV 发散均被主级引力作用量中引力常数的标准重整化所吸收[90]. 要同样地分析 K-N 黑洞，则需研究旋转荷电黑洞视界面的外几何. 此时有(见 §5.20)

$$\sum_{a=1,2}\kappa^a\kappa^a = \mathrm{tr}(\kappa\cdot\kappa) = 0.$$

这使得 K-N 度规情况下系数(5.22.10)和(5.22.11)与静态的相同.

因此，(5.22.11)式的 S_{div} 与主级熵的形式相同，重整化对稳态黑洞也成立. 在某种意义上这是自然的，因为静态黑洞和稳态黑洞的经典热力学表述是一样的，因而可以预见这对于量子情况也成立.

在 K-N 背景下考虑(5.22.11)式. 把(5.21.25)和 $\bar{R}=0$ 代入，并做解析延拓(5.21.26)，最后得到 K-N 黑洞的量子熵

$$S_{\mathrm{div}}=\frac{1}{48\pi\epsilon^2}A_\Sigma+\frac{1}{45}\left\{1-\frac{3q^2}{4r_+^2}\left[1+\frac{(r_+^2+a^2)}{ar_+}\tan^{-1}\left(\frac{a}{r_+}\right)\right]\right\}\ln\frac{L}{\epsilon}.\tag{5.22.12}$$

式中 $A_\Sigma=4\pi(r_+^2+a^2)$是视界 Σ 的面积. 在极限 $a\to0$ 下，此式变成 R-N 黑洞的熵. 奇怪的是，在无荷($q=0$)的情况下量修正(5.22.12)不依赖于转动参量 a，而与史瓦希洞的量子熵相同. 为什么会这样，现在还不清楚.

用顶角奇异性的欧氏方案处理黑洞热力学对静态情况是很合适的. 由此可以得到静态黑洞的经典熵和量子熵. 我们已指出，经典的静态和稳态黑洞热力学的表述是相同的. 一个基本假定是顶角奇异性方法也适用于旋转黑洞.

本节中我们按此思路进行了计算和讨论. 我们研究了 K-N 度规的欧氏几何；建立了视界附近的顶角奇异性，并得到了曲率的 δ 函数行为——与静态黑洞的情况非常相似.

表述静态黑洞量子热力学的主要一点是证明量子物质引起的黑洞熵的 UV 发散可以由主级引力作用量中耦合常数的标准重整化消去. 这使得熵成为定义得很好的量子场论量. 我们证明了，对于 K-N 黑洞，由几何不变量表示的 S_{div} 像静态情况一样具有与主级熵相同的形式. 这说明重整化对静态和稳态黑洞都适用，只要对量子热力学的处理正确.

§5.23 Dirac 旋量场的熵

本节根据离壳方法中的砖墙模型(见§5.5)，讨论 Dirac 旋量场的熵，得到关于史瓦希背景下 Dirac 场的自由能和熵的表达式[54]；所得结果和 de Alwis 等人采用泛函积分方法得到的结

果[92]一致.

旋标架形式的Dirac方程具有形式

$$(D+\varepsilon-\rho)F_1+(\bar{\delta}+\pi-\alpha)F_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_0G_1,$$

$$(\Delta'+\mu-\gamma)F_2+(\delta+\beta-\tau)F_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_0G_2,$$

$$(D+\varepsilon^*-\rho^*)G_2-(\delta+\pi^*-\alpha^*)G_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_0F_2, \tag{5.23.1}$$

$$(\Delta'+\mu^*-\gamma^*)G_1-(\bar{\delta}+\beta^*-\tau^*)G_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_0F_1.$$

旋系数与零标架之间的关系为

$$\alpha=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu\bar{m}^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu\bar{m}^\nu),\ \rho=l_{\mu;\nu}m^\mu\bar{m}^\nu,$$

$$\beta=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu m^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu m^\nu),\ \pi=-n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu l^\nu,$$

$$\gamma=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu n^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu n^\nu),\ \mu=-n_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu m^\nu, \tag{5.23.2}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(l_{\mu;\nu}n^\mu l^\nu-m_{\mu;\nu}\bar{m}^\mu l^\nu),\ \tau=l_{\mu;\nu}m^\mu n^\nu;$$

$$D=l^\mu\partial_\mu,\ \Delta'=n^\mu\partial_\mu,\ \delta=m^\mu\partial_\mu,\ \bar{\delta}=\bar{m}^\mu\partial_\mu. \tag{5.23.3}$$

史瓦希度规对应的零标架选为

$$l^\mu=\frac{1}{\Delta}(r^2,\ \Delta,\ 0,\ 0),\quad n^\mu=\frac{1}{2r^2}(r^2,\ -\Delta,\ 0,\ 0),$$

$$m^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0,\ 0,\ 1,\ \frac{1}{\sin\theta}\right),$$

$$\bar{m}^\mu=\frac{1}{\sqrt{2}r}\left(0,\ 0,\ 1,\ -\frac{1}{\sin\theta}\right), \tag{5.23.4}$$

其中 $\Delta=r^2-2Mr$. 引入4分量旋量

$$F_1=e^{-iEt}e^{im\varphi}r^{-1}f_1(r,\ \theta),$$

$$F_2=e^{-iEt}e^{im\varphi}f_2(r,\ \theta),$$

$$G_1=e^{-iEt}e^{im\varphi}g_1(r,\ \theta), \tag{5.23.5}$$

$$G_2=e^{-iEt}e^{im\varphi}r^{-1}g_2(r,\ \theta).$$

此时(5.23.1)可写为

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}_0 f_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}^-_{1/2} f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu r g_1,\\
&\Delta\mathscr{D}^+_{1/2} f_2-\sqrt{2}\,\mathscr{L}_{1/2} f_1=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\mu r g_2,\\
&\mathscr{D}_0 g_2-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{L}_{1/2} g_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\mu r f_2,\\
&\Delta\mathscr{D}^+_{1/2} g_1+\sqrt{2}\,\mathscr{L}^+_{1/2} g_2=-\sqrt{2}\,\mathrm{i}\mu r f_1,
\end{aligned}
\qquad (5.23.6)
$$

其中

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}_n=\partial_r-\mathrm{i}E\,\frac{r^2}{\Delta}+2n\,\frac{r-M}{\Delta},\\
&\mathscr{D}^+_n=\partial_r+\mathrm{i}E\,\frac{r^2}{\Delta}+2n\,\frac{r-M}{\Delta},\\
&\mathscr{L}^+_n=\partial_\theta+\frac{m}{\sin\theta}+n\cot\theta,\\
&\mathscr{L}_n=\partial_\theta-\frac{m}{\sin\theta}+n\cot\theta.
\end{aligned}
\qquad (5.23.7)
$$

令

$$
\begin{aligned}
&f_1(r,\ \theta)=R_{-1/2}(r)\Theta_{-1/2}(\theta),\\
&f_2(r,\ \theta)=R_{+1/2}(r)\Theta_{+1/2}(\theta),\\
&g_1(r,\ \theta)=R_{+1/2}(r)\Theta_{-1/2}(\theta),\\
&g_2(r,\ \theta)=R_{-1/2}(r)\Theta_{+1/2}(\theta),
\end{aligned}
\qquad (5.23.8)
$$

分离变量. 为了简单，令 $\mu_0=0$，即只考虑旋量场无质量的情况，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\Delta\mathscr{D}^+_{1/2}\mathscr{D}_0 R_{-1/2}=\lambda^2 R_{-1/2},\\
&\mathscr{D}_0\Delta\mathscr{D}^+_{1/2} R_{+1/2}=\lambda^2 R_{+1/2},\\
&\mathscr{L}_{1/2}\mathscr{L}^-_{1/2}\Theta_{+1/2}+\lambda^2\Theta_{+1/2}=0,\\
&\mathscr{L}^+_{1/2}\mathscr{L}_{1/2}\Theta_{-1/2}+\lambda^2\Theta_{-1/2}=0,
\end{aligned}
\qquad (5.23.9)
$$

即

$$
\begin{aligned}
&\Delta\frac{\mathrm{d}^2 R_{-1/2}}{\mathrm{d}r^2}+(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{-1/2}}{\mathrm{d}r^2}+\\
&\quad\left[\frac{E^2 r^4}{\Delta}-2\mathrm{i}Er+\frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta}-\lambda^2\right]R_{-1/2}=0,\qquad (5.23.10)\\
&\Delta\frac{\mathrm{d}^2 R_{+1/2}}{\mathrm{d}r^2}+3(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{+1/2}}{\mathrm{d}r}+\\
&\quad\left[\frac{E^2 r^4}{\Delta}+2\mathrm{i}Er-\frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta}+1-\lambda^2\right]R_{+1/2}=0,
\end{aligned}
$$

$$(5.23.11)$$

$$\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}-\frac{m^2}{\sin^2\theta}+\lambda^2\right)\Theta_{\pm 1/2}+$$
$$\left[\frac{1}{4}\cot^2\theta\mp\frac{m\cos\theta}{\sin^2\theta}-\frac{1}{2\sin^2\theta}\right]\Theta_{\pm 1/2}=0. \qquad (5.23.12)$$

径向方程可以用 WKB 近似方法求解，角向方程可以化为勒让得方程，Dirac 方程的角向解可写为形式

$$e^{im\varphi}\Theta_{\pm}(\theta')=Y_{lm}(\theta',\varphi).$$

因此，Dirac 场的 4 分量波函数可写为形式

$$\phi=[F_1, F_2, G_1, G_2]^{\mathrm{T}}\sim$$
$$[r^{-1}R_-, R_-, R_+, r^{-1}R_-]^{\mathrm{T}}Y_{lm}(\theta',\varphi)e^{-iEt}.$$
$$(5.23.13)$$

利用熵的可加性，先求出每一分量对应的熵，然后再相加，便可得到 Dirac 场的熵.

对于 F_1 分量，利用砖墙法，设波函数在靠近视界 h 范围内为零：

$$F_1(r)=0(r\leqslant r_H+h), \qquad (5.23.14)$$

而且在远离视界 L 处也为零：

$$F_1(r)=0(r>L). \qquad (5.23.15)$$

式中 $r_H=2M$，h 为非负小量的紫外截断因子，L 为红外截断因子，$L\gg r_H$.

F_1 的径向分量满足方程

$$\Delta\frac{\mathrm{d}^2R_{-1/2}}{\mathrm{d}r^2}+(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{-1/2}}{\mathrm{d}r}+$$
$$\left[\frac{E^2r^4}{\Delta}-2iEr+\frac{iEr^3(r-M)}{\Delta}-\lambda^2\right]R_{-1/2}=0. \quad (5.23.16)$$

设解为 $R_{-1/2}=e^{iS_1(r)}$，运用 WKB 近似可得

$$K_1^2=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right].$$
$$(5.23.17)$$

式中 $K_1=\partial_rS_1(r)$为径向波数.

假设所研究的 Dirac 场处于 Hartle-Hawking 真空态[59]，此

时 Dirac 场的温度应该为 Hawking 温度 $T_H=\frac{k}{2\pi}=\frac{1}{8\pi M}$. 根据正则系综理论，费密体系的自由能可表示为

$$\beta f_1=-\sum_k \ln(1+e^{-\beta E}). \tag{5.23.18}$$

作为半经典处理，视能态为连续分布，因而求和改为积分

$$\sum_L \to \int_0^\infty dE g(E). \tag{5.23.19}$$

式中 $g(E)$ 为态密度，$g(E)=\frac{d\Gamma(E)}{dE}$，$\Gamma(E)$ 为微观态数目，即

$$\Gamma(E)=\sum_m\sum_l n_r(E,l,m)=\sum_l(2l+1)n_r(E,l)=$$
$$\int_l(2l+1)dl\,\frac{1}{\pi}\int_r K_r(E,l)dr. \tag{5.23.20}$$

式中对角量子数的求和也作积分处理，并且要求在积分时必须保持 $K_r(E,l)\geqslant 0$. 于是，系统的自由能可表示为

$$\beta f_1=-\int_0 dEg_1(E)\ln(1+e^{-\beta E})=$$
$$-\beta\int_0^\infty dE\,\frac{\Gamma(E)}{e^{\beta E}+1}=$$
$$-\frac{\beta}{\pi}\int_0^\infty dE\int_{2M-h}^L dr\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\int_l(2l+1)dl\times$$
$$(e^{\beta E}+1)^{-1}\sqrt{E^2-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{l(l+1)}{r^2}}=$$
$$-\frac{2}{3}\,\frac{\beta}{\pi}\int_{2M+h}^l dr\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}r^2\int_0^\infty dE\,\frac{E^3}{e^{\beta E}+1}.$$
$$\tag{5.23.21}$$

当 $L\gg 2M$ 和 $h\ll 2M$ 时有

$$f_1\approx-\frac{7}{2}\,\frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4-\frac{2}{9\pi}L^3\int_0^\infty dE\,\frac{E^3}{e^{\beta E}+1}. \tag{5.23.22}$$

式中右端第二项为系统周围远距离真空所产生的作用，可忽略；只需保留第一项，这是视界的内禀贡献，当 $h\to 0$ 时线性发散. 故有

$$f_1 \approx -\frac{7}{2}\ \frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4. \tag{5.23.23}$$

进一步可算得内能和熵分别为

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta f_1) = \frac{7}{8}\ \frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.24}$$

$$S_1 = \beta(U_1 - f_1) = \frac{7}{8}\ \frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{5.23.25}$$

同样用砖墙法，可得 F_2 分量满足的径向分量方程

$$\Delta\frac{\mathrm{d}^2R_{+1/2}}{\mathrm{d}r^2} + 3(r-M)\frac{\mathrm{d}R_{+1/2}}{\mathrm{d}r} + \left[\frac{E^2r^4}{\Delta} + 2\mathrm{i}Er - \frac{\mathrm{i}Er^2(r-M)}{\Delta} + 1 - \lambda^2\right]R_{+1/2} = 0. \tag{5.23.26}$$

经过与上面类似的讨论，采用 WKB 近似，得到

$$K_2^2 = \left[\frac{r^4E^2}{r^2-2Mr} - l(l+1) + 1\right]\frac{1}{r(r-2M)}, \tag{5.23.27}$$

$$K_2 = \partial_r S_2(r).$$

从而得到 F_2 对应的自由能

$$\begin{aligned} f_2 = & -\int_0^\infty \mathrm{d}E\,\frac{\Gamma(E)}{\mathrm{e}^{\beta E}+1} = \\ & -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}E\int_{2M+h}^{L}\mathrm{d}r\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\int_l (2l+1)\mathrm{d}l\ \times \\ & (\mathrm{e}^{\beta E}-1)^{-1}\sqrt{E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{[l(l+1)-1]}{r^2}} \approx \\ & -\frac{7}{2}\ \frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4 - \frac{2}{9\pi}L^3\int_0^\infty \mathrm{d}E\,\frac{E^3}{\mathrm{e}^{\beta E}+1}. \end{aligned} \tag{5.23.28}$$

右端第二项可忽略，得到

$$f_2 = f_1 \approx -\frac{7}{2}\ \frac{\pi^3}{90h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.29}$$

$$U_2 = U_1 = \frac{7}{8}\ \frac{2\pi^3}{15h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.30}$$

$$S_2 = S_1 = \frac{7}{8}\ \frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{5.23.31}$$

分量 G_1 和 G_2 对应的熵可同样计算，结果表明，它们对应的自由能和熵与 F_1 的分别相等. 这样，最后得到

$$F=4f_1\approx-\frac{7}{2}\frac{2\pi^3}{45h}\left(\frac{2M}{\beta}\right)^4, \tag{5.23.32}$$

$$S=4S_1=\frac{7}{2}\ \frac{8\pi^3}{45h}2M\left(\frac{2M}{\beta}\right)^3. \tag{5.23.33}$$

若紫外截断因子与标量场的情况相同，即

$$h=\frac{1}{720\pi M}, \tag{5.23.34}$$

再代入史瓦希黑洞的

$$\beta=\frac{1}{T}=\frac{2\pi}{K}=8\pi M, \tag{5.23.35}$$

可把熵写为

$$S=\frac{7}{2}4\pi M^2=\frac{7}{2}\ \frac{A_H}{4}. \tag{5.23.36}$$

此结果与文[92]的结果一致.

6 黑洞的量子辐射

§6.1 粒子对的自发产生过程

Zeldovich(1972), Starobinsky(1937)和Unruh(1974)研究了稳态时空中粒子对的产生过程.

弯曲时空中自旋为零的荷电粒子的克莱因-高登方程有形式

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}-i\varepsilon A_{\mu}\right)\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}-i\varepsilon A_{\nu}\right)\right]\phi(x)-\mu^{2}\phi(x)=0. \tag{6.1.1}$$

考虑稳态时空背景，将克尔-纽曼度规代入，上式可写为

$$\left\{\partial_r\Delta\partial_r-\frac{1}{\Delta}\left[(r^2+a^2)\partial_t+a\partial_\varphi+iQ\varepsilon r\right]^2-\mu^2r^2+\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\partial_\theta+\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi+a\sin\theta\partial_t\right)^2-\mu^2a^2\cos^2\theta\right\}\varphi=0. \tag{6.1.2}$$

此方程可分离变量. 令

$$\varphi=e^{i(m\varphi-\omega t)}\chi^{(\theta)}\psi^{(r)}, \tag{6.1.3}$$

得到

$$\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}+\left(\frac{m}{\sin\theta}-a\omega\sin\theta\right)^2+\mu^2a^2\cos^2\theta\right]\chi=K\chi, \tag{6.1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}z^2}=-V\psi. \tag{6.1.5}$$

式中

$$V=\Delta(\mu^2r^2+K)-\left[\omega(r^2+a^2)-am-Q\varepsilon r\right]^2, \tag{6.1.6}$$

$$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}r/\Delta. \tag{6.1.7}$$

由(6.1.5)知 $V>0$ 是禁区，我们有 $V<0$，或

$$[\omega(r^2+a^2)-am-Q\varepsilon r]^2-\Delta(\mu^2r^2+K)\geqslant 0. \tag{6.1.8}$$

在禁区内 $V>0$，可把有效势 V 看作势垒. 为了看清这一点，可引入 Tortoise 坐标

$$\frac{dr^*}{dr}=\frac{r^2+a^2}{\Delta}. \tag{6.1.9}$$

此时视界为

$$r^*=-\infty,\ V\to-(\omega-m\Omega)^2,$$

空间无限远处为

$$r^*=\infty,\ V\to-\omega^2,$$

中间为 $V>0$. 所以 V 为具有一定宽度的势垒.

下面计算自真空中的粒子产生率. 利用量子场论中入射态和出射态的概念，设外场局限于时空范围 Ω 内，入射态和出射态分别为 Ω 的过去无限大和将来无限大的态. 分别以

$$p_i^{in}(x)\text{和}\ n_i^{in}(x)\equiv(p_i^{in}(x))^*$$

表示入射正能态和负能态，则它们组成一正交归一的完备集

$$\begin{aligned}&(p_i^{in},\ p_k^{in})=\delta_{ik}=\pm(n_i^{in},\ n_k^{in}),\\&(p_i^{in},\ n_k^{in})=0.\end{aligned} \tag{6.1.10}$$

式中正负号分别对应于费米子和玻色子.

任意场函数可以展开为

$$\varphi(x)=\sum_i[a_i^{in}p_i^{in}(x)+(a_i^{in})^+n_i^{in}(x)], \tag{6.1.11}$$

其中 a_i^{in} 和 $(a_i^{in})^+$ 分别是入射正能粒子的湮灭算符和产生算符. 它们满足下述量子条件：

$$[a_i^{in},\ (a_i^{in})^+]_{\pm}=\delta_{ik}. \tag{6.1.12}$$

我们定义入射真空态 $|in\rangle_{vac}$ 为

$$a_i^{in}|in\rangle_{vac}=0,\ \forall\ i. \tag{6.1.13}$$

由此可得 $a_i^+a_i|in\rangle_{vac}=0$. 即 $N_i^{in}|in\rangle_{vac}=0$，$\forall\ i$. N_i^{in} 为入射正能粒子数算符. 故 (6.1.13)式意味着入射真空态不含入射正能粒子. 完全类似，我们也可以定义

$$p_i^{out}(x),\ n_i^{out}(x)\text{和}\ |out\rangle_{vac}.$$

所谓真空中产生粒子，即入射真空态 $|in\rangle_{vac}$ 中包含出射粒子，

或 $$n_i = {}_{vac}\langle in|(a_i^{out})^+ a_i^{out}|in\rangle_{vac} \neq 0, \tag{6.1.14}$$

其中 n_i 代表平均粒子数.

由

$$\varphi = \sum_i [a_i^{in} p_i^{in} + (a_i^{in})^+ n_i^{in}] = \sum_i [a_i^{out} p_i^{out} + (a_i^{out})^+ n_i^{out})].$$

二边左乘以 $(p_i^{out})^-$ 并利用(6.1.10)式可得

$$a_i^{out} = \sum_k [(p_i^{out}, p_k^{in}) a_k^{in} + (p_i^{out}, n_k^{in})(a_k^{in})^+], \tag{6.1.15}$$

$$(a_i^{out})^+ = \sum_k [(p_i^{out}, p_k^{in})^+ (a_k^{in})^+ + (p_i^{out}, n_k^{in})^+ a_k^{in}].$$

引入 $$\alpha_{ik} \equiv (p_i^{out}, p_k^{in}), \beta_{ik} \equiv (p_i^{out}, n_k^{in}), \tag{6.1.16}$$

上二式便简写为

$$a_i^{out} = \sum_k [\alpha_{ik} a_k^{in} + \beta_{ik} a_k^{in+}],$$

$$(a_i^{out})^+ = \sum_k [\alpha_{ik}^* (a_k^{in})^+ + \beta_{ik}^* a_k^{in}]. \tag{6.1.17}$$

这就是 Bogoliubov 变换.

不难看出

$$p_i^{out} = \sum_k [\alpha_{ik} p_k^{in} + \beta_{ik} n_k^{in}],$$

$$n_k^{in} = \sum_i [\beta_{ik} p_i^{out} + \alpha_{ik} n_i^{out}]. \tag{6.1.18}$$

式中 β_{ik} 叫正负频混合系数.

由(6.1.17)式知(6.1.14)式中的 n_i 为

$$n_i = \sum_k \beta_{ik}^* \cdot \beta_{ik} = \sum_k |\beta_{ik}|^2 = \sum_k |(p_i^{out}, n_k^{in})|^2. \tag{6.1.19}$$

可见，自真空中产生粒子，或入射真空中包含出射粒子的关键是出现正负频的混合.

在弯曲时空中，只要我们能定义正负频解，就能定义产生和湮灭算符，就能定义真空，而只要二套不同的真空出现正负频混

合，就可以自真空中产生粒子.

在目前所考虑的 Klein 机制中，正负频混合系数为

$$\beta_{ik}=(p_i^{out},\ n_k^{in}),$$

正好就是透射率幅

$$T_{ik}=(p_i^{out},\ n_k^{in}). \tag{6.1.20}$$

因此在 Klein 机制中，强静电场引起正负能级的交错是产生正负频混合的原因.

(6.1.19)式中$|T_{ik}|^2=|\beta_{ik}|^2$ 与自真空中以"k"标志的入射负能态 n_k^{in} 产生以"i"标志的出射正能态 p_i^{out} 的平均粒子数成正比，而所产生的平均总粒子数为

$$N=\sum_i n_i\sim\sum_{i,k}|T_{ik}|^2. \tag{6.1.21}$$

式中"i"，"k"等表示一组完备量子数集合.

考虑到守恒律的限制，

$$T_{ik}=T_i\delta_{ik}=T_{\omega\alpha}\delta(\omega_i-\omega_k)\delta_{\alpha\alpha k},$$

其中 ω 表示初态或末态的能量、α 表示初态或末态的分立量子数，则

$$n_i\sim|T_{ik}|^2=|T_i|^2=|T_{\omega\alpha}|^2[\delta(\omega_i-\omega_k)]^2,$$

$$N=\sum_i n_i\sim\sum_{i,k}|T_{\omega\alpha}|^2\delta(\omega_i-\omega_k)\frac{1}{2\pi}\int e^{i(\omega_i-\omega_k)t}\mathrm{d}t=$$

$$\sum_{i\ k}|T_{\omega\alpha}|^2\delta(\omega_i-\omega_k)\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}t,$$

故
$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\sim\frac{V^2}{(2\pi)^6}\int\mathrm{d}\omega_i\int\mathrm{d}\omega_k\sum_{ki}|T_{\omega\alpha}|^2\delta(\omega_i-\omega_k)\frac{1}{2\pi}=$$

$$\frac{V^2}{(2\pi)^6}\int\mathrm{d}\omega\sum_i\frac{1}{2\pi}|T_{\omega\alpha}|^2.$$

对于克尔-纽曼时空，作类似地处理，可以得到黑洞外粒子对的产生率：

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\int\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}\sum_{m,k}|T|^2_{\omega,m,k}. \tag{6.1.22}$$

用 WKB 近似法，可以计算

$$\xi = 2\int V^{1/2}\mathrm{d}z,$$

$$|T^2| = e^{-\xi}. \tag{6.1.23}$$

式中积分沿势垒. 引入局部正交标架 ω_μ:

$$\mathrm{d}\omega^\mu = \alpha^\mu_\nu \mathrm{d}x^\nu,$$

$$(\alpha^\mu_\nu) = \begin{bmatrix} \dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho} & 0 & 0 & -\left(\dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho}a\sin^2\theta\right) \\ 0 & \dfrac{\rho}{\Delta^{1/2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ -\sin\theta\,\dfrac{a}{\rho} & 0 & 0 & \sin\theta\,\dfrac{r^2+a^2}{\rho} \end{bmatrix}. \tag{6.1.24}$$

此时克尔-纽曼度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\omega_0^2 + \mathrm{d}\omega_1^2 + \mathrm{d}\omega_2^2 + \mathrm{d}\omega_3^2.$$

式中 $\mathrm{d}\omega^0 = \dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho}(\mathrm{d}t - a\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi),$

$$\mathrm{d}\omega^1 = \frac{\rho}{\Delta^{1/2}}\mathrm{d}r,$$

$$\mathrm{d}\omega^2 = \rho\mathrm{d}\theta,$$

$$\mathrm{d}\omega^3 = \sin\theta\cdot\frac{1}{\rho}[(r^2+a^2)\mathrm{d}\varphi - a\mathrm{d}t]. \tag{6.1.25}$$

由于 $\alpha = \rho^2\sin\theta$. $\alpha = |\alpha^\mu_\nu|$,

我们得到

$$(\alpha^\nu_\mu) = \begin{bmatrix} \dfrac{r^2+a^2}{\Delta^{1/2}\rho} & 0 & 0 & \dfrac{a\sin\theta}{\rho} \\ 0 & \dfrac{\Delta^{1/2}}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho} & 0 \\ \dfrac{a}{\Delta^{1/2}\rho} & & & \dfrac{1}{\rho\sin\theta} \end{bmatrix}, \tag{6.1.26}$$

于是在正交标架中有

$$F_{\mu\nu} = \alpha_\mu^\tau \alpha_\nu^\sigma F_{\tau\sigma}. \tag{6.1.27}$$

电场和磁场的分量分别为

$$E_1 = e\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta),$$

$$B_1 = e\rho^{-4} 2ar\cos\theta. \tag{6.1.28}$$

$$E_0 = E_2 = E_3 = B_0 = B_2 = B_3 = 0.$$

此式表明，电场和磁场互相平行，这是引入上述局部标架的结果.

在局部时空范围内，我们采用平直时空近似和均匀电磁场近似. 在这种近似条件下，海森伯和欧勒早就指出，波函数可以由分离变量法求得. 自旋为 1/2 的解具有形式

$$\varphi = e^{i(k_x x - \omega t)} u_n[(\varepsilon B)^{1/2}(y^2 + k_x/\varepsilon B)]\psi(z). \tag{6.1.29}$$

式中 u_n 为 n 阶谐振子的波函数，$\Psi(z)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\Psi}{\mathrm{d}\xi^2} + (\xi^2 - \lambda)\Psi = 0, \tag{6.1.30}$$

$$\xi = \pi\mu \frac{2}{\varepsilon E_1} + 2\pi\left(n + \frac{1}{2} + \sigma_1\right)\frac{B_1}{E_1}. \tag{6.1.31}$$

透射率

$$|T|^2 = e^{-\xi}, \tag{6.1.32}$$

在 $n=0$，$\sigma=-1/2$ 时最大，

$$u_n = N_n H_n(\alpha\xi)\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\xi^2\right). \tag{6.1.33}$$

$n=0$ 时，对应谐振子的基态或粒子只有沿 ω_1 方向的运动，$\sigma=-\frac{1}{2}$表示透射的费米子流是极化的，分支比

$$\frac{\Gamma_{-1/2}^2}{\Gamma_{1/2}^2} = \exp(-2\pi B_1/E_1).$$

自旋为 1/2 的费米子，所产生的总粒子对数为

$$N = \int\sqrt{g}\,\mathrm{d}^4x\,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon E_1}{\pi}\right)^2 \frac{\pi B_1/E_1}{\mathrm{th}(\pi B_1/E_1)}\exp(-\pi\mu^2/\varepsilon E_1). \tag{6.1.34}$$

式中

$$g = \rho^4\sin^2\theta. \tag{6.1.35}$$

§6.2 霍金辐射

霍金(1974)发现，黑洞像一个黑体一样，具有温度 $T_B=\frac{\hbar\kappa}{ck}$ 标志的热辐射. 霍金计算的是一颗坍缩的恒星正在形成黑洞时的量子效应. 后来人们进一步的研究发现，完成坍缩后的永久黑洞以及任何一个具有未来世界的静态或稳态时空都具有完全相同的霍金辐射.

下面就介绍霍金所做的推导.

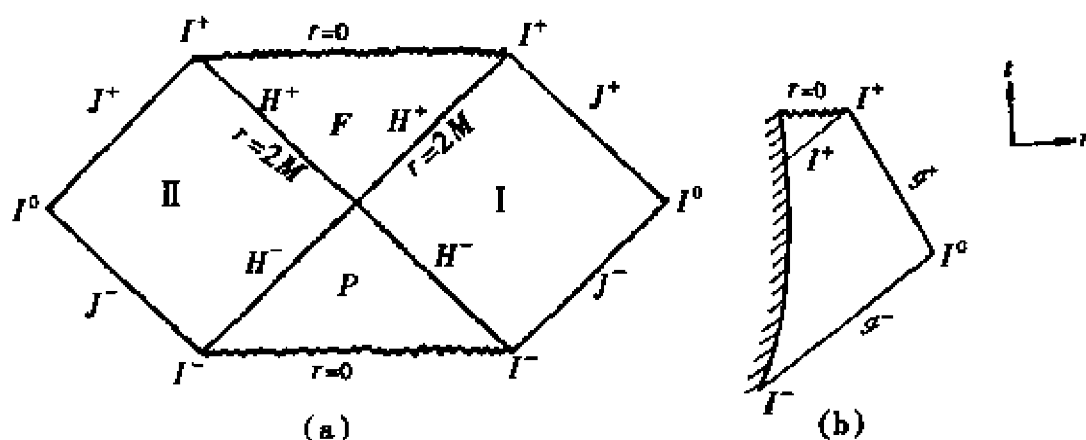


图 4-21

图 4-21(a)所示为一已完成坍缩的史瓦希黑洞的 Penrose 图，零无限远 J^+ 和 J^- 是渐近闵可夫斯基区. 对 I 区来说，可以选择 $J^-\cup I^-\cup H^-$ 为 Cauchy 面. 图 4-21(b)表示坍缩中的黑洞(史瓦希黑洞)，阴影部分为坍缩星体占据的部分. 此时 I 区的 Cauchy 面是 $I^-\cup J^-$，而 J^+ 和 J^- 仍为渐近闵可夫斯基区.

设 $\mathscr{I}^-$ 处($t=-\infty$, $r=+\infty$)的入射标量波的正，负频解为

$$f_{\omega lm}(r,\theta,\varphi,t),\ f^*_{\omega lm}(r,\theta,\varphi,t).$$

任一标量波函数可如下展开

$$\varphi(x)=\sum_{l}\sum_{m}\int d\omega(a_{\omega lm}f_{\omega lm}+a^+_{\omega lm}f^*_{\omega lm}). \tag{6.2.1}$$

入射真空 $|0\rangle_{in}$ 的定义为

$a_{\omega lm}|0\rangle_{in}=0$

$$\forall\ \omega,\ l,\ m, \tag{6.2.2}$$

在 $t=+\infty$ 时的出射标量波可在 $\mathscr{I}^+(t=+\infty,\ r=+\infty)$ 和 $H^+(t=+\infty,\ r=2m)$ 二处出现，故 $t=+\infty$ 时的正，负频解分别为

$(p_{\omega lm},\ p^*_{\omega lm})\mathscr{I}^-$ 处，$(q_{\omega lm},\ q^*_{\omega lm})H^+$ 处.

任一标量波函数可展开为

$$\varphi(x)=\sum_{l}\sum_{m}\int \mathrm{d}\omega\{b_{\omega lm}p_{\omega lm}+b^+_{\omega lm}p^*_{\omega lm}+c_{\omega lm}q_{\omega lm}+c^+_{\omega lm}p^*_{\omega lm}\}. \tag{6.2.3}$$

现在我们感兴趣的是要去计算正负频混合系数

$$\beta_{\omega lm;\omega' lm}=(p_{\omega lm},f^*_{\omega' lm}), \tag{6.2.4}$$

及入射真空中所含出射粒子数

$$\underset{in}{<}0|N^{out}_{\omega lm}|0\underset{in}{>}=\underset{in}{<}0|b^+_{\omega lm}b_{\omega lm}|0\underset{in}{>}=\int \mathrm{d}\omega'\,|\beta_{\omega lm;\omega' lm}|^2. \tag{6.2.5}$$

为了简单，我们讨论无质量标量粒子的产生.

坍缩星的终态对应的外部度规为史瓦希外部度规

$$\mathrm{d}s^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)\mathrm{d}t^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{6.2.6}$$

在无质量标量场的情况下，可以用分离变量法解克莱因-高登方程

$$\nabla_\mu\nabla^\mu\varphi=0. \tag{6.2.7}$$

令 $$\varphi(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)\sim r^{-1}R_\omega(r)Y_{lm}(\theta,\ \varphi)e^{-i\omega t}, \tag{6.2.8}$$

则得到径向方程

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^{*2}}R_\omega+\Big\{\omega^2-[l(l+1)r^{-2}+2mr^{-3}]\left[1-\frac{2m}{r}\right]\Big\}R_\omega=0, \tag{6.2.9}$$

$$r^*\equiv r+2m\ln\left|\frac{r}{2m}-1\right|, \tag{6.2.10}$$

为 Tortoise 坐标.

引入有效势

$$V \equiv [l(l+1)r^{-2} + 2mr^{-3}][1 - 2mr^{-1}],$$

$$H \equiv \omega^2,$$

则(6.2.9)可写为

$$\frac{d^2}{dr^{*2}}R_{\omega l} + (H - V)R_{\omega l} = 0. \tag{6.2.11}$$

当 $r \to \infty (r^* \to \infty)$ 时，$v \to 0$，于是得到解

$$p_{\omega lm} = r^{-1}\exp(-i\omega u)Y_{lm} \quad \text{出射波}, \tag{6.2.12}$$

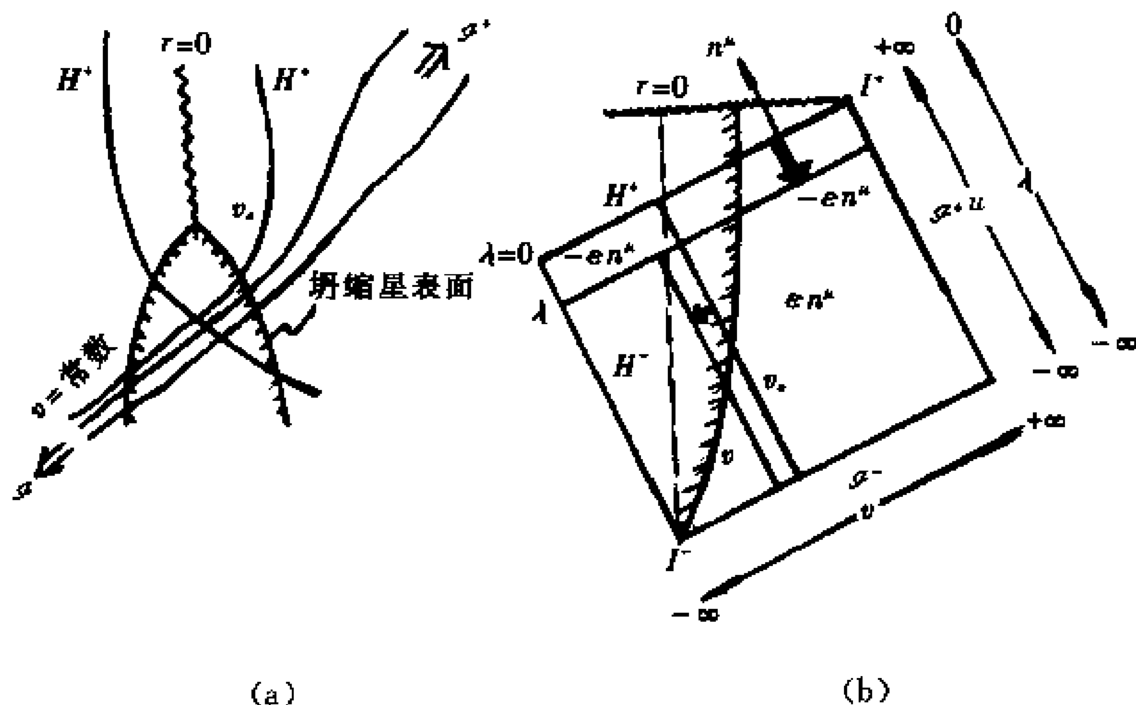
$$f_{\omega lm} = r^{-1}\exp(-i\omega v)Y_{lm} \quad \text{入射波}. \tag{6.2.13}$$

式中 $u = t - r^*$，$v = t + r^*$

为双零(类光)坐标．在这一坐标系中，史瓦希度规具有形式

$$ds^2 = (1 - 2mr^{-1})dudv - r^2 d\Omega^2. \tag{6.2.14}$$

从 $\mathscr{I}^-$ 来的入射波 $f_{\omega lm}$ 沿着零短程线 $v = \text{const}$ 传播，经过坍缩星中心，然后“反射”，沿着 $u = \text{const}$ 到达 $\mathscr{I}^+$，变成出射波 $p_{\omega lm}$(如图 4-22)．



(a)　　　　(b)

图 4-22

由于星体的塌缩将引起出射波有一甚大的红移，因此入射波 $f_{\omega' lm}$ 应有一甚高的频率 ω'，这样我们就可采用几何光学近似以讨

论上述“反射”过程.

现在我们希望找出函数关系

$$u=u(v).$$

令 $v=v_0$ 是投射在塌缩星上而变为 H^+ 的入射线路径，显然所有晚于 $v_0(v>v_0)$ 的入射线都不可能被“反射”出来，只有早于 $v_0(v<v_0)$ 的入射线才可能被“反射”以形成出射线. 在 H^+ 某点作一指向未来的零矢 n^μ，设 $-\epsilon n^\mu$（ϵ 是一小正数）是连接此点与一大 u 值的邻近世界线的矢量，划出完整的 Penrose 图，把矢量 $-\epsilon n^\mu$ 沿 H^+ 平行移位到 H^+ 与 H^- 的交点处，此时矢量 $-\epsilon n^\mu$ 整个在 H^- 上，取 $\lambda=-ce^{-\kappa u}\left(c>0,\ \kappa=\dfrac{1}{4m}\right)$ 为 H^- 上的母线的仿射参量，在交点引入该点的局部惯性系，则在交点，$\lambda=0$，$\mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\lambda=n^\mu$，

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\lambda^2}=\frac{\mathrm{d}n^\mu}{\mathrm{d}\lambda}=0.$$

这表明，在 $\lambda=0$ 的领域，n^μ 是一个常矢量，因而 H^- 上矢量 $-\epsilon n^\mu$ 的长度即

$$-\epsilon n^\mu=\int_0^\lambda\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda=n^\mu\cdot\lambda=x^\mu(\lambda)-x^\mu(0).$$

由此得 $\quad \epsilon=ce^{-\kappa u}$.

现在把矢量 $-\epsilon n^\mu$ 移回原位置，然后把它平移到 H^+ 与 v_0 的交点再沿 v_0 平移到极早时的大 r 处，由于平移时矢量与短程线间的角度不变，所以矢量 $-\epsilon n^\mu$ 将如图所示把 v_0 与某个 v 联结起来，即

$$v-v_0=-\epsilon n^\mu.$$

在 $r=+\infty$，时空平直，光线的切矢 $n^\mu=\dfrac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}$ 为一常数 D，即

$$v-v_0=-\epsilon D=-cDe^{-\kappa u}.$$

故

$$u=u(v)=-4m\ln\left[\frac{v_0-v}{cD}\right]. \tag{6.2.15}$$

可把出射波

$$p_{\omega lm}=N\omega^{-1/2}r^{-1}\exp(-i\omega u)Y_{lm}$$

改写为

$$p_{\omega lm}=N\omega^{-1/2}r^{-1}\exp\left[i4m\omega\ln\left(\frac{v_0-v}{cD}\right)\right]Y_{lm},$$
$$N=2^{-3/2}\cdot\pi^{-1}(v<v_0),$$
$$N=0(v>v_0).$$

由
$$P_{\omega lm}=\int d\omega'\left[\alpha_{\omega lm;\omega' lm}f_{\omega' lm}+\beta_{\omega lm;\omega' lm}f^{*}_{\omega' lm}\right]$$

可得
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dve^{i\omega' v}P_{\omega lm}=N\omega'^{-1/2}r^{-1}Y_{lm}\alpha_{\omega lm;\omega' lm},$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dve^{-i\omega' v}P_{\omega lm}=N\omega'^{-1/2}r^{-1}Y_{lm}\beta_{\omega lm;\omega' lm}.$$

故
$$\alpha_{\omega lm;\omega' lm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}dv\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}e^{i\omega' v}\exp\left[i4m\omega\ln\frac{v_0-v}{cD}\right],\tag{6.2.16}$$

$$\beta_{\omega lm;\omega' lm}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{v_0}dv\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}e^{-i\omega' v}\exp\left[i4m\omega\ln\frac{v_0-v}{cD}\right].\tag{6.2.17}$$

显然

$$\beta_{\omega\omega'}=-i\alpha_{\omega(-\omega')}\tag{6.2.18}$$

成立，$\alpha_{\omega(-\omega')}$ 可看作是把 $\alpha_{\omega\omega'}$ 延拓到负 ω' 轴上的结果，但

$$\alpha_{\omega\omega'}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{v_0}dv\,e^{i\omega' v}\left(\frac{v_0-v}{cD}\right)^{i\frac{\omega}{\kappa}}=$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{cD}\right)^{i\frac{\omega}{\chi}}\int_{-\infty}^{v_0}dve^{i\omega' v}\left(1-\frac{v}{v_0}\right)^{i\frac{\omega}{\kappa}}=$$
$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2}\left(\frac{v_0}{cD}\right)^{i\frac{\omega}{\chi}}2\pi(-\omega')^{-i\frac{\omega}{\kappa}-1}\cdot e^{\omega}/\Gamma\left(-i\frac{\omega}{\kappa}\right).\tag{6.2.19}$$

注意，为了使积分收敛，我们进行了代换

$$\omega'\to\omega'-i\epsilon.$$

$\omega'=0$ 是一个奇点，为了把 ω' 从正值解析延拓到负值，我们必须沿下半复 ω' 平面内的半圆周延拓过去，即

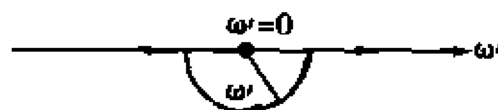


图 4-23

$$\omega' \to \omega' e^{-i\pi},$$

故 $$\alpha_{\omega(-\omega')} = -i(e^{-i\pi})^{-i\frac{\omega}{\kappa}-1}\alpha_{\omega\omega'} = ie^{-\pi\frac{\omega}{\kappa}}\alpha_{\omega\omega'}, \qquad (6.2.20)$$

$$\beta^*_{\omega\omega'}\beta_{\omega\omega'} = e^{-2\pi\frac{\omega}{\kappa}}\alpha^*_{\omega\omega'}\alpha_{\omega\omega'}.$$

由 $$(p_\omega p_\omega) = 1$$

得 $$\int d\omega' [(\alpha^*\alpha)_{\omega\omega'} - (\beta^*\beta)_{\omega\omega'}] = 1.$$

即 $$\langle N_{\omega lm}\rangle = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2 = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{kT}} - 1}. \qquad (6.2.21)$$

式中 $$T = \frac{\kappa}{2\pi k}\left(\frac{h\kappa}{2\pi kc}\right).$$

此即著名的霍金辐射公式.

在一般情况下可以证明，任一具有未来视界的静态或稳态时空均具有霍金热辐射.

霍金辐射的发现，不仅解决了黑洞热力学中存在的矛盾，而且揭示了引力理论、热力学和量子理论之间的联系.

当黑洞温度总比周围环境的温度高时，黑洞将不断向外辐射，失去其质量，最后可能“爆炸”，消失. 下面我们就来讨论黑洞的寿命.

由于霍金公式和普朗克公式相似，故可利用斯特藩-玻尔兹曼公式估算黑洞的放能率和寿命.

根据斯特藩定律，我们有

$$\frac{dE}{dt dA} = \sigma T^4,\ \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15\hbar^3 c^2},$$

$$A = 16\pi G^2 c^{-4} M^2.$$

由此得到放能率

$$\frac{dE}{dt} \simeq 10^{46}(M^{-2}) \cdot \Gamma \mathrm{erg/s}. \qquad (6.2.22)$$

式中 Γ 为势垒穿透率，可近似地取为 1.

质量为 M 的黑洞，其寿命为

$$\tau \simeq 10^{-27} M^3 \mathrm{s} \simeq 10^{10}\left[\frac{M}{M_\odot}\right]^3 (年). \qquad (6.2.23)$$

若设 $M = M_\odot$，$T \simeq 10^{-6}\mathrm{K}$，放能率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \simeq 10^{-20}\mathrm{erg/s},$$

寿命为 $\tau \simeq 10^{68}$ 年.

如果按这样的速度减少质量，这样的恒星在宇宙诞生至今这么长时间里质量只减少 $10^{-22}g$. 这是完全可以忽略不计的.

如果设 $M < 10^{15}\mathrm{g}$(微黑洞)，比如设

$$M = 3 \times 10^{9}\mathrm{g} \simeq 3000T,$$

$$T \simeq 10^{18}\mathrm{K},$$

则放能率为

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \simeq 10^{29}\mathrm{erg/s} = 10^{22}\mathrm{W},$$

寿命 $\tau \simeq 10^{-1}\mathrm{s}$.

对于 $M \simeq 10^{15}\mathrm{g}$ 的所谓原初小黑洞，有

$$T \simeq 10^{12}\mathrm{K},$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \simeq 10^{16}\mathrm{erg/s} \simeq 10^{9}\mathrm{W},$$

$$\tau \simeq 10^{10}\text{ 年}. \tag{6.2.24}$$

由于宇宙极早期物质密度的涨落，有可能形成原初小黑洞和微黑洞. 如果确有许多这类小黑洞，由(6.2.24)可知，目前应能观测到它们的晚期爆炸(死亡).

参 考 文 献

[1] Balbinot,R. Rhys. Rev., 1986, D(33):1611

[2] Balbinot R. Barletta A. Class. Quantum Grav., 1989(6):195

[3] Cheng Su-jun et al. Acta Physica Sinica, 1998 (47):168(in Chinese)

[4] Damour T. and Ruffini R. phys. Kev. 1976, D(14):332

[5] Dai Xian-xin et al Acta Physica Sinica, 1992(4):188(in Chinese)

[6] Gibbons G W. and Hawking S W. Phys Rev. 1977, D(15):2738

[7] Hawking S W. Nature, 1974 (30): 248; Commun. Math. Phys. 1975 (43):199

[8] Hiscock W A. Phys. Rev, 1981, D(23):2813

[9] Ji-liang Jing, Yong-jiu Wang, International Journal of Theoretical Physics. 1996(35):1481

[10] Jing Ji-liang, Yu Hong-wei, Wang Yong-jiu, Chin. Phys Lett, 1992(9):113

[11] Kokkotas K D. Gen. Rel Grav., 1988(2):829

[12] Krori, K D. Barua M. Phys. Rev., 1987, D(35)1171

[13] Kulkarni, R. Dadhich, N. Phys. Rev, 1986, D(33):2780

[14] 刘辽. 广义相对论. 北京：高等教育出版社，1987，第八章

[15] 刘辽，物理学报，1982(31):519

[16] 刘辽，赵峥. 科学通报. 1981(26):1253

[17] Li Lixin, Liu Liao. Phys Rev, 1992, D(46):3296

[18] 罗新炼，王永久. 科学通报，1997(42):599

[19] 罗新炼，王永久，物理学报，1997(4)

[20] 吕君丽，王永久. 物理学报，1999(3)

[21] 罗志强，赵峥. 物理学报，1993(3)

[22] Mallett, R L. Phys. Rev, 1986, D(33):2021

[23] 孙鸣超等. 物理学报，1995(7)

[24] Sannan S. Gen Rel. Grav, 1988(20):239

[25] 强稳朝. 物理学报，1992(12);1992(7)

[26] Sharp, N A. Can. J. Phys, 1981(59):688

[27] Sen A. Phys. Rev Lett, (1992)(69):1006

[28] Smarr L. Phys. Rev, 1973, D(7):289

[29] 沈有根，王永久，俞大为. 天体物理学报，1988(8):235

[30] 沈有根，陈大明. 天文学报，1999 40(2)

[31] Unruh W G. Phys. Rev. D, 1974(10):3194

[32] Wang Yongcheng. Scieniia Sinica(Series A), 1983(26):1062

[33] 王永久，唐智明. 中国科学，1986，A(5):525

[34] 王永久，彭秋和. 中国科学，1984，A(10)

[35] 王永久，物理学报，1984(33):1728

[36] 王永久，唐智明，引力理论和引力效应，湖南科学技术出版社，1990；第五篇

[37] Wang Yong-jiu, Lu Mao-wang. Chin. Phys. Lett, 1999(16)162；余洪伟，王永久. 中国科学，1991 A(10)

[38] 唐智明，王永久．物理学报，1999(4)
[39] 王永久，空间时间和引力．长沙：湖南教育出版社，1992：第五章
[40] Wild W J，Kerns R M. Phys. Rev，1980，D(21)：332
[41] Wild W J，Kerns R M，Drish W F. Phys. Rev，D23(1981)，D(23)：829
[42] 许殿彦．物理学报，33 卷，1984，33(126)；许殿彦．物理学报，1983，32(225)
[43] 许殿彦．物理学报 32 卷，1983，32(225)；1981(5)
[44] 许殿彦．科学通报，1983，28(651)
[45] 许殿彦．北京大学学报(自然科学版)，1983(2)：57；1985(5)：63
[46] 约翰-皮尔·卢米涅著．1998．黑洞．卢炬甫译，长沙：湖南科学技术出版社
[47] 闫荣义等．中国科学，A27(1997)，A27(11)：624
[48] 杨波，赵峥．物理学报，1994(5)
[49] York J W. Jr Quantum Theory of Gravity，ed. by S. Christenses. 1984，135；Phys. Rev. D33 1986，D(33)：2092
[50] Hongwei Y. Phys. Lett，1995，A(209)：6
[51] 赵峥，中国科学，1993，A(23)：178
[52] Zhao Zheng and Dai Xianxin. Chinese Phys. Lett，1991(8)：548
[53] Zhao Zheng and Dai Xianxin. Mod Phys. Lett，1992，A(7)1771
[54] 罗智坚，朱建阳．物理学报，1999 年(3)
[55] Frolov VP，Fursaev DV，Zelnikov A I. Phys. Rev，D54 1996，D(54)：2711；Phys，Rev，1993，D(48)：4545
[56] Valeri P，Frolov，et al. Phys. Rev，1996，D(54)：2732
[57] Mann R B，et al. Phys. Rev，1996 D(54)：3932
[58] de Alwis S P，Ohta N. Phys. Rev，1995，D(52)：3529
[59] Hartle B，Hawking SW. Phys. Rev，1976，D(13)：2188
[60] t'Hooft G. Nucl. Phys，1985，B(256)：727
[61] t'Hooft. G. Nucl. Phys，1985，B(256)：727
[62] Mann R B，Tarasov L and Zelnikov A. Class. Quantum Grav，1992 (9)：1487
[63] Ghosh A and Mitra P. Phys. Rev. Lett，1994(73)：2521
[64] Kabat D. and Strassler M J. Phys. Lett. 1994，B(46)：329

[65] Barbon J L F. and Emparan R. Phys. Rev, 1995, D(52):4527

[66] Susskind L. and Uglum J. Phys. Rev, 1994, D(50):2700

[67] Demers J-G, Lafrance R and Myers R C. Phys. Rev, 1995, D(52):2245

[68] Dowker. J S. J. Phys, 1977, A(10):115

[69] Deser S. and Jackiw R. Commun. Math, Phys, 1988(118):495

[70] Fursaev. D V. Class. Quantum Grav, 1994(11):1431

[71] Cognola G, Kirsten K and Vanzo. L. Phys. Rev, D49, 1029 1994, D(49):1029

[72] Zurek W H. and Thorne. K S. Phys. Rev. Lett, 54, 2171 1985(54):2171

[73] Thorne K S. Price R H. and Macdonald D A. Black Holes: The Membrane Paradigm. 1986

[74] Brown J D. and York J W. Phys. Rev, 1993, D(47):1407

[75] Frolov. V P. Phys Rev. Lett, 1995(74):3319

[76] Holzey. C H, Larsen F and Wilczek F. Nucl. Phys, 1994, B(424):443

[77] Dowker J S. and Schofield J P. J. Math. Phys, 1990(31):808

[78] Dowker J S. and Kennedy. G. J. Phys, 1978, A(11):895

[79] Allen. B. Phys. Rev, 1986, D(33):3640

[80] Zaslavski O. Phys. Rev, 1996, D(53):4691(1996)

[81] Frolov. V P. Phys. Rev, 1992, D(46):5383

[82] Mann R B. Shiekh. A. and Tarasov. L. Nucl. Phys, 1992, B(341):134

[83] Polyakov, A M. Phys. Lett, 1981, B(103):207

[84] Dowker. J S. Class. Quantum Grav, 1994, L(7):11

[85] Solodukhin S N. Phys. Rev, 1995, D(51):609

[86] Frolov V P. and Zelnikov A I. in Quantum Gravity:Proceedings of the Fourth Seminar on Quantum Gravity. Moscow, 1987

[87] Myers R C. Phys. Rev, 1994, D(50):6412

[88] Fursaev D V. Phys. Rev, 1995, D(51):5352

[89] Hawking S W. and Horowitz G T. "The gravitational Hamiltonian, action, entropy and surface terms". Report No. DAMTP-R-94-52, 1950.

[90] Birrell N D. and Davies P C W. Quantum Fields in Curved Space.

Cambrıdge Unıversıty Press Cambrıdge England, 1982

[91] Fursaev D V. and Solodukhın S N. Phys. Lett, 1996, B(365):51

[92] de Alwıs S P. Phys. Rev, 1995, D(52):727

[93] Brıll D R. et al. Phys. Rev, 1972, (D)10:1913

[94] Ktarobınskı A A JETP, 1973(64):48

[95] Ford L H. Phys. Rev, 1975, D(12):2963

[96] Dokos C P & Tomaras T N. Phys. Rev, 1980, D(21):2940

[97] Bowıck M J. Phys. Rev. Lett, 1988(61):2823

[98] Jıng Jı-lıang. Wang Yong-Jıu. Il Nuovo Cımento B, 1995(110):207

[99] Jıng Jı-lıang. Wang Yong-jıu. Nuclear Physıcs, 1996, B(476):548

[100] Jıng Jı-lıang. Wang Yong-jıu. Inter. Theor. Phys, 1997(36):1745; Chın. Phys. Lett, 1997(14):81; ıbıd, 1997(14):495; Inter. Theor Phys, 1998(37):1441; ıbıd. IL Nuovo cımento, 1998, B(117):1075; ıbıd, Chın. Phys. Lett, 1998(15):240; ıbıd, Chın Phys. Lett, 39(2)(1994), 39(2):104; IL Nuovo Cımento B, 1994, B(109):917; Phys. Lett, 1994, A(187):31

第5篇　广义相对论宇宙学

在迄今为止人们所知道的各种力中，引力是惟一不可屏蔽的长程力．对于分布于大范围空-时中的大量物质和空-时本身，引力应是起决定作用的力．因此，引力决定宇宙动力学，从而决定宇宙的演化；任何定量的宇宙学理论必须以引力理论为基础．

每种引力理论都有相应的模型，如标量引力理论，FSG 理论等等．本篇只研究建立在爱因斯坦引力理论基础上的宇宙模型．

1 宇宙学原理和Robertson-Walker度规

宇宙学是论述整个宇宙的，而人类对宇宙的观测只涉及到宇宙的一小部分.对这一小部分的观测又只有很短的历史.对行星系的观测有几千年，对其他星系的观测只有100年.尽管如此，人们以观测资料为基础，根据爱因斯坦的引力理论，已构成一幅宇宙演化的图像.可以证明，这一图像是自洽的，与至今为止的观测资料相符合.按照下面要介绍的宇宙学原理，人们没有必要知道尚未观测到的空间区域的任何情况.

§1.1 宇宙学原理

按照现代的观测技术，可观测区域已扩展到3×10^9光年.为了以这一观测区域的信息为基础来研究宇宙的总体结构，需要有一些假设.在可观测到的区域内发现，在宇观尺度上，星系分布、射电源数目和微波背景辐射等等基本上都是均匀的、各向同性的.人们假设:在宇观尺度上，任何时刻三维宇宙空间是均匀的和各向同性的.这就是**宇宙学原理**.根据这一原理，宇宙中一切位置都是等同的.这样一来，在宇宙中没有优越的位置和优越的方向，当然也就没有必要知道尚未观测到的区域的情况.宇宙中每一个星系或者星系团都是构成宇宙的平等元素.根据宇宙学原理，宇宙中任一点和任一方向都不可能用任一物理量的不同来区分.但是同一点的物理量在不同时刻却可以有不同的值.所以宇宙学原理允许宇宙随时间变化.为了研究宇宙随时间的变化，不同位置的观察者之间要能够比较他们的观测结果，于是就必须有

一共同的时间标准，这一时间称为**宇宙时**．宇宙时的存在也是宇宙学原理成立的前提．

§1.2 Robertson-Walker 度规

宇宙学原理用几何术语表述为：三维空间应是具有最大对称性的空间，即一个具有常曲率但曲率可以随时间变化的空间．根据〔36〕中第二篇的讨论，满足上述要求的四维空-时一定是 Robertson-Walker 度规：

$$ds^2=dt^2-R^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \quad (1.2.1)$$

因此，这个均匀宇宙模型的度规实际上已经由对称性要求所确定．式中 $R(t)$ 是时间的未知函数，k 是一个常数，适当选择 r 的单位，可以使 k 取值 $+1$，0 或 -1．爱因斯坦引力场方程则作为宇宙动力学方程，确定宇宙的时间行为（宇宙的演化），即确定函数 $R=R(t)$，并确定局部空间性质即 k 的值．这些问题将在第二章中讨论．

引入变换，令

$$r=\bar{r}\left(1+\frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^{-1}, \quad (1.2.2)$$

可将(1.2.1)改写为

$$ds^2=dt^2-\frac{R^2(t)}{(1+k\bar{r}^2/4)^2}[d\bar{r}^2+\bar{r}^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (1.2.3)$$

再作一次变换，令

$$\bar{R}^2(t)=R^2(t)\left(1+\frac{1}{4}k\bar{r}^2\right)^{-2},$$

$$d\bar{t}=\frac{dt}{\bar{R}(t)}. \quad (1.2.4)$$

(1.2.3)化为

$$ds^2=\bar{R}^2(t)[d\bar{t}^2-d\bar{r}^2-\bar{r}^2(d\theta^2+\sin\theta d\varphi^2)]=\bar{R}^2(t)d\bar{s}^2. \quad (1.2.5)$$

式中 $d\bar{s}^2=d\bar{t}^2-d\bar{r}^2-r^2(d\theta^2+\sin\theta d\varphi^2)$为平直空-时度规. 由此可知，R-W 空-时和闵可夫斯基空-时是共形的，即 R-W 空-时是共形平直的.

如果引入记号

$$f(\chi)=r=\begin{cases}\sin\chi, & 当\ k=+1;\\ \chi, & 当\ k=0;\\ \mathrm{sh}\chi, & 当\ k=-1.\end{cases} \tag{1.2.6}$$

则 R-W 度规(1.2.1)可改写为

$$ds^2=dt^2-R^2(t)[d\chi^2+f^2(\chi)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)]. \tag{1.2.7}$$

式(1.2.7)、(1.2.3)和(1.2.1)是 R-W 度规的三种不同形式.

在(1.2.1)中，$R(t)$称为**宇宙半径(或宇宙标度因子)**，k 标志**空-时曲率**. $k=+1$, 0, -1，分别对应于子空间 M 的曲率 $K>0$, $K=0$, $K<0$. 在(1.2.1)中作一代换，令 $\sqrt{k}\,r=\bar{r}$(当 $k>0$)，得

$$ds^2=dt^2-\frac{R^2(t)}{k}\left[\frac{d\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2}+\bar{r}^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \tag{1.2.8}$$

空间部分可表示为

$$ds^2_{(3)}=\frac{R^2(t)}{k}\left[\frac{d\bar{r}^2}{1-\bar{r}^2}+\bar{r}^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \tag{1.2.9}$$

由此可得 $K_{(3)}=k/R^2(t)$. (1.2.10)

三维平直空间 $d\sigma^2=\delta_{ij}dx^i dx^j$ 中的二维曲面 $\delta_{ij}x^i x^j=\frac{1}{K}=R$ 就是一个曲率为 K 的常曲率空间. 图 5-1 是三种情况的示意图.

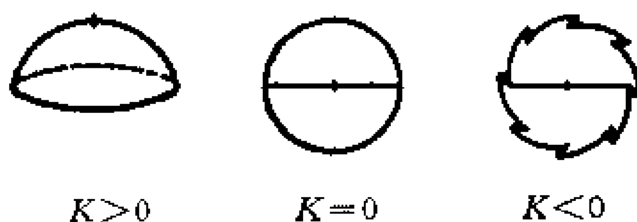


图 5-1

曲率为 K 的三维常曲率空间可以看作包容于四维平直空间的子空间 M.

§1.3 空间距离和曲率

1. 固有空间距离

对于 R-W 度规(1.2.1)，由坐标时与标准时的关系 $\mathrm{d}\tau=\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}t$，可得

$$\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t. \tag{1.3.1}$$

所以在 R-W 空-时中，坐标时即标准时，也就是本章开头提到的宇宙时. 按照所选用的单位，$c=G=1$，我们有 $\mathrm{d}s=\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t$.

考虑任意二恒星 A 和 B，选择坐标轴的方向，使 r 轴通过 AB，则 A 和 B 的空间距离为

$$l=\int_A^B \mathrm{d}l=\int_A^B\sqrt{r_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}=\int_{r_A}^{r_B}\sqrt{-g_{11}}\mathrm{d}r=R(t)\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{1.3.2}$$

如果 r_A 和 r_B 固连，则上式表明，当 $R(t)$是时间 t 的增函数时，任意二恒星间的空间距离都随时间增大，即宇宙是膨胀的；当 $R(t)$ 是时间 t 的减函数时，任意二恒星的空间距离都随时间减小，宇宙是收缩的；当 $R(t)$为常数时，宇宙是静态的.

2. 空间的曲率

我们讨论 $k>0$，$k=0$ 和 $k<0$ 的三种宇宙空间.

(1) $k>0$ 的宇宙空间. 在 $k>0$ 的情况下，积分(1.3.2)给出

$$l=\frac{R(t)}{\sqrt{k}}[\arcsin(\sqrt{k}\,r_B)-\arcsin(\sqrt{k}\,r_A)]. \tag{1.3.3}$$

上式表明，$\sqrt{k}\,r_B\leqslant 1$、$\sqrt{k}\,r_A\leqslant 1$，$l\leqslant\frac{\pi R(t)}{\sqrt{k}}$. 即任意时刻、任意两颗恒星(空间任意两点)间的距离都是有限的. 也就是说，在任何给定的时刻，宇宙空间中不存在相距无限远的两个点.

设 $r_A=0$，由 $(r_B)_{\max}=\frac{1}{\sqrt{k}}$可以算出宇宙空间的体积：

$$V=\int\sqrt{-g}\mathrm{d}^3x=\int_0^{1/\sqrt{k}}\sqrt{-g}r^2\mathrm{d}r\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=$$

$$4\pi R^3(t)\int_0^{1/\sqrt{k}}\frac{r^2\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}}=\pi^2R^3(t)k^{-3/2}.\quad(1.3.4)$$

任何时刻宇宙空间的体积都是有限的．所以，$k>0$ 的宇宙空间是有限的．

(2) $k<0$ 的宇宙空间．此时积分(1.3.2)给出

$$l=\frac{R(t)}{\sqrt{k}}\ln\frac{\sqrt{-k}r_B+\sqrt{1-kr_B^2}}{\sqrt{-k}r_A+\sqrt{1-kr_A^2}}.\quad(1.3.5)$$

上式表明，任一时刻 AB 间的距离没有上限．所以 $k<0$ 的宇宙空间是无限的．

(3) $k=0$ 的宇宙空间．此时，积分(1.3.2)给出

$$l=R(t)r.\quad(1.3.6)$$

显然，$k=0$ 的宇宙空间也是无限的．

§1.4 粒子和光子的行为

现在我们讨论粒子(质点)和光子在 R-W 空-时中的运动，采用(1.2.7)．在(1.2.7)的坐标系中，一个静止的恒星相对于原点的固有(纯空间)位移 D 由式

$$D=\sqrt{-g_{11}}\chi=R(t)\chi\quad(1.4.1)$$

确定．如果宇宙半径 R 随时间变化，则恒星之间以及星系之间的距离也将随时间变化；好像球面上两个固定点之间的距离(沿球面上的短程线)随着球半径的变化而变化一样．由此产生的速度 $\dot{D}$ 和位移 D 成正比：

$$\dot{D}=\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\dot{R}}{R}D.\quad(1.4.2)$$

适当选择坐标轴的方向，使一个自由运动的试验粒子沿一条径向轨道〔$\chi=\chi(s)$，$\theta=$常数，$\varphi=$常数〕运动．这时粒子的世界线是度规

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)d\chi^2 \tag{1.4.3}$$

的短程线. 由短程线方程可以得到守恒定律:

$$R^2(t) = \frac{d\chi}{ds} = \frac{R^2}{\sqrt{1 - R^2\left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2}}\frac{d\chi}{dt} = \text{const.} \tag{1.4.4}$$

设粒子的静止质量为 m_0, 用 v 表示速度 $R\frac{d\chi}{dt}$, 用 p 表示动量 $mv = m_0 v / \sqrt{1 - v^2}$, 则守恒定律(1.4.4)在三维空间具有形式

$$pR = \text{const.} \tag{1.4.5}$$

上式表明, 对于自由运动的粒子, 其动量和宇宙半径的乘积等于常数.

对于光子, 人们期望得到一个类似的结果, 即光子的波长或频率和宇宙半径的关系.

和导出(1.3.2)的情况一样, 设 AB 两点沿坐标 r 的方向. A 点有一光源, 于 $t = t_A$ 时刻发出一波面, 传播到 B 点的时刻为 t_B. 将 $ds = d\theta = d\varphi = 0$ 代入度规(1.2.1)得

$$dt^2 - R^2(t)\frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0, \tag{1.4.6a}$$

分离变量并积分, 得到

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R(t)} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{1.4.6b}$$

另一波面于 $(t_A + \Delta t_A)$ 时刻自 A 点发出, 于 $(t_B + \Delta t_B)$ 时刻到达 B 点. 同理可得

$$\int_{t_A + \Delta t_A}^{t_B - \Delta t_B} \frac{dt}{R(t)} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \tag{1.4.7}$$

假设在上述过程中 r_A 和 r_B 都保持不变. 两式相减, 得到

$$\int_{t_A + \Delta t_A}^{t_B + \Delta t_B} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R(t)} = 0,$$

即

$$\left(\int_{t_A + \Delta t_A}^{t_A} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_A}^{t_B - \Delta t_B} \frac{dt}{R(t)}\right) -$$

$$\left(\int_{t_A}^{t_B + \Delta t_B} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_B - \Delta t_B}^{t_B} \frac{dt}{R(t)}\right) = 0,$$

$$\int_{t_A}^{t_A+\Delta t_A}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=\int_{t_B}^{t_B+\Delta t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}.$$

根据积分中值定理，有

$$\frac{\Delta t_A}{R(\bar{t}_A)}=\frac{\Delta t_B}{R(\bar{t}_B)}. \tag{1.4.8}$$

式中 $t_A\leqslant\bar{t}_A\leqslant t_A+\Delta t_A$，$t_B\leqslant\bar{t}_B\leqslant t_B+\Delta t_B$. 考虑无限近的两个波面，即 $\Delta t_A\to 0$，$\Delta t_B\to 0$，我们有

$$\frac{\Delta t_A}{R(t_A)}=\frac{\Delta t_B}{R(t_B)}\text{（当 }\Delta t_A\to 0\text{，}\Delta t_B\to 0\text{）}.$$

由此得 $$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}=\frac{\nu_A}{\nu_B}=\frac{\lambda_B}{\lambda_A}=\frac{R(t_B)}{R(t_A)}, \tag{1.4.9a}$$

或 $$\nu R=\text{const}. \tag{1.4.9b}$$

由(1.4.9a)可以得到红移 z 的表达式：

$$z\equiv\frac{\lambda_B-\lambda_A}{\lambda_A}=\frac{R(t_B)}{R(t_A)}-1. \tag{1.4.9c}$$

当 $R(t_B)>R(t_A)$（宇宙膨胀）时，$z>0$（红移）；当 $R(t_B)<R(t_A)$（宇宙收缩）时，$z<0$（紫移）；当 $R(t_B)=R(t_A)$（宇宙为静态）时，$z=0$（无频移）.

如果在比较短的时间$(t-t_A)$内 $R(t)$的变化比较小，可将 $R(t)$展开为$(t-t_A)$的泰勒级数并取其前几项. 展开式为

$$R(t)=R(t_A)+\dot{R}(t_A)(t-t_A)+\frac{1}{2}R(t_A)(t-t_A)^2+\cdots\equiv$$

$$R(t_A)\left[1+H(t-t_A)-\frac{1}{2}qH^2(t-t_A)^2+\cdots\right]. \tag{1.4.10}$$

式中 $$H(t_A)\equiv\dot{R}(t_A)/R(t_A) \tag{1.4.11}$$

称为**哈勃(Hubble)常数**；

$$q(t_A)\equiv-\frac{R(t_A)R(t_A)}{R^2(t_A)}, \tag{1.4.12}$$

称为**减速因子**.

将(1.4.10)代入(1.4.9.c)，得到红移 z 和光的传播时间的关系：

$$z=H(t_A-t_B)+\left(1+\frac{q}{2}\right)H^2(t_A-t_B)^2+\cdots \tag{1.4.13}$$

通常，用红移与光源距离的关系来检验 R-W 度规用于宇宙模型的正确性. 在一级近似下，将(1.4.10)代人(1.4.3)($\mathrm{d}s=0$)，积分得

$$\chi=\int_{t_A}^{t_B}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}\approx\frac{t_B-t_A}{R(t_B)}+\frac{H(t_B-t_A)^2}{2R(t_B)}+\cdots \tag{1.4.14}$$

应用(1.4.1)和(1.4.2)，得到

$$z=HD+\frac{1}{2}(q+1)H^2D^2+\cdots=D+\frac{1}{2}(D+DD)+\cdots. \tag{1.4.15}$$

上式表明，在一级近似下红移正比于光源与观察者的固有距离，或正比于光源速度 $\dot{D}$ 与光速($c=1$)的比值. 这就是**哈勃定律**. 这一定律是哈勃(1929)在总结大量观测资料的基础上发现的，它表明宇宙中任何两颗恒星(或星系)都在相互退行，即**宇宙在膨胀**.

2 宇宙动力学

要确定宇宙的演化，就必须确定 R-W 度规中的宇宙半径的函数形式 $R=R(t)$和标志曲率的参量 k. 宇宙动力学的任务是根据宇宙物质的性质和爱因斯坦引力场方程计算这两个量.

§2.1 爱因斯坦场方程

理想流体的爱因斯坦场方程具有形式

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R+g_{\mu\nu}\lambda=8\pi T_{\mu\nu},$$

$$T_{\mu\nu}=(\rho+p)u_\mu u_\nu-pg_{\mu\nu}, \tag{2.1.1}$$

在随动系中，$u_\mu=\delta^0_\mu$，对于均匀宇宙，ρ 和 p 只是时间 t 的函数. 由 R-W 度规可得

$$g_{00}=1,\ g_{0i}=0,\ g_{11}=-\frac{R^2(t)}{1-kr^2},$$

$$g_{22}=-r^2R^2(t),\ g_{33}=-r^2R^2(t)\sin^2\theta; \tag{2.1.2}$$

$$R_{00}=-3\ddot{R}/R,\ R_{0i}=0,$$

$$R_{ij}=(R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k)g_{ij}/R^2. \tag{2.1.3}$$

注意到 $u_\mu=\delta^0_\mu$，我们有

$$S_{\mu\nu}\equiv T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}T=\frac{1}{2}(\rho-p)g_{\mu\nu}+(\rho+p)u_\mu u_\nu,$$

$$S_{00}=\frac{1}{2}(\rho+3p),\quad S_{0i}=0,$$

$$S_{ij}=\frac{1}{2}(\rho-p)g_{ij}. \tag{2.1.4}$$

于是便可组成爱因斯坦场方程 $R_{\mu\nu}=8\pi S_{\mu\nu}$. 它的 oi 分量为一恒等式，oo 分量和 ii 分量分别为

$$\frac{3\ddot{R}}{R}=-4\pi(\rho+3p), \tag{2.1.5}$$

$$R\ddot{R}+2\dot{R}^2+2k=4\pi(\rho-p)R^2. \tag{2.1.6}$$

消去 $\ddot{R}$，得到

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}+\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi}{3}\rho. \tag{2.1.7}$$

同时，将(2.1.1)和 $u_\mu=\delta_\mu^0$ 代入 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 得守恒方程具体形式：

$$\dot{p}R^3=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[R^3(\rho+p)],$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(\rho R^3)=-3pR^2. \tag{2.1.8}$$

(2.1.5)～(2.1.8)中只有两个方程是独立的. 当给定物态方程 $p=p(\rho)$时，由上式可以确定函数 $\rho=\rho(R)$，从而由(2.1.7)积分定出 $R=R(t)$. 所以，宇宙动力学的基本方程是爱因斯坦方程(2.1.7)、能量守恒方程(2.1.8)和物态方程 $p=p(\rho)$.

以 R-W 度规为基础、按上述程序确定 $R(t)$的宇宙模型称为弗里德曼(Friedmann)模型，或称**标准宇宙模型**.

§2.2　弗里德曼宇宙模型

在不知物态方程 $p=p(\rho)$情况下，分析场方程和守恒方程，也可得到许多关于弗里德曼宇宙现在、过去和将来的膨胀情况.

由方程(2.1.5)可知，只要 $\rho+3p>0$，就有$\frac{\ddot{R}}{R}<0$. 根据现在的观测事实，有 $\dot{R}/R>0$(观测到红移)，$R>0$. 由此可画出函数 $R=R(t)$的曲线(如图). 设曲线与 t 轴的交点为 $t=0$，即

$$R(0)=0. \tag{2.2.1}$$

此时容易证明，当 $t=0$ 时曲率标量

$$|R^\mu_\mu|=\frac{6}{R(t)}\left|\ddot{R}(t)+\frac{1}{R(t)}(\dot{R}^2(t)+k)\right|\to\infty. \tag{2.2.2}$$

此式表明宇宙必然在过去的某一时刻为一奇点，从那时开始“爆炸”开来，膨胀到今天方有这么大的宇宙半径 $R(t_0)$. 从宇宙为奇点到现在所经历的时间 t_0 自然被称为**宇宙年龄**.

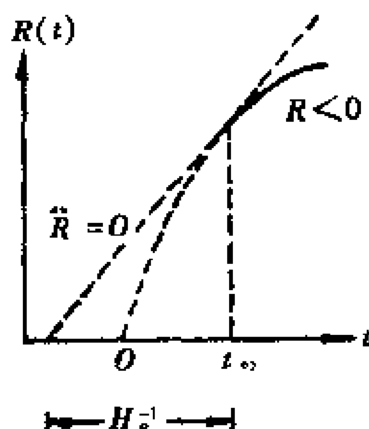


图 5-2

如果

$$R(t)=0 \text{ 当 } 0<t<t_0,$$

则 $$\dot{R}(t)=A=\text{const}, \ R(t)=At.$$

根据哈勃常数定义(1.4.11)：$H_0=\dot{R}(t_0)/R(t_0)$，由上式得到

$$t_0=\frac{1}{H_0} \qquad (R=0, \text{ 当 } 0<t<t_0). \tag{2.2.3}$$

根据观测得到的哈勃常数值 $H_0=50\text{km/s}\cdot\text{Mpc}$($1\text{Mpc}=3.08\times10^{24}\text{cm}$)，可知 $H_0^{-1}\approx2\times10^{10}$年.

如果 $R(t)<0$(当 $0<t<t_0$)，则有

$$t_0<\frac{1}{H_0}. \tag{2.2.4}$$

宇宙年龄的计算将在§2.4 中给出.

顺便提一下，上面讨论的是 $\rho+3p>0$ 的情况，如果在宇宙早期有 $\rho+3p=0$，则宇宙不存在初始奇点. 宇宙早期以辐射为主，因而有态方程 $p=\frac{1}{3}\rho$，此式与 $\rho+3p=0$ 一起，导致 $p=\rho=0$. 此时由(2.1.5)和(2.1.6)得到 $R=0$，$\dot{R}^2=-k(k\leqslant0)$，从而有 $R_{\mu\nu}=0$. 即宇宙空-时是 **Ricci 平直的**. 此时 $|R^{\mu}_{\mu}|_{t=0}$=有限值. 因此 $3p+\rho=0$ 的宇宙模型没有初始奇点.

Friedmann 宇宙的未来是无限膨胀还是收缩决定于空间曲率 k 的符号. 由(2.1.8)可知，只要 $p\geqslant0$，则 $d(\rho R^3)/dR\leqslant0$，ρ 随 R 增大而减小的速率至少等于 R^{-3}. 所以 $\rho R^2\to0$(至少正比于 R^{-1})，代入(2.1.7)有

$$\dot{R}^2+k\to0.$$

如果 $k=-1$，由于 $R^2>0$，所以 $R(t)$必然继续增大. 由上式可知

$\dot{R}^2 \to -k$、$R \to t$. 因此，如果 $k=-1$，宇宙将无限膨胀，若 $k=0$，则 $\dot{R}^2 \to 0$ 且 $\dot{R}^2>0$，所以 $R(t)$继续增大，只是比 t 增大得慢. 因此，$k=0$ 宇宙也将无限膨胀. 对于 $k=+1$，(2.1.7)可改写为

$$\dot{R}^2=\frac{8\pi}{3}\rho R^2-k=\frac{8\pi}{3}\rho R^2-1. \tag{2.2.5}$$

当 ρR^2 减至 1 时 $\dot{R}^2=0$. 由于 $\ddot{R}(t)<0$，图线向下弯，所以此后 $R(t)$减小，最后宇宙必然在将来的一段有限时间内再次缩至奇点($R=0$).

大约在弗里德曼模型提出 7 年以后，E. P. Hubble 于 1929 年发现了宇宙红移现象. 这是对广义相对论宇宙学的重要验证之一. 宇宙红移的发现不仅证明了广义相对论宇宙学特别是宇宙膨胀概念的正确，而且可以通过对红移的严格计算确定均匀、各向同性宇宙模型中哪一个更适合于描述真实的宇宙. 原则上可以由红移〔作为距离的函数，见(1.4.15)〕确定哈勃常数 H 和减速因子 q，从而确定宇宙的演化.

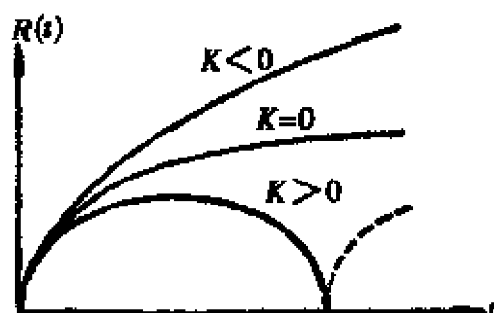


图 5-3

§2.3 宇宙物质的密度和压强

将哈勃常数 $H=\frac{\dot{R}}{R}$和减速因子 $q=-\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}$代入场方程(2.1.5)和(2.1.6)，得到

$$\rho_0=\frac{3}{8\pi}\left(\frac{k}{R_0^2}+H_0^2\right), \tag{2.3.1}$$

$$p_0=-\frac{1}{8\pi}\left[\frac{k}{R_0^2}+H_0^2(1-2q_0)\right]. \tag{2.3.2}$$

式中下标 0 表示取现在的值. 令

$$\rho_c=\frac{3H_0^2}{8\pi}. \tag{2.3.3}$$

由(2.3.1)可知

$$\rho_0>\rho_c \Longleftrightarrow k>0,$$
$$\rho_0<\rho_c \Longleftrightarrow k<0,$$
$$\rho_0=\rho_c \Longleftrightarrow k=0. \qquad (2.3.4)$$

取 $H_0=50\text{km/s.Mpc}$，可得 $\rho_c=5\times10^{-30}\text{gcm}^{-3}$. 根据观测，可认为宇宙现在的物质形式主要是非相对论性的，且满足条件

$$p_0\ll\rho_0. \qquad (2.3.5)$$

此时由(2.3.2)和(2.3.1)得到

$$k=R_0^2(2q_0-1)H_0^2,$$
$$\rho_0/\rho_c=2q_0, \qquad (2.3.6)$$

从而有

$$q_0>\frac{1}{2} \Longleftrightarrow k>0,$$
$$q_0<\frac{1}{2} \Longleftrightarrow k<0,$$
$$q_0=\frac{1}{2} \Longleftrightarrow k=0. \qquad (2.3.7)$$

宇宙是闭合的还是开放的，按照(2.3.4)决定于 ρ_0. $\rho_0\leqslant\rho_c$ 宇宙是开放的，$\rho_0>\rho_c$ 宇宙是闭合的. 或者按照(2.3.7)决定于减速因子 q_0. $q_0\leqslant\frac{1}{2}$宇宙是开放的，$q_0>\frac{1}{2}$宇宙是闭合的. ρ_0 可以通过测量星系质量(由测量光度得到)来确定，结果为

$$\frac{\rho_0}{\rho_c}\approx0.010\sim0.028. \qquad (2.3.8)$$

q_0 可以由红移-光度关系的观测确定，结果为

$$q_0\approx1,\ \rho_0\approx2\rho_c. \qquad (2.3.9)$$

根据(2.3.8)，宇宙是开放的；根据(2.3.9)，宇宙是闭合的. 为了解决这一矛盾，可以假设 $q_0\approx1$ 是正确的，再设法寻找普通星系之外的质量，这一至今还未找到的质量的平均密度应为 2×10^{-29} gcm^{-3}. 经过几十年的努力，在这方面有了一定的进展. 比如，黑洞，暗物质，中微子的静质量……如果存在的话，都会有助于这一问题的解决.

§2.4 宇宙年龄的计算

由§2.2中的讨论可知，宇宙物质静质量的能量密度 $\rho\sim R^{-3}$，而辐射的能量密度 $\rho_r\sim R^{-4}$. 因此，可以认为在现在的宇宙中，已知形式的辐射能量密度小于静质量的能量密度. 宇宙物质主要由非相对论的松散物质(尘埃)构成. 在这个时期，宇宙动力学方程(爱因斯坦方程)为(2.1.7)：

$$\dot{R}^2+k=\frac{8\pi}{3}\rho R^2. \tag{2.4.1}$$

由于 $\rho\sim R^{-3}$，故有

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3}. \tag{2.4.2}$$

由(2.3.6)可得

$$\frac{k}{R_0^2}=(2q_0-1)H_0^2,\quad \frac{8\pi}{3}\rho_0=2q_0H_0^2.$$

代入(2.4.1)和(2.4.2)，得到

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2=H_0^2\left[1-2q_0+2q_0\left(\frac{R_0}{R}\right)\right]. \tag{2.4.3}$$

积分上式，给出 t 的表达式

$$t=\frac{1}{H_0}\int_0^{R/R_0}\left(1-2q_0+\frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x, \tag{2.4.4}$$

代入 $R=R_0$，得到宇宙现在的年龄

$$t_0=\frac{1}{H_0}\int_0^1\left(1-2q_0+\frac{2q_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x. \tag{2.4.5}$$

只要 $q_0>0$，必有 $t_0<H_0^{-1}$，即(2.2.4)式. 上式给出的函数关系如图5-3所示.

当 $q_0>\frac{1}{2}(k=+1,\ \rho_0>\rho_c)$，

积分得

$$t_0=\frac{q_0}{H_0}(2q_0-1)^{-3/2}\left[\cos^{-1}\left(\frac{1}{q_0}-1\right)-\right.$$

$$\frac{1}{q_0}(2q_0-1)^{1/2}\Big].\tag{2.4.6}$$

代入 $q_0\approx 1$，$H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$年，得到

$$t_0\approx\left(\frac{\pi}{2}-1\right)H_0^{-1}\approx 1.1\times 10^{10}\text{年}.\tag{2.4.7}$$

由(2.4.5)还可以求出两次 $R=0$ 之间的时间间隔，即宇宙的“寿命”，

$$\tau\approx 13\times 10^{10}\text{年}.\tag{2.4.8}$$

当 $q_0=\frac{1}{2}(k=0,\ \rho_0=\rho_c)$，积分(2.4.4)给出

$$\frac{R(t)}{R_0}=\left(\frac{3H_0t}{2}\right)^{2/3}.\tag{2.4.9}$$

此式表明 $R(t)$ 无限增大. 代入 $H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$年，得到

$$t_0=\frac{2}{3}H_0^{-1}\approx 1.3\times 10^{10}\text{年}.\tag{2.4.10}$$

这一模型称为 **Einstein-de Sitter 宇宙模型**.

当 $0<q_0<\frac{1}{2}(k=-1,\ \rho_0<\rho_c)$，积分(2.4.5)给出

$$t_0=\frac{1}{H_0}\Big[(1-2q_0)^{-1}-q_0(1-2q_0)^{-3/2}ch^{-1}\times\left(\frac{1}{q_0}-1\right)\Big].\tag{2.4.11}$$

如果取 ρ_0 为星系内的质量密度，$q_0\approx 0.014$，$H_0^{-1}\approx 2\times 10^{10}$年，则有

$$t_0=0.96H_0^{-1}\approx 1.9\times 10^{10}\text{年}.$$

根据同位素衰变的方法和天文学其他方法测得地球的年龄大约为 4.5×10^9 年，太阳系的年龄大约为 5×10^9 年，银河系的年龄大约为 1.1×10^{10}年.

§2.5 粒子视界和事件视界

光速是所有信号传播速度的上限. 设在 r_1 处于时刻 t_1 发出的光在时刻 t 到达 $r=0$. 则 $r=0$ 处的观察者在时刻 t 只能观测到

来自区域 $r<r_1$ 的信号，即只能看到这个区域内的粒子(星系).

径向光线的传播方程可写为(1.4.6)：

$$\int_{t_1}^{t}\frac{dt}{R(t)}=\int_0^{r_1}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \tag{2.5.1}$$

如果当 $t_1\to 0$ 时左端积分发散，$r=0$ 处观察者能够观测到宇宙中任何随动粒子(星系)在足够早时发出的信号. 如果当 $t_1\to 0$ 时左端的积分收敛，则由上式可以确定 r_1，即存在一个有限的区域，$r=0$ 处观察者在时刻 t 只能看到这区域内的随动粒子(星系). 这一区域的边界称为**粒子视界**. 以 $r_H(t)$表示粒子视界的径坐标，则相应的固有空间距离为

$$D_H(t)=\int_0^{r_H(t)}\sqrt{g_{11}}dr=R(t)\int_0^{r_H(t)}\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}=$$

$$R(t)\int_0^{t}\frac{dt}{R(t)}. \tag{2.5.2}$$

由(2.4.3)将 dt 解出，代入上式右端被积式中，积分得到

当 $q_0>\frac{1}{2}(k=+1)$时

$$D_H(t)=\frac{R(t)}{R_0H_0}(2q_0-1)^{-1/2}\cos^{-1}\left[1-\frac{(2q_0-1)R(t)}{q_0R_0}\right].$$

当 $q_0=\frac{1}{2}(k=0)$时

$$D_H(t)=\frac{2}{H_0}\left[\frac{R(t)}{R_0}\right]^{3/2}.$$

当 $q_0<\frac{1}{2}(k=-1)$时，

$$D_H(t)=\frac{R(t)}{R_0H_0}(1-2q_0)^{-1/2}\mathrm{ch}^{-1}\left[1+\frac{(1-2q_0)R(t)}{q_0R_0}\right]. \tag{2.5.3}$$

对于一些宇宙模型，在宇宙的全部演化过程($R=0\to R_{max}\to 0$)，空间一点($r=0$)的观察者所能看到的全部事件也只能在有限范围内，这一范围的边界叫做**事件视界**.

在积分(2.5.1)中，当 $t\to\tau$(宇宙寿命)或 $t\to\infty$时，若左端积分发散，则不存在事件视界，位于$r=0$ 的观察者只要等待有限长时间就能观测到宇宙中任一事件；若(2.5.1)左端积分收敛，则存

代入(2.1.7)，得到

$$\dot{R}^2=\frac{C}{R}+\frac{\lambda}{3}R^2-k\equiv F(R,\lambda,k). \tag{2.6.5}$$

上式称为**弗里德曼膨胀方程**. 由这一方程可知，如果 $a(t)$是一个解，则将 t 换为 $t'=(\pm t+\text{const})$之后对应的 $a(t')$仍是一个解. 因此，可以任意选择时间坐标起点 $t=0$. 又因为 $R=0$ 为奇点，通过此点时 R 不应改变，所以 $R(t)$不变号. 现在 $R>0$，于是始终有 $R(t)\geqslant 0$. 作为例子，下面讨论爱因斯坦宇宙和 de Sitter 宇宙.

1. 爱因斯坦宇宙

爱因斯坦在建立场方程后不久，就试图用于宇宙学. 当时还没有发现哈勃定律，爱因斯坦致力于建立一个静态的宇宙模型，后来称为**爱因斯坦宇宙**. 在上面两个方程中令所有的时间导数等于零，并令 $\lambda=0$(爱因斯坦开始建立的场方程)，得到

$$\frac{k}{R^2}=\frac{8\pi}{3}\rho,\quad \frac{k}{R^2}=-8\pi p.$$

观测结果是 $\rho>0$，$p\approx 0$;上式无法与观测结果一致. 因此，爱因斯坦在场方程中人为地引入了宇宙项 $\lambda g_{\mu\nu}$.引入宇宙项后的静态场方程为

$$\frac{k}{R^2}-\frac{\lambda}{3}=\frac{8\pi}{3}\rho,\quad \frac{k}{R^2}-\lambda=-8\pi p.$$

代入 $p\approx 0$，得到$\dfrac{k}{R^2}=\lambda=4\pi\rho$. 由于 $\rho>0$，所以有 $\lambda>0$，$k=+1$. 因此，静态的爱因斯坦宇宙是一个具有正的常曲率的闭合宇宙. 此时度规(1.2.7)具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-R^2[\mathrm{d}\chi^2+\sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)],\ R=\text{const}. \tag{2.6.6}$$

2. de Sitter 宇宙

这是一个假想的既无物质又无辐射的宇宙模型. 由含宇宙项的场方程可知，没有物质($T_{\mu\nu}=0$ 的空间也是弯曲的). 将 $\rho=p=0$ 代入(2.6.1)和(2.6.2)，得到

$$\lambda=\frac{3}{R^2}(\dot{R}^2+k),\quad R\ddot{R}=R^2+k=\frac{R^2}{3}\lambda.$$

积分上式，对于 $\lambda>0$，得到

$$
\begin{aligned}
&R=\frac{1}{A_1}\mathrm{ch}A_1t \quad k=+1,\\
&R=\frac{1}{A_1}\mathrm{sh}A_1t \quad k=-1,\\
&R=C\mathrm{e}^{A_1t} \qquad k=0.
\end{aligned}
\tag{2.6.7}
$$

式中 $A_1\equiv(\lambda/3)^{1/2}$；

对于 $\lambda<0$，得到

$$
R=\frac{1}{A^2}\cos A_2t,\ k=-1. \tag{2.6.8}
$$

式中 $A_2\equiv(-\lambda/3)^{1/2}$；

对于 $\lambda=0$，得到

$$
R=\mathrm{const},\ k=0. \tag{2.6.9}
$$

由(2.6.7)～(2.6.9)确定的宇宙称为 de Sitter 宇宙. 该宇宙对应的空间是具有最大对称性的四维常曲率空间. 为简单起见，设 $R(t)=\mathrm{e}^t$，此时 Killing 方程具有形式

$$
\frac{\partial\xi^0}{\partial t}=0,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x^i}g^{ij}+\frac{\partial\xi^i}{\partial t}=0, \tag{2.6.10a}
$$

$$
\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}+\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}=2\delta_{ij}\xi^0. \tag{2.6.10b}
$$

这一方程组的解含有 14 个参量(A^μ 和 $B^{\mu\nu}$)：

$$
\begin{aligned}
&\xi^0=A^0+B_{0i}x^i,\\
&\xi^i=A^i-\frac{1}{2}A^0x^i-\frac{1}{2}B^{0i}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}B_{0k}x^kx^i+\\
&\qquad\frac{1}{4}\delta_{jk}B^{\,i}x^jx^k+B^i_kx^k.
\end{aligned}
\tag{2.6.11}
$$

由(2.6.10b)可知 $B^{\mu\nu}$ 中只有 6 个独立分量，所以实际上有 10 个独立的 killing 矢量. 因为 n 维空间最多存在 $n(n+1)/2$ 个 killing 矢量，所以 de Sitter 空间是具有最大对称性的空间. 这就是说，四维最大对称空间有 Minkowski 空间和 de Sitter 空间. 在这样的空间中既不存在任何优越的空间方向，也不存在任何优越的时间方向.

de Sitter 空间的 10 个参量等度量变换群正是五维“转动”群，它保持元素为+1+1+1+1−1 的对角矩阵不变，这个群常称为 de Sitter 群. de Sitter 宇宙虽然因为没有物质又没有辐射而不能作为真实的宇宙模型，但是任何 $\lambda>0$ 的宇宙当 $r\to\infty$ 时都过渡到 de Sitter 宇宙.

3. Lemaitre 宇宙

Lemaitre 于 1927 年提出一个比爱因斯坦宇宙具有更多物质的宇宙模型. 膨胀方程(2.6.5)中的常数 $C>0$, $k=+1$. 由(2.6.5)确定的 R-t 曲线可知标度因子 $R(t)$ 自 $t=0$ 开始增大，宇宙膨胀，随后膨胀变慢. 在 R 等于某一常数 R_c 时膨胀速率达极小值，此后膨胀又加快，最后趋于 de Sitter 宇宙解(2.6.7). 这一模型的特点是持续膨胀，但中间一段膨胀曲线有拐点. 这是一种自初始奇点 $R(0)=0$ 出发无限膨胀的模型.

§2.7 宇宙早期结构和背景辐射

原则上讲，直接观测遥远的恒星可以得到宇宙过去的信息，但是宇宙起源于类空奇点，对应于无限大的红移. 在宇宙诞生后的一段时间里仍然有很大的红移，因此实际上看不到遥远的天体. 于是，人们只能观测离地球较近的星，根据它们现在的情况和局部演化规律来推断宇宙早期的状态.

所有的观测和计算都表明，早期宇宙(大约 10^{10}年以前)和今天的宇宙很不相同. 早期宇宙物质处于高密状态，基本粒子的相互作用起决定性作用、这时时间尺度也要有所改变. 人们注意到，时间概念本身是没有绝对意义的;时间的测量总要和物质的性质联系在一起. 弗里德曼的坐标时间(世界时)t 是宇宙大量元素的固有时间. 从现在的宇宙来看，一个星系就是一个很好的钟，但在宇宙早期只有基本粒子和它们的相互作用起决定作用，所以只能以它们的相互作用和转化作为钟. 用这样的相继发生的一系列物理过程测量时间，即使是宇宙早期，距 $R=0$ 也是无限

遥远的. 因此人们又分出一个"宇宙极早期".

1. 宇宙演化简史

现在宇宙物质的能-动张量，其主要部分由星系物质构成，辐射部分是极其微小的. 人们推断宇宙早期是以辐射为主的. 这样的物态方程可写为

$$p=3\rho, \tag{2.7.1}$$

其能-动张量可形式地用理想流体的能-动张量(2.1.1)表示，将这一物态方程代入(2.6.1)～(2.6.2)的相容条件

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho+p}=-\frac{3\dot{R}}{R}, \tag{2.7.2}$$

积分得到 $\rho R^4=A=\text{const}.$ (2.7.3)

而将零压尘埃的能-动张量 $T_{\mu\nu}=\rho u_\nu u_\mu$ 代入(2.7.2). 积分得

$$\rho R^3=M=\text{const}. \tag{2.7.4}$$

比较(2.7.3)和(2.7.4)可以看出，当宇宙半径 R 减小时，辐射能量密度比尘埃能量密度增大得更快. 当然，辐射温度也会升高，量子辐射将转变为高能辐射，粒子对将大量产生. 由此可以推断早期宇宙的演化模型.

宇宙早期，物质开始处于一种高温(约 10^{12}K)高密状态. 所有基本粒子(包括它们的反粒子)都被束缚于热力学平衡态. 随着宇宙的迅速膨胀，温度降低，平衡向有利于稳态粒子产生的方向移动，电子、质子、较轻的原子核、中微子和光子从束缚态释放出来. 随着宇宙的继续膨胀和冷却，光子发生退耦：光子不再有足够的能量形成正反粒子对，也不再把能量给予别的粒子；同时，光子气的能量密度比其他物质的能量密度减小得更快，它们不再影响以后的膨胀. 当温度大约为 10^9K 时，中子和质子聚变成较重的核，剩下由氢和 He^4 以及其他元素组成的电离气体；按质量计大约含有 27%的氦. 此后光子、中微子和反中微子气继续自由膨胀，一直到 $T\approx4000$K 时氢的复合为止. 在 10^3K 和 10^5K 之间的某一温度，光子、中微子和反中微子的能量密度开始小于氢和氦的静质量密度，宇宙进入物质为主的时期.

近年来，建立在大统一理论基础上的暴胀宇宙学已经涉及到 $t \approx 10^{-36}$ 秒的极早期(方励之，Soto，Ruffini，1984). 那时宇宙已开始出现正反粒子数的不对称.

2. 微波背景辐射

从光子和物质退耦时开始，光子气单独满足守恒方程 $T^{\mu\nu}_{光;\nu}=0$. 代入(2.7.2)，得到

$$\rho_{光} R^4 = A. \tag{2.7.5}$$

与(2.7.3)不同，$\rho_{光}$ 不支配 $R(t)$ 的变化. 由普朗克辐射定律有

$$\rho_{光} \sim T_4, \tag{2.7.6}$$

所以，随着半径 $R(t)$ 的增大宇宙温度 T 按规律

$$T \sim R^{-1}(t) \tag{2.7.7}$$

降低.

1965 年，A. A. Penzias 和 R. W. Wilson 完成了对 T_0(现在的宇宙背景温度)的测量，发表了题为“在 4080MHz 处剩余天线温度的测量”的论文，公布了测量结果：

$$T_0 = 3.5\text{K} \pm 1\text{K}. \tag{2.7.8}$$

观测结果和理论预言相符合. 这一发现是自从哈勃定律以来广义相对论宇宙学获得的最大成功. 此后又有重复观测，均得到一致的结果. 宇宙演化到现在，残留的辐射是各向同性的，其频谱对应于温度 $T_0 \approx 2.7\text{K}$ 的黑体辐射.

宇宙温度约为 4000K 时光子和其他物质已经退耦. 由(2.7.8)，(2.7.7)和(1.4.9c)可以得到那时的红移：

$$z = \frac{4000}{2.7} - 1 \approx 1480. \tag{2.7.9}$$

因此，宇宙背景辐射使我们能够追溯到更早期的宇宙历史，比观测遥远天体所涉及的时间早得多，甚至可以追溯到宇宙诞生后的几秒钟. 观测到的这种辐射的高度各向同性表明，直到现在，宇宙还是类弗里德曼的，地球相对于宇宙物质整体的静止系以极小的速度运动.

3 其他宇宙模型

除前一章讨论的几种宇宙模型外，还有一些不同的宇宙模型. 实际上，宇宙模型就是能够正确描述观测到的宇宙性质的引力场方程的严格解. 虽然只有一个真实的宇宙，但由于观测到的数据是有限的，而且有些观测结果还很不确定（如减速因子的数值），故只要能够和现阶段观测结果相符，那些在宇宙奇点附近不同的模型都应该是同等有效的. 有些已知的宇宙解在 $t=0$ 附近是高度不均匀的和各向异性的，然后逐渐趋于弗里德曼宇宙，所以仍然和现在的观测结果一致. 换言之，所有能够导致观测到的红移和微波背景辐射的模型都不会被淘汰. 甚至有些宇宙解不能解释现在观测到的宇宙现象，人们也要去研究. 这是因为任何一个模型都是对真实的宇宙作了大量的简化才得到的，只有通过大量模型的研究才能确定哪些简化是允许的，哪些假定是必需的.

§3.1 Bianchi-I 型宇宙

按照混沌宇宙模型（Misner，1968），宇宙早期可能是各向异性的. 本节讨论的就是比均匀各向同性空间的对称性差一些的空间——均匀各向异性空间. 在这类空间中只有与平移变换相对应的 3 个 Killing 矢量 ξ^μ_i（$i=1, 2, 3$）. 假设 $\xi^i_\mu\xi^\nu_i=\delta^\nu_\mu$，以空间度规

$$dl^2=\gamma_{ij}dx^i dx^j,$$
$$\gamma_{ij}=-g_{ij} \tag{3.1.1}$$

表示的三维空间的 Killing 方程为

$$\gamma_{ij,l}+\xi^k_{m,j}\xi^m_l\gamma_{ik}+\xi^k_{m,i}\xi^m_l\gamma_{kj}=0. \tag{3.1.2}$$

考察关于 ζ^i 的一阶微分方程组

$$\zeta^i_{,j}-(\xi^i_m{}_{,l}\xi^m_k)\zeta^k=0, \tag{3.1.3}$$

可知这一方程组有三个解 ζ_m. 利用这些矢量可以证明，(3.1.2)的解具有形式

$$\gamma_{ij}(t, x^l)=h_{mn}(t)\bar{\zeta}^m_i(x^k)\bar{\zeta}^n_j(x^k). \tag{3.1.4}$$

式中 $\bar{\zeta}^m_i\zeta^i_n=\delta^m_n$. 可以证明，场方程共有 9 种独立类型的解. 这样，按照空间的 3 参数运动群可将空间分为 9 类，分别称为 Bianchi Ⅰ～Ⅸ 型. 其中最简单的是 Bianchi Ⅰ 型，即 $\xi^\mu_i=\delta^\mu_i$. 总可以选择适当的坐标系，使这 3 个 Killing 矢量具有形式

$$\xi^\mu_1=(0, 1, 0, 0), \xi^\mu_2=(0, 0, 1, 0), \xi^\mu_3=(0, 0, 0, 1). \tag{3.1.5}$$

此时度规只依赖于时间坐标 $x^0=t$. 作变换 $x'^0=x'^0(x^0)$, $x'^i=x^i+f^i(x^0)$，可将度规变换成

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-g_{ij}(t)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j. \tag{3.1.6}$$

可以看出，$t=\text{const}$ 的三维空间是平直的.

由(3.1.6)可将场方程 $R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}=\kappa\rho u_\mu u_\nu$ 写为

$$\frac{1}{8}\dot{g}_{ij}\dot{g}^{ij}+\frac{1}{8}\left(\frac{\dot{g}}{g}\right)^2=\kappa\rho, \tag{3.1.7.}$$

$$R^i_j-\frac{1}{2}\delta^i_jR-\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{-g}g^{im}\dot{g}_{mj})-\frac{1}{2}\delta^i_j\kappa\rho=0; \tag{3.1.8}$$

守恒定律具有形式 $\dot{u}^\mu=0$. 由此可知，场方程的可积条件可写为

$$\kappa\rho\sqrt{-g}=M=\text{const}. \tag{3.1.9}$$

将(3.1.8)缩并，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\sqrt{-g})=\frac{3}{2}M. \tag{3.1.10}$$

积分得 $$\sqrt{-g}=\frac{3}{4}t(Mt+A). \tag{3.1.11}$$

式中 A 为常数. 应用(3.1.9)，对(3.1.8)作一次积分，得到

$$\dot{g}_{ij}=\frac{Mt}{\sqrt{-g}}g_{ij}+\frac{a^m_i}{\sqrt{-g}}g_{mj}. \tag{3.1.12}$$

式中 a_i^m 为常数. 在空间中任选一点，建立直角坐标，使常数矩阵 a_i^m 是对角的. 由(3.1.12)可知，度规在任何时刻都保持是对角的. 由(3.1.11)和(3.1.12)得

$$\dot{g}_{11}=g_{11}\left[\frac{4M}{3M+A}+\frac{2P_1A}{t(Mt+A)}\right],\ P_1A=\frac{2}{3}a_1^1. \tag{3.1.13}$$

式中 P_1 为常数. 积分上式，得到

$$g_{11}=B(Mt+A)^{4/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_1}. \tag{3.1.14}$$

式中 B 为常数. 类似地可以得到 g_{22}和 g_{33}. 于是得到所求的度规

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-g_{11}\mathrm{d}x^2-g_{22}\mathrm{d}y^2-g_{33}\mathrm{d}z^2,$$

$$g_{11}=(-g)^{1/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_1-\frac{2}{3}},$$

$$g_{22}=(-g)^{2/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_2-2/3},$$

$$g_{33}=(-g)^{1/3}\left(\frac{t}{Mt+A}\right)^{2P_3-\frac{2}{3}}. \tag{3.1.15}$$

由场方程(3.1.7)和(3.1.8)可知，常数 P_i 必须满足条件

$$P_1+P_2+P_3=1,\ P_1^2+P_2^2+P_3^2=1. \tag{3.1.16}$$

由场源流体的四维速度 $u^\mu=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$可得

$$u^\mu_{;\nu}=\frac{1}{2}g_{\mu\nu,0} \tag{3.1.17}$$

因此，场源是沿短程线运动的无转动流体(尘埃)，其膨胀速度为

$$\theta=\frac{2Mt+A}{t(Mt+A)}, \tag{3.1.18}$$

剪切速度 $\sigma_{ij}=\dfrac{Ag_{ij}}{4\sqrt{-g}}(3P_i-1)$(对 i 不取和). (3.1.19)

可见常数 A 是切速度的量度，P_i 表征切速度的方向.

度规(3.1.15)描述一个均匀、各向异性的膨胀(或收缩)的宇宙. 由(3.1.16)可知，不可能有 $P_1=P_2=P_3$，所以在随动系中尘埃粒子间距离的变化和方向有关. 总可以选择时间轴的方向，使 $A>0$；从 $t>0\to t=0$ 时度规变为奇异的.

在一般情况下有 $P_3<0$. 由式

$$\frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}}=\frac{4Mt/3+2P_3A}{t(Mt+A)} \tag{3.1.20}$$

可知，t 很小时 z 方向的距离变化是负的，即宇宙沿 z 方向收缩．这种收缩直至 $t=-3P_3A/2M$ 时停止并转为膨胀．宇宙在 x 和 y 方向是持续膨胀的．如果宇宙在时刻 $t(t>0)$ 为一球，则随着 t 的增大将变成一个沿 z 方向拉长了的椭球；当 $t\to+0$ 时成为一条直线，具有圆筒状的奇异面．

Bianchi Ⅰ 型宇宙有一特点，即质量 M 不影响 $t\to0$ 时宇宙的演化行为．度规(3.1.15)可以近似地用真空解代替：

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-(t^{2P_1}\mathrm{d}x^2+t^{2P_2}\mathrm{d}y^2+t^{2P_3}\mathrm{d}z^2),\\&P_1+P_2+P_3=1,\ P_1^2+P_2^2+P_3^2=1,\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

这正是 Kasner 度规(见第 2 篇 § 1.5)．

在 $P_1=1$，$P_2=P_3=0$ 的特殊情况下，我们有

$$\frac{\dot{g}_{11}}{g_{11}}=\frac{4Mt/3+2A}{t(Mt+A)},\ \frac{\dot{g}_{22}}{g_{22}}=\frac{\dot{g}_{33}}{g_{33}}=\frac{4M}{3(Mt+A)}. \tag{3.1.22}$$

当 $t\to+0$ 时只在 x 方向出现奇异性．一个 $t(t>0)$时刻的球将变成一个椭球，最后出现圆板形奇异面．

§ 3.2　五维 Bianchi-V 型宇宙

近年来，不少人讨论了高维宇宙模型(Randjbar-Daeml，Sabdev 等)．Ishihava 给出了五维 R-W 宇宙解．本节讨论五维 Bianchi-V 型宇宙解，这一解描述早期宇宙，当时间趋于无限大时该模型趋于均匀、各向同性的膨胀宇宙．

五维 Bianchi-V 型度规具有形式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&\mathrm{d}t^2-A^2(t)\mathrm{d}x^2-B^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}y^2-C^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}z^2+\\&D^2(t)\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}\zeta^2.\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

宇宙早期，设态方程为 $\rho=4p$．选取 Cartan 正交标架 $\sigma^\mu(\mu=0,1,2,3,5)$：

$$\sigma^0=\mathrm{d}t,\ \sigma^1=A(t)\mathrm{d}x,\ \sigma^2=B(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y,$$

$$\sigma^3 = C(t)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}z, \ \sigma^5 = D(t)\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.2.2}$$

取引力常数 $k=1$，由外微分方法，可以将场方程写为

$$AA^{-1} + BB^{-1} + CC^{-1} + DD^{-1} = -\rho,$$

$$AA^{-1} + AA^{-1}(BB^{-1} + \dot{C}C^{-1} + DD^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho,$$

$$BB^{-1} + BB^{-1}(AA^{-1} + CC^{-1} + DD^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho,$$

$$CC^{-1} + \dot{C}C^{-1}(AA^{-1} + \dot{B}B^{-1} + \dot{D}D^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho,$$

$$DD^{-1} + \dot{D}D^{-1}(AA^{-1} + \dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1}) - 3A^{-2} = \frac{1}{4}\rho,$$

$$\dot{B}B^{-1} + \dot{C}C^{-1} + \dot{D}D^{-1} - 3AA^{-1} = 0. \tag{3.2.3}$$

守恒方程 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$ 给出

$$\rho = \rho_0(ABCD)^{-1/4}, \ \rho_0 = \mathrm{const}. \tag{3.2.4}$$

令 $\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}t/A$，得到场方程的解：

$$A^3 = \mathrm{ash}3\eta + \mathrm{bch}3\eta - \frac{1}{12}\rho_0 q_0, \tag{3.2.5}$$

$$B = B_0 A\exp\left[q_1\int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right], \tag{3.2.6}$$

$$C = C_0 A\exp\left[q_2\int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right], \tag{3.2.7}$$

$$D = D_0 A\exp\left[q_3\int A^{-3}\mathrm{d}\eta\right]. \tag{3.2.8}$$

式中 $q_0 \cdots q_3$，B_0，C_0，D_0，a 和 b 均为常数，且满足关系

$$6(a^2 - b^2) + (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) + \frac{1}{24}\rho_0^2 q_0^2 = 0. \tag{3.2.9}$$

引入哈勃常数 $H_i(i=1,2,3)$：

$$H_1 = \frac{A}{A}, \ H_2 = \frac{B}{B}, \ H_3 = \frac{\dot{C}}{C}. \tag{3.2.10}$$

当 $\eta \to \infty$ 时有

$$\frac{H_1 - H_2}{H_1} \to 0, \ \frac{H_2 - H_3}{H_2} \to 0. \tag{3.2.11}$$

所以随着时间的增长度规将趋于各向同性.

若 $b = \frac{1}{12}\rho_0 q_0$，由(3.2.5)可知 $\eta = 0$ 为奇点.

由(3.2.5)和(3.2.6)可得

$$B^3=B_0^3A^3\left[1+\frac{a}{b}\operatorname{cth}\frac{3}{2}\eta\right]^{-q_1/a}. \tag{3.2.12}$$

类似地得到

$$C^3=C_0^3A^3\left[1+\frac{a}{b}\operatorname{cth}\frac{3}{2}\eta\right]^{-q_2/a}, \tag{3.2.13}$$

$$D^3=D_0^3A^3\left[1+\frac{a}{b}\operatorname{cth}\frac{3}{2}\eta\right]^{-q_3/a}. \tag{3.2.14}$$

如果 $a=b=\frac{1}{12}\rho_0q_0$,则 $A^3=a(e^{3\eta}-1)$. 代入 $dt=Ad\eta$,积分得

$$t=\int Ad\eta=\sqrt[3]{a}\int(e^{3\eta}-1)^{1/3}d\eta=$$
$$\sqrt[3]{a}\Big\{(e^{3\eta}-1)^{1/3}-\frac{1}{3}[\ln(e^{3\eta}-1)^{1/3}+1]-$$
$$\frac{1}{2}\ln[(e^{3\eta}-1)^{2/3}-(e^{3\eta}-1)^{1/3}+1]+$$
$$\frac{3}{4}\sqrt{3}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left[(e^{3\eta}-1)^{1/3}-\frac{1}{2}\right]\Big\}. \tag{3.2.15}$$

令 $\Delta=6(a^2-b^2)+\frac{1}{24}\rho_0^2q_0^2$, 由(3.2.9)可将解的奇异性用下表给出.

表 5-1

$\frac{q_1}{a}$	$\frac{q_2}{a}$	$\frac{q_3}{a}$	$\eta=0$			奇　性
			B	C	D	
>0	>0	>0	/	/	/	$(\Delta>0)$
			0	0	0	$(\Delta<0)$
<0	<0	<0	/	/	/	$(\Delta>0)$
			∞	∞	∞	$r(\Delta<0)$
>0	>0	<0	0	0	∞	α
>0	<0	>0	0	∞	0	α
<0	>0	>0	∞	0	0	α
>0	<0	<0	0	∞	∞	β
<0	<0	>0	∞	∞	0	β
<0	>0	<0	∞	0	∞	β

§ 3.3 Godel 宇宙

Godel(1949)提出一个均匀、各向异性的宇宙模型. 这一四维空间度规具有形式

$$ds^2=C^2\left[(dt+e^x dy)^2-dx^2+\frac{1}{2}e^{2x}dy^2+dz^2\right]. \qquad (3.3.1)$$

式中 C 为常数. 该空间有 5 个 Killing 矢量，可分别写为

$$\xi_1^\mu=(0,0,1,0),\ \xi_2^\mu=(0,0,0,1),\ \xi_3^\mu=(1,0,0,0),$$

$$\xi_4^\mu=(0,1,-y,0),\ \xi_5^\mu=\left(-2e^{-x},\ y,\ e^{-2x}-\frac{1}{2}y,\ 0\right). \qquad (3.3.2)$$

设场源为满足条件

$$\rho=1/kC^2,\ \lambda=-1/2C^2 \qquad (3.3.3)$$

的尘埃，则能-动张量具有形式

$$T^{\mu\nu}=\frac{1}{2kC^2}g^{\mu\nu}+\frac{u^\mu u^\nu}{kC^2}. \qquad (3.3.4)$$

采用随动系有

$$u^\mu=\left(\frac{1}{C},0,0,0\right). \qquad (3.3.5)$$

由旋速度的定义〔第 2 篇(3.11.25)〕可知，$\omega^2\equiv\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}/2=\frac{1}{2C^2}=4\pi\rho$. 设试验粒子初速度沿 x^1 方向，在 $C\gg1$ 的情况下，运动方程具有形式

$$x^1\approx vx^0+A\sin\frac{2\omega x^0}{c},$$

$$x^2\approx A\left(\cos\frac{2\omega x^0}{c}-1\right). \qquad (3.3.6)$$

式中 A 为常数. 在随动系中观测，自由运动成了转动. 如果惯性系定义为自由运动为直线运动的坐标系，则惯性系以角速度 ω 相对于随动系转动. 这表明，如果以一局部惯性系为准，则遥远的恒星系在转动.

Godel 宇宙模型与弗里德曼宇宙模型不同，它含有转动物

质；还有闭合的类时世界线，即一个观察者可以影响他自己的过去.

在我们已经讨论过的各种宇宙模型中，物理上合理的模型是弗里德曼模型和 Bianchi 型宇宙模型. 它们的演化有一个共同特点：在过去某一时刻存在一类空奇点，即宇宙有一个起点或者说有一个原始“大爆炸”. 那些物理上不合理的模型（爱因斯坦宇宙，de Sitter 宇宙和 Godel 宇宙）都不具有上述奇点（它们都含有宇宙项）. 这些模型或者物态方程不合理，不能给出已观测到的红移，或者违背因果律.

§3.4 六维宇宙

对作用量

$$^{(6)}I = \int R\sqrt{-g}\,\mathrm{d}^6x$$

应用变分原理，便得到 6 维引力理论的真空场方程[14, 15]：

$$^{(6)}G^a_b = R^a_b - \delta^a_b R/2 = 0. \tag{3.4.1}$$

式中 R^a_b 是 Ricci 张量，R 为标曲率，它们都由 6 维宇宙的度规张量 g_{ab} 构成. g_{ab} 是 x^0，x^1，…，x^6 的函数. 下面我们约定，拉丁指标代表 0，1，…，6；希腊指标代表 0，1，2，3；$^{(6)}G^a_b$ 是混合爱因斯坦张量.

$^{(6)}G^\alpha_\beta$ 可分为三个函数：$^{(4)}G^\alpha_\beta$，H^α_β 和 I^α_β，它们分别对应于时空，质量和电荷. 即

$$^{(6)}G^\alpha_\beta = {}^{(4)}G^\alpha_\beta + H^\alpha_\beta + I^\alpha_\beta.$$

式中几何量 H^α_β 和 I^α_β 将揭示 4 维宇宙的物理性质. 我们把 $-H^\alpha_\beta$ 看作宏观物体的能-动张量 $^{(m)}T^\alpha_\beta$（或写为 $8\pi G^{(m)}T^\alpha_\beta/c^4$），把 $-I^\alpha_\beta$ 看作电磁场的能-动张量 $^{(em)}T^\alpha_\beta$（或写为 $8\pi G^{(em)}T^\alpha_\beta/c^4$）. 这里我们不把它们看成新增维度的能-动张量，因为此概念还没有建立起来；$^{(6)}G^a_b$（$a\geqslant5$ 或 $b\geqslant5$）仅当解方程 $^{(6)}G^a_b=0$ 时才考虑. 4 维宇宙的场方程可写为

$$^{(4)}G^{\alpha}_{\beta}=-H^{\alpha}_{\beta}-I^{\alpha}_{\beta}={}^{(m)}T^{\alpha}_{\beta}+{}^{(em)}T^{\alpha}_{\beta}. \tag{3.4.2}$$

这里划分爱因斯坦张量的过程实际上是 4 维引力理论和 5 维引力理论中划分爱因斯坦张量过程的推广，且这种划分方法是惟一的，因为过程一开始并没有涉及物理内容，只是数学上的做法. 我们还没有给 x^5 和 x^6 以物理意义——质量和电荷. 实际上，在 6 维宇宙中，x^5 和 x^6 都是纯数学量，甚至我们开始把它们看作是两个独立的坐标. 但如果从物理上来分析，它们又可以与物理量相符合. 这和我们由牛顿近似分析爱因斯坦方程得出数学量 $g_{\mu\nu}$为引力势的过程是一样的. 经过这样的分析，我们又把 x^5 和 x^6 与质量和电荷联系起来了.

按照上面的观点，我们可以从两个方面来分析. 一是考察物理量(如质量和电荷)的来源，二是分析自然现象如状态方程、电磁场的起源. 后面我们将这些分析应用于早期宇宙. 6 维宇宙的度规可写为

$$ds^2=e^{\nu}dx^{0^2}-e^{\lambda}(dx^{1^2}+dx^{2^2}+dx^{3^2})+e^{\mu}dx^{5^2}+e^{\eta}dx^{6^2}. \tag{3.4.3}$$

式中 ν, λ, μ, η 是 x^0, x^5, x^6 的函数.

将(3.4.3)代入真空场方程(3.4.1)，得到

$$\begin{aligned}{}^{(6)}G_{00}=&-3\lambda(\dot\lambda+\mu+\eta)/4-\mu\eta/4-\\ &e^{\nu-\mu}[3\lambda+3\lambda^2+\eta+\eta^2/2+3\lambda'(-\mu'+\eta')/2-\\ &\mu'\eta'/2]/2-e^{\nu-\eta}[3\ddot\lambda+3\dot\lambda^2+\ddot\mu+\dot\mu^2/2+\\ &3\dot\lambda(\dot\mu-\dot\eta)/2-\dot\mu\ddot\eta/2]/2=0,\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

$$\begin{aligned}{}^{(6)}G_{05}=&3\dot\lambda'/2+\eta'/2+3\lambda\lambda'/4+\eta\eta'/4=\\ &\nu'(3\lambda+\eta)/4-\mu(3\lambda'+\eta')=0,\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

$$\begin{aligned}{}^{(6)}G_{06}=&3\ddot\lambda/2+\ddot\mu/2+3\lambda\dot\lambda/4+\mu\dot\mu/4-\\ &\dot\nu(3\lambda+\mu)/4-\eta(3\dot\lambda+\dot\mu)/4=0,\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

$$\begin{aligned}{}^{(6)}G_{11}={}^{(6)}G_{22}={}^{(6)}G_{33}=&-e^{\lambda-\nu}[\lambda+3\lambda^2/4+\\ &\mu/2+\mu^2/4+\eta/2+\eta^2/4+\\ &\dot\lambda(-\nu+\mu+\eta)/2+\mu(-\nu+\eta)/4-\end{aligned}$$

$$\nu\eta/4]+e^{\lambda-\mu}[\nu''/2+\nu'^2/4+\lambda''+$$
$$3\lambda'^2/4+\eta''/2+\eta'^2/4+\lambda'(\nu'-\mu'+\eta')/2+$$
$$\nu'(-\mu'+\eta')/4-\mu'\eta'/4]+$$
$$e^{\lambda-\eta}[\overset{**}{\nu}/2+\overset{*}{\nu}^2/4+\overset{**}{\lambda}+3\overset{*}{\lambda}^2/4+\overset{**}{\mu}/2+$$
$$\overset{*}{\mu}^2/4+\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\nu}+\overset{*}{\mu}-\overset{*}{\eta})/2+\overset{*}{\nu}(\overset{*}{\mu}-\overset{*}{\eta})/4-$$
$$\overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/4]=0, \tag{3.4.7}$$

$$^{(6)}G_{55}=-e^{\mu-\nu}[3\ddot{\lambda}/2+3\lambda^2/2+\ddot{\eta}/2+\dot{\eta}^2/4+$$
$$3\dot{\lambda}(-\nu+\eta)/4-\nu\eta/4]-$$
$$[3\lambda^2/4+3\lambda'(\nu'+\eta')/4+\nu'\eta'/4]-$$
$$e^{\mu-\eta}[\overset{**}{\nu}/2+\overset{*}{\nu}^2/4+3\overset{**}{\lambda}/2+3\overset{*}{\lambda}^2/2+$$
$$3\overset{*}{\lambda}(\overset{*}{\nu}-\overset{*}{\eta})/4-\overset{*}{\nu}\overset{*}{\eta}/4]=0, \tag{3.4.8}$$

$$^{(6)}G_{56}=\overset{*}{\nu}'/2+3\overset{*}{\lambda}'/2+\nu'\overset{*}{\nu}/4+3\lambda'\overset{*}{\lambda}/4-$$
$$\overset{*}{\mu}(\nu'+3\lambda')/4-\eta'(\overset{*}{\nu}+3\overset{*}{\lambda})/4=0, \tag{3.4.9}$$

$$^{(6)}G_{66}=-[3\dot{\lambda}(\dot{\nu}+\dot{\lambda}+\dot{\mu})+\dot{\nu}\dot{\mu}]/4-$$
$$e^{\eta-\nu}[3\ddot{\lambda}+3\dot{\lambda}^2+\ddot{\mu}+\mu^2/2+3\lambda$$
$$(-\nu+\mu)/2-\nu\mu/2]/2-e^{\eta-\mu}[\nu''+$$
$$\nu'^2/2+3\lambda''+3\lambda'^2+3\lambda'(\nu'-\mu')/2-$$
$$-\nu'\mu'/2]/2=0. \tag{3.4.10}$$

式中(·), (′)和(*)分别表示对 x^0, x^5 和 x^6 取偏导数. 我们目前暂不能推断出 6 维宇宙的物理状态或能-动张量, 仅考虑 6 维真空宇宙. 这样做的目的是看看第 5 维和第 6 维对 4 维宇宙有什么样的几何效应.

我们得到一个简单的真空解:

$$e^{\nu}=C_0[\dot{f}(x^0)]^2[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{2\mp\sqrt{6}}, \tag{3.4.11}$$

$$e^{\lambda}=[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{\pm\sqrt{6}/3}, \tag{3.4.12}$$

$$e^{\mu}=C_5[g'(x^5)]^2[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{2\mp\sqrt{6}}, \tag{3.4.13}$$

$$e^{\gamma}=C_6[\dot{h}(x^6)]^2[f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0]^{2\mp\sqrt{6}}.$$

(3.4.14)

式中的 $f(x^0)$，$g(x^5)$和 $h(x^6)$分别是 x^0，x^5 和 x^6 的任意函数；C_0，C_5，C_6 和 K_0 都是常数．在 $g'(x^5)=\dot{h}(x^6)=0$ 的条件下，6 维宇宙退化为 4 维宇宙，这时第 5 维和第 6 维坐标无需存在．如果上述条件严格满足，则量 Gm/c^2 和 $eG^{1/2}/c^2$ 将是常数；如果上述条件只是近似地满足，即第 5 维和第 6 维收缩到只是目前不能观测到的程度，则这两个量不再是常数(尽管它们的梯度可能很小)．

引进宇宙时，度规的时间部分可变为下面的形式：

$$e^{\gamma}\sim\tau^{(6\pm4\sqrt{6})/15}. \tag{3.4.15}$$

这个解的指数中取(＋)号代表一个正在膨胀的 4 维宇宙，取(－)号表示正在收缩的宇宙．这个解与辐射宇宙的解有一个微小的差异，这是第 6 维度影响的结果．因为当第 5 维度收缩后，5 维宇宙的解可以严格地退化为 4 维辐射宇宙解．

6 维宇宙中试验粒子的时迹可以用 6 维短程线来描述．短程线方程具有形式

$$\frac{d^2x^k}{ds^2}+\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=0$$

$$(i,\ j,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ 6). \tag{3.4.16}$$

当 $k=1$，2，3 时，我们有

$$\frac{d}{ds}\left[A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{dx^1}{ds}\right]=0,$$

或
$$\frac{dx^1}{ds}=t_xA^{\mp\sqrt{6}/3}; \tag{3.4.17}$$

$$\frac{d}{ds}\left[A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{dx^2}{ds}\right]=0,$$

或
$$\frac{dx^2}{ds}=t_yA^{\pm\sqrt{6}/3}; \tag{3.4.18}$$

$$\frac{d}{ds}\left[A^{\pm\sqrt{6}/3}\frac{dx^3}{ds}\right]=0,$$

或
$$\frac{dx^3}{ds}=t_zA^{\mp\sqrt{6}/3}. \tag{3.4.19}$$

式中 $A\equiv f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0$.

$t_x, t_y, t_z=\text{const}.$

当 $k=0$ 时，(3.4.16)式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}+\left[\frac{\ddot{f}}{\dot{f}}+(2\mp\sqrt{6})\frac{\dot{f}}{2A}\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+$$

$$(2\mp\sqrt{6})\frac{g'}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}+(2\mp\sqrt{6})\frac{\dot{h}}{A}\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\mp$$

$$\sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_0\dot{f}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]-$$

$$(2\mp\sqrt{6})C_5g'^2/2C_0\dot{f}A\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2-$$

$$(2\mp\sqrt{6})C_6\dot{h}^2/2C_0\dot{f}A\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2=0. \tag{3.4.20a}$$

式中 f, g, h 分别是 $f(x^0)$, $g(x^5)$, $h(x^6)$的缩写.

当 $k=5$, 6 时，方程(3.4.16)可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^5}{\mathrm{d}s^2}-(2\mp\sqrt{6})C_0\dot{f}^2/2C_5g'A\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+$$

$$(2\mp\sqrt{6})\dot{f}/A\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\mp$$

$$\sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_5g'$$

$$\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]+$$

$$\left[\frac{g''}{g'}+(2\mp\sqrt{6})g'/2A\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\right)^2+$$

$$(2\mp\sqrt{6})\dot{h}/A\frac{\mathrm{d}x^5}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}-$$

$$(2\mp\sqrt{6})C_6\dot{h}^2/2C_5Ag'\left(\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\right)^2=0, \tag{3.4.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x^6}{\mathrm{d}s^2}-(2\mp\sqrt{6})C_0\dot{f}^2/2C_6A\dot{h}\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2+$$

$$(2\mp\sqrt{6})\dot{f}/A\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^6}{\mathrm{d}s}\pm$$

$$\sqrt{6}A^{-3\pm4\sqrt{6}/3}/6C_6\dot{h}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}s}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}s}\right)^2\right]-$$

$$(2\mp\sqrt{6})C_5 g'^2/2C_6 A\dot{h}\left(\frac{dx^5}{ds}\right)^2+$$

$$(2\mp\sqrt{6})g'/A\frac{dx^5}{ds}\frac{dx^6}{ds}+$$

$$\left[\frac{\ddot{h}}{\dot{h}}+(2\mp\sqrt{6})\dot{h}/2A\right]\left(\frac{dx^6}{ds}\right)^2=0. \qquad (3.4.22)$$

由(3.4.21)，(3.4.22)和(3.4.20)可以得到

$$C_5 g'\frac{dx^5}{ds}=C_0 f\frac{dx^0}{ds}+\alpha A^{-2\pm\sqrt{6}}, \qquad (3.4.23)$$

$$C_6\dot{h}\frac{dx^6}{ds}=C_0 f\frac{dx^0}{ds}+\beta A^{-2\pm\sqrt{6}}, \qquad (3.4.24)$$

α，β=const.

考虑到方程(3.4.3)，我们进一步得到

$$f\frac{dx^0}{ds}=-(\beta C_5+\alpha C_6)A^{-2\pm\sqrt{6}}/$$
$$(C_0C_5+C_0C_6+C_5C_6)\pm R. \qquad (3.4.25)$$

式中 $$R=\left\{\frac{C_5C_6(A^{-2\pm\sqrt{6}}+A^{-2\pm\sqrt{6}/3}t_6^2)}{C_0(C_0C_5+C_0C_6+C_5C_6)}-\frac{[(\alpha-\beta)^2C_0C_5C_6+(\beta^2C_5+\alpha^2C_6)C_5C_6]A^{-4\pm2\sqrt{6}}}{C_0(C_0C_5+C_0C_6+C_5C_6)^2}\right\}^{1/2}.$$

式中 $t_6^2=t_x^2+t_y^2+t_z^2$.

把(3.4.25)代入(3.4.23)和(3.4.24)，得到

$$g'\frac{dx^5}{ds}=\frac{[(\alpha-\beta)C_0+\alpha C_6]A^{-2\pm\sqrt{6}}}{C_0C_5+C_0C_6+C_5C_6}\pm\frac{C_0R}{C_5}, \qquad (3.4.26)$$

$$\dot{h}\frac{dx^6}{ds}=\frac{[(\beta-\alpha)C_0+\beta C_5]A^{-2\pm\sqrt{6}}}{C_0C_5+C_0C_6+C_5C_6}\pm\frac{C_0R}{C_6}. \qquad (3.4.27)$$

由(3.4.26)，(3.4.27)和(3.4.25)，可以得到坐标 x^5 和 x^6 对时间的变化率[16]. 这里虽然不能得出函数 $g(x^5)$和 $h(x^6)$的具体形式，但可以预测到，$g(x^5)$和 $h(x^6)$一定有极值.

当第 5 维和第 6 维收缩到 $x^0=x^0_{C_5}$和 $x^0=x^0_{C_6}$时，即当 x^5 和 x^6 分别取确定值 x_c^5 和 x_c^6 时，可得 $g'(x^5)=0$，$\dot{h}(x^6)=0$. 此时 6 维宇宙也就变为 5 维，再变为 4 维宇宙了. 这时(3.4.20a)变为

$$\frac{\mathrm{d}^2x^0}{\mathrm{d}s^2}+\left[\frac{\ddot{f}}{\dot{f}}+2(2\mp\sqrt{6})\dot{f}A_c\right]\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

$$\pm\sqrt{6}\,t_6^2A^{-3\pm2\sqrt{6}/3}/6C_0\dot{f}=0. \qquad (3.4.20b)$$

式中　　$A_c=f(x_c^0)+g(x_c^5)+h(x_c^6)+K_0.$

方程(3.4.17)～(3.4.19)和(3.4.20b)即为 4 维宇宙的运动方程(其中 $A=A_c$).

当注意到第 5 和第 6 维度分别表示质量和电荷时，上面的运动方程可能导致经典麦克斯韦方程，因为方程中含有包括定值 Gm/c^2 和 $eG^{1/2}/c^2$ 的常数 A_c.

我们将看到，所得到的 6 维宇宙真空解可以用来研究 4 维宇宙物理性质的起源. 下面我们从几个方面来讨论.

1. 早期宇宙

(1) 度规

前面我们已给出 6 维宇宙的一个简单的真空解：

$$\mathrm{e}^{\nu}=C_0\dot{f}^2A^{2\mp\sqrt{6}},\ \mathrm{e}^{\lambda}=A^{\pm\sqrt{6}/3},$$

$$\mathrm{e}^{\mu}=C_5g'^2A^{2\pm\sqrt{6}},\ \mathrm{e}^{\eta}=C_6\dot{h}^2A^{2\mp\sqrt{6}},$$

$$A\equiv f(x^0)+g(x^5)+h(x^6)+K_0,$$

$$C_0,\ C_5,\ C_6=\mathrm{const}.$$

当 $g'=\dot{h}=0$ 时，我们得到了 4 维宇宙. 这表明 4 维宇宙被嵌在 6 维宇宙的某个地方；在那里，$g(x^5)$和 $h(x^6)$取极值，变量 $x^5=Gm/c^2$ 和 $x^6=eG^{1/2}/c^2$ 不再变化(成为常数 x_c^5 和 x_c^6). 这就是 4 维宇宙的诞生.

(2) 宏观物体的能-动张量

宏观物体的能-动张量由第 5 维度的几何量决定：

$$^{(m)}T_0^0=3\mathrm{e}^{-\nu}\lambda\mu/4c^2+3\mathrm{e}^{-\mu}({}^{*}\lambda^{*}+\dot{\lambda}^2-\dot{\lambda}\dot{\mu}/2)/2=$$

$$(-3\pm\sqrt{6})/2C_0A^{4\mp\sqrt{6}}+$$

$$(5\mp2\sqrt{6})/2C_5A^{4\mp\sqrt{6}}. \qquad (3.4.28)$$

$$^{(m)}T_1^1={}^{(m)}T_2^2={}^{(m)}T_3^3=\mathrm{e}^{-\nu}({}^{*}\mu^{*}+\mu^2/2+\lambda\mu-\nu\mu/2)/2+$$

$$\mathrm{e}^{-\mu}({}^{*}\nu^{*}+\dot{\nu}^2/2+2\,{}^{*}\lambda^{*}+3\dot{\lambda}^2/2+\dot{\nu}\dot{\lambda}-\dot{\lambda}\dot{\mu}-\dot{\nu}\dot{\mu}/2)/2=$$

$$(-12\pm5\sqrt{6})/6C_0A^{4\mp\sqrt{6}}+$$

$$(-3\pm\sqrt{6})/6C_5A^{4\mp\sqrt{6}}. \tag{3.4.29}$$

能-动张量的一般形式为

$$^{(m)}T^{\alpha}_{\beta}=(p+\varepsilon)\mu^{\alpha}u_{\beta}-\delta^{\alpha}_{\beta}p. \tag{3.4.30}$$

由(3.4.29)可得能量密度 ε 和压强 p：

$$\varepsilon=(-3\pm\sqrt{6})/2C_0A^{4\mp\sqrt{6}}+$$

$$(5\mp2\sqrt{6})/2C_5A^{4\mp\sqrt{6}}, \tag{3.4.31}$$

$$p=(12\mp5\sqrt{6})/6C_0A^{4\mp\sqrt{6}}+$$

$$(3\mp\sqrt{6})/6C_5A^{4\mp\sqrt{6}}. \tag{3.4.32}$$

ε 和 p 都是 x^0，x^5 和 x^6 的函数. 早期 4 维宇宙的状态方程为

$$\frac{p}{\varepsilon}=\frac{(12\mp5\sqrt{6})C_5+(3\mp\sqrt{6})C_0}{3[(-3\pm\sqrt{6})C_5+(5\mp2\sqrt{6})C_0]}. \tag{3.4.33}$$

我们在得到宏观物体的状态方程的过程中，并没有增加与压强和能量密度有关的其他方程. 这就是说，第 5 维度的几何量在 4 维宇宙的诞生和自然现象的起源问题上都起着重要作用.

(3) 电磁场的能-动张量

电磁场的能-动张量和第 6 维度的几何量有关：

$$^{(em)}T^{0}_{0}=\mathrm{e}^{-\nu}(3\dot{\lambda}\dot{\eta}+\dot{\mu}\dot{\eta})/4c^2+\mathrm{e}^{-\mu}({}^{*}\eta^{*}+\overset{*}{\eta}{}^2/2+3\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta}/2-$$

$$\overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2)/2+\mathrm{e}^{-\eta}[3\,\lambda''+3\lambda'^2+\mu''+\mu'^2/2+$$

$$3\lambda'(\mu'-\eta')/2-\mu'\eta'/2]/2=(2\mp\sqrt{6})/2C_0A^{4\mp\sqrt{6}}$$

$$+(-5\pm2\sqrt{6})/2C_5A^{4\mp\sqrt{6}}.$$

$$^{(em)}T^{1}_{1}={}^{(em)}T^{2}_{2}={}^{(em)}T^{3}_{3}=\mathrm{e}^{-\nu}(\ddot{\eta}+\dot{\eta}^2/2+\dot{\lambda}\dot{\eta}+\dot{\mu}\dot{\eta}/2-$$

$$\dot{\nu}\dot{\eta}/2)/2c^2+\mathrm{e}^{-\mu}({}^{*}\eta^{*}+\overset{*}{\eta}{}^2/2+\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\eta}+\overset{*}{\nu}\overset{*}{\eta}/2-$$

$$\overset{*}{\mu}\overset{*}{\eta}/2)/2+\mathrm{e}^{-\eta}[\nu''+\nu'^2/2+2\lambda''+3\lambda'^2/2+\mu''+$$

$$\mu'^2/2+\lambda'(\nu'+\mu'-\eta')+\nu'(\mu'-\eta')/2-\mu'\eta'/2]/2=$$

$$(3\mp\sqrt{6})/6C_0A^{4\mp\sqrt{6}}+(3\mp\sqrt{6})/$$

$$6C_5A^{4\mp\sqrt{6}}. \tag{3.4.34}$$

值得注意的是方程(3.4.29)和(3.4.34)只含有常数 C_0 和 C_5，不含 C_6. 这表明第 5 维度的物理意义比第 6 维度更普遍. 既然人们认为引力是 4 种相互作用中最早诞生的，那么我们就有理由把第 5 维度看作是有物理意义的——代表质量，而给第 6 维度以电荷的意义. 由 ${}^{(em)}T^{\alpha}_{\alpha}$ 可得 $C_0=(2\mp\sqrt{6})C_5/2$，因此这个场是各向同性辐射场，宇宙中充满了电磁辐射.

电磁场的能-动张量还可以用电磁场张量表示：

$$
{}^{(em)}T^{\alpha}_{\beta}=\frac{1}{4\pi}(-F^{\alpha\lambda}F_{\beta\lambda}+\delta^{\alpha}F^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}/4). \tag{3.4.35}
$$

由(3.4.34)还不能解出(3.4.35)，即使电磁场张量由 4 维势 A 定义为 $F_{\alpha\beta}=A_{\beta;\alpha}-A_{\alpha;\beta}$，由现在的度规也不可能得到它的解.

不难发现，

$$
T^{\alpha}_{\beta}={}^{(m)}T^{\alpha}_{\beta}+{}^{(em)}T^{\alpha}_{\beta}
$$

满足守恒条件

$$
T^{\alpha}_{\beta;\alpha}=0.
$$

由 C_0 和 C_5 的关系式，可以把状态方程写为

$$
\frac{p}{\varepsilon}=\frac{1}{19}(9\mp2\sqrt{6}). \tag{3.4.36}
$$

在4维宇宙中，我们选择一个适当的时间 τ，标度因子 e^{λ} 可以写为

$$
e^{\lambda}=\{[(-2\mp2\sqrt{6})/C_5]^{1/2}
$$
$$
(4\pm\sqrt{6})(\tau+K)/5\}^{(6\pm4\sqrt{6})/15}.
$$

常数 K 包含 x^5_c 和 x^6_c. 由于我们的宇宙正在膨胀，所以 e^{λ} 表达式中应均有上面的符号. 状态方程为

$$
\frac{p}{\varepsilon}=\frac{1}{19}(9-2\sqrt{6})\approx0.2,
$$

这表明宇宙充满了热气体[18]. 由此我们得出结论，电磁辐射和热气体是早期宇宙的两个主要成分.

宇宙标度因子还显示 C_5 应取负号，因此第 5 维坐标是类空的.

2. 球对称引力场

为了说明自然现象的起源，我们把上述观点运用于球对称引

力场.

(1) 度规

度规的一般形式为

$$ds^2 = e^{\nu} dx^{0^2} - e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - e^{\mu} dx^{5^2} - e^{\eta} dx^{6^2}. \tag{3.4.37}$$

式中 ν, λ, η 是 x^0, $x^1(=r)$, x^5 和 x^6 的函数, x^2 和 x^3 分别为 θ 和 φ. 由前面的讨论可知, 第 5 维、第 6 维应是类空的, 不为零的爱因斯坦张量有 12 个, 它们是 ${}^{(6)}G_0^0$, ${}^{(6)}G_1^0$, ${}^{(6)}G_5^0$, ${}^{(6)}G_6^0$, ${}^{(6)}G_1^1$, ${}^{(6)}G_5^1$, ${}^{(6)}G_6^1$, ${}^{(6)}G_2^2(={}^{(6)}G_3^3$, ${}^{(6)}G_5^5$, ${}^{(6)}G_6^5$, ${}^{(6)}G_6^6)$. 目前还没有找到真空场方程 ${}^{(6)}G_b^a=0$ 的解, 下面的讨论将给出这个可能解必须满足的一些条件.

(2) 宏观物体的能-动张量

宏观物体的能-动张量在 5 维引力中的形式已在文〔13〕中讨论过. 6 维引力理论中所有张量方程都与 5 维的不同, 这是只给出球对称引力场的状态方程:

$$p = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{c^4}{48\pi G}\dot{\nu}\dot{\lambda}e^{-\mu}. \tag{3.4.38a}$$

(3) 电磁场的能-动张量

电磁场能-动张量的不为零分量为

$$\begin{aligned}
{}^{(em)}T_0^0 = {} & \frac{1}{4c^2}(\mu+\lambda)\eta e^{-\nu} - e^{-\lambda}\Big[\frac{1}{2}\eta'' + \frac{1}{4}\eta'^2 + \\
& \frac{1}{4}(\mu'-\lambda')\eta' + \frac{1}{r}\eta'\Big] - \frac{1}{2}e^{-\mu}\Big[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \\
& \frac{1}{2}(\dot{\lambda}-\dot{\mu})\dot{\eta}\Big] - \Big\{\ddot{\lambda} + \ddot{\mu} + \frac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2) + \\
& \frac{1}{2}[\lambda\mu - \eta(\lambda+\mu)]\Big\},
\end{aligned}$$

$${}^{(em)}T_1^0 = \frac{-1}{2c}e^{-\nu}\Big[\eta' + \frac{1}{2}\eta\eta' - \frac{1}{2}\nu'\eta\Big],$$

$$\begin{aligned}
{}^{(em)}T_1^1 = {} & \frac{1}{2c^2}\Big[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}(\nu-\mu)\dot{\eta}\Big] - \Big[\frac{1}{4}(\nu'+\mu')\eta' + \\
& \frac{1}{r}\eta'\Big]e^{-\lambda} - \frac{1}{2}\Big[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\nu}-\dot{\mu})\dot{\eta}\Big]e^{-\mu},
\end{aligned}$$

$$
{}^{(em)}T_2^2 = {}^{(em)}T_3^3 = \frac{1}{2c^2}\left[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}(\dot{\lambda}-\dot{\nu})\right]e^{-\nu} -
\frac{1}{2}\left[\eta'' + \frac{1}{2}\eta'^2 + \frac{1}{2}\mu'\eta' + \frac{1}{2}\eta'(\nu'-\lambda') + \frac{1}{r}\eta'\right]e^{-\lambda} -
\frac{1}{2}\left[\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\eta} + \frac{1}{2}\dot{\eta}(\dot{\nu}-\dot{\mu})\right]e^{-\mu} -
\frac{1}{2}\left[\ddot{\nu} + \ddot{\lambda} + \ddot{\mu} + \frac{1}{2}(\dot{\nu}^2+\dot{\lambda}^2+\dot{\mu}^2) + \frac{1}{2}\dot{\nu}(\dot{\lambda}-\dot{\eta}) + \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu}-\dot{\eta}) + \frac{1}{2}\dot{\mu}(\dot{\nu}-\dot{\eta})\right]e^{-\eta}. \tag{3.4.39}
$$

由方程(3.4.35)可以得到

$$
\begin{aligned}
&F_{01}=0,\ F_{23}=0,\ F^{02}F_{03}=-F^{12}F_{13},\\
&F^{02}F_{02}-F^{03}F_{03}+F^{12}F_{12}-F^{13}F_{13}=0,\\
&{}^{(em)}T_0^0=-{}^{(em)}T_1^1=\frac{-1}{4\pi}(-F^{02}F_{02}+F^{13}F_{13}),\\
&{}^{(em)}T_1^0=\frac{-1}{4\pi}(F^{02}F_{12}+F^{03}F_{13}),\\
&{}^{(em)}T_2^2={}^{(em)}T_3^3=0.
\end{aligned} \tag{3.4.40a}
$$

一个可能的球对称解应该满足(3.4.40).

从推广的麦克斯韦方程可以得到 4 维矢量 J^{α}. 它满足连续性方程

$$
J^{\alpha}_{;\alpha}=0.
$$

它的各分量为

$$
\begin{aligned}
&J^0=-\frac{\cos\theta F_{02}e^{-\nu}}{r^2\sin\theta},\ J^1=\frac{\cos\theta F_{12}e^{-\lambda}}{r^2\sin\theta},\\
&J^2=\frac{e^{-\nu}}{r}\frac{\partial F_{02}}{\partial x^0}+\frac{(\dot{\lambda}-\dot{\nu})F_{02}e^{-\nu}}{2cr^2}-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}\frac{\partial F_{12}}{\partial x^1}+\frac{(\lambda'-\nu')F_{12}e^{-\lambda}}{2r^2},\\
&J^3=\frac{e^{-\nu}}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial F_{03}}{\partial x^0}+\frac{(\dot{\lambda}-\dot{\nu})F_{03}e^{-\nu}}{2c(r\sin\theta)^2}-\frac{e^{-\lambda}}{(r\sin\theta)^2}\frac{\partial F_{13}}{\partial x^1}+\frac{(\lambda'-\nu')F_{13}e^{-\lambda}}{2(r\sin\theta)^2}.
\end{aligned} \tag{3.4.41}
$$

当我们取 $F_{03}=F_{13}=0$ 时，方程(3.4.40)变为

$$F_{02}^{2}=4\pi r^{2}e^{\nu}\,{}^{(em)}T_{0}^{0},$$
$$F_{12}^{2}=4\pi r^{2}e^{\lambda}\,{}^{(em)}T_{0}^{0},$$
$$[{}^{(em)}T_{1}^{0}]^{2}=e^{\lambda-\nu}[{}^{(em)}T_{0}^{0}]^{2}. \tag{3.4.40b}$$

由于 ν, λ, μ, η 都只是 x^0, x^1, x^5 和 x^6 的函数，与 x^2 和 x^3 无关，所于能-动张量 T_β^α 也只是 x^0, x^1, x^5 和 x^6 的函数. 于是这个场一定是球对称的. 方程(3.4.40b)通过 ${}^{(em)}T_0^0$ 也代表了一个围绕球对称物质的电磁场.

由能量动量守恒定律还可以得到一些关系式. 由 $T_{0;\alpha}^{\alpha}=0$ 得到

$$\frac{\partial T_0^0}{\partial x^0}-\frac{1}{2c}\lambda(T_1^1-T_0^0)-
e^{\nu-\lambda}\left[\frac{\partial T_1}{\partial r}+\left(\frac{3}{2}\nu'-\frac{1}{2}\lambda'+\frac{2}{r}\right)T_1^0\right]=0.$$

由 $T_{1;\alpha}^{\alpha}=0$ 得到

$$\frac{\partial T_1^0}{\partial x^0}-\frac{1}{2c}(\nu+\lambda)T_1^0+\frac{\partial T_1^1}{\partial r}+\left(\frac{\nu'}{2}+\frac{2}{r}\right)T_1^1,
-\frac{1}{2}\nu' T_0^0-\frac{2}{r}T_2^2=0. \tag{3.4.42}$$

3. 结论

上面的讨论说明，第 5、第 6 维度的数学量可以解释 4 维宇宙中的物理性质.

第 1 段讨论使我们有可能研究一些物理量的起源；第 2 段讨论使我们能够研究自然现象的起源. 我们把 ${}^{(6)}G_5^5$ 分为 ${}^{(4)}G_5^5+H_5^5+I_5^5$，把 ${}^{(6)}G_6^6$ 分为 ${}^{(4)}G_6^6+H_6^6+I_6^6$，再由 ${}^{(6)}G_b^a=0$，得到关系式

$${}^{(4)}G_a^a=2\,{}^{(4)}G_5^5=2\,{}^{(4)}G_6^6,$$
$$H_a^a=-H_5^5+3H_6^6. \tag{3.4.43}$$

文献〔17〕已指出，式(3.4.43)可导致和(3.4.38a)一致的状态方程：

$$\epsilon-3p=H_5^5-3H_6^6. \tag{3.4.38b}$$

对 ${}^{(6)}G_5^5$ 和 ${}^{(6)}G_6^6$ 有约束关系

$$I_5^5=3I_6^6, \tag{3.4.38c}$$

此式导致电磁场能-动张量是零迹的，即

$$^{(em)}T^{\alpha}_{\alpha}=0.$$

关系式(3.4.38a～c)也许能在 4 维宇宙的物理性质和引力-电磁场的状态方程中得到体现. 在特殊情况下，$e^{\mu}=e^{\nu}=1$，$\dot{\nu}(=-\dot{\lambda})=\nu(=-\lambda)=0$，度规(3.4.37)是静态的，此时 4 维史瓦希解的 6 维模拟解满足方程$^{(6)}G^{\gamma}_{j}=0$. 在同样情况下，4 维 R-N 解的 6 维模拟解满足$^{(6)}G^{a}_{b}=0(a\geqslant 5，b\geqslant 5)$，但不满足$^{(6)}G^{\alpha}_{\beta}=0$.

为了研究引力和电磁力，我们引入了第 5 维和第 6 维坐标时带了 G 和 e，就像爱因斯坦引入第 4 维时间坐标时带了常数 c 一样.

§3.5 Einstein-Kartan 宇宙

本节讨论在 Einstein-Kartan 理论中的 Fridman 宇宙模型. 讨论这一模型相对于宇宙常数 λ 和空间曲率变化的结构稳定性，研究保守系和非保守系(考虑粘滞性)的情况.

R-W 度规为

$$ds^2=dt^2-a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)\right]. \tag{3.5.1}$$

设引力场源是有旋理想流体，则有

$$\varepsilon-\frac{A}{a^6}=-\Lambda+\frac{3k}{a^2}+\frac{3\dot{a}^2}{a^2}, \tag{3.5.2}$$

$$p-\frac{A}{a^6}=\Lambda-\frac{2\ddot{a}}{a}-\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{k}{a^2}+\frac{2\alpha\dot{a}}{a}. \tag{3.5.3}$$

式中 α 是体粘滞系数(滑动粘滞系数不考虑，因为宇宙是各向同性的)，$A=\kappa^2S_0^2a_0^2/4$，S_0 和 a_0 是现在宇宙的参量. 采用单位系 $c=1$，$\kappa=\frac{8\pi G}{c^4}=1$.

利用态方程 $p=\gamma\varepsilon$，$0\leqslant\gamma\leqslant 1$，则上面二式可化为振动方程

$$\ddot{x}-\alpha\dot{x}-D^2\Lambda x/3+D(D-1)kx^{1-2/D}-D(3-D)Ax^{1-6/D}/3=0. \tag{3.5.4}$$

式中 $x=a^{D(\gamma)}$，$D=3(1+\gamma)/2$.

方程(3.5.4)在相空间(x, x)中构成动力学方程组：

$$x=y,$$
$$y=D^2\Lambda x/3+\alpha y-D(D-1)kx^{1-2/D}+$$
$$D(3-D)Ax^{1-6/D}/3. \qquad (3.5.5)$$

对于我们所研究的特殊情况(辐射 $D=2$ 和尘埃 $D=3/2$)上述方程组分别具有形式

辐射 $D=2$：$x=y$，

$$y=4\Lambda x/3+\alpha y-2k+2Ax^{-2}/3; \qquad (3.5.6)$$

尘埃 $D=3/2$：$x=y$，

$$y=3\Lambda x/4+\alpha y-3kx^{-1/3}/4+3Ax^{-3}/4. \qquad (3.5.7)$$

我们借助于定性分析动力学系统的方法，来研究(3.5.6)和(3.5.7)相对于 Λ 项和空间曲率的结构稳定性. 假定所研究的微分方程组中的参量有一个微小的扰动，并要求相的几何形状的拓扑不变性.

$\alpha=0$ 时，(3.5.5)具有哈米顿

$$H(x, y)=-y^2/2+D^2\Lambda x^2/6-D^2kx^{2-2/D}/2-$$
$$D^2Ax^{2-6/D}/6.$$

这个哈米顿的相曲线 $H(x, y)=\mathrm{const}$ 对应于(3.5.5)($\alpha=0$)的第一积分：

$$y^2/2+(-D^2\Lambda x^2/6+D^2kx^{2-2/D}/2+D^2Ax^{2-6/D})/6=C.$$

我们在相平面上描述平直宇宙($k=0$)中系统的解. 对于 $\Lambda>0$(见图 5-4 中的(a))：

$$x=y,$$
$$y=D^2\Lambda x/3+D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D=2: \quad y^2/2=C+2\Lambda x^2/3-2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2: \quad y^2/2=C+3\Lambda x^2/8-3Ax^{-2}/8.$$

对于 $\Lambda=0$(见图 5-4 中的(b))：

$$x=y,$$
$$y=D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$

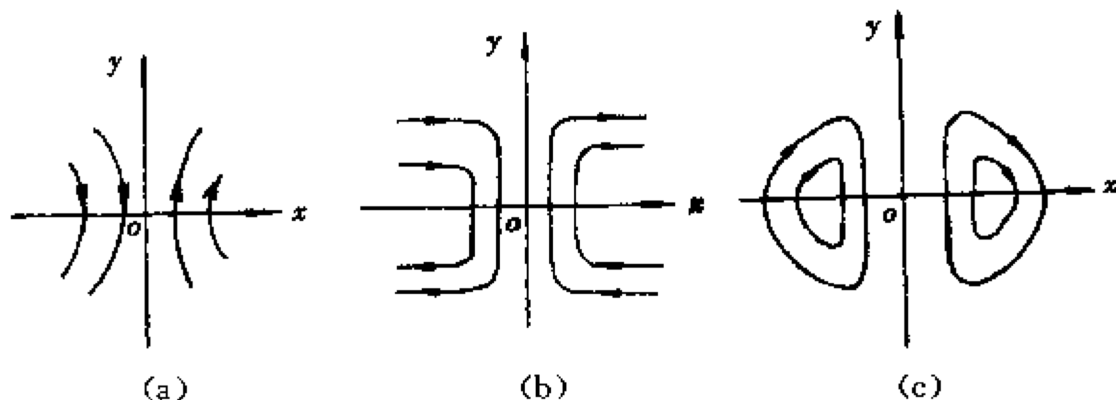


图 5-4

$$D=2: \quad y^2/2=C-2Ax^{-1}/3,$$

$$D=3/2: \quad y^2/2=C-3Ax^{-2}/8.$$

对于 $\Lambda<0$(见图 5-4 中的(c)):

$$\dot{x}=y,$$

$$\dot{y}=-D^2|\Lambda|x/3+D(3-D)Ax^{1-6D}/3;$$

$$D=2: \quad y^2/2=C-2|\Lambda|x^2/3-2Ax^{-1}/3,$$

$$D=3/2: \quad y^2/2=C-3|\Lambda|x^2/8-3Ax^{-2}/8.$$

由图 5-4 中可以看到,在平直宇宙的情况下,宇宙常数的变化引起相平面结构的本质变化.值 $\Lambda=0$ 是参量的相值,我们得到结论,在 Λ 的零值附近宇宙模型相对于小的变化具有结构不稳定性.

现在讨论弯曲效应.当 $\Lambda\neq0$,很容易证明,相的形象与平直模型没有区别.对于闭合宇宙($k=+1$),当 $\Lambda=0$(见图 5-5 中的(c)):

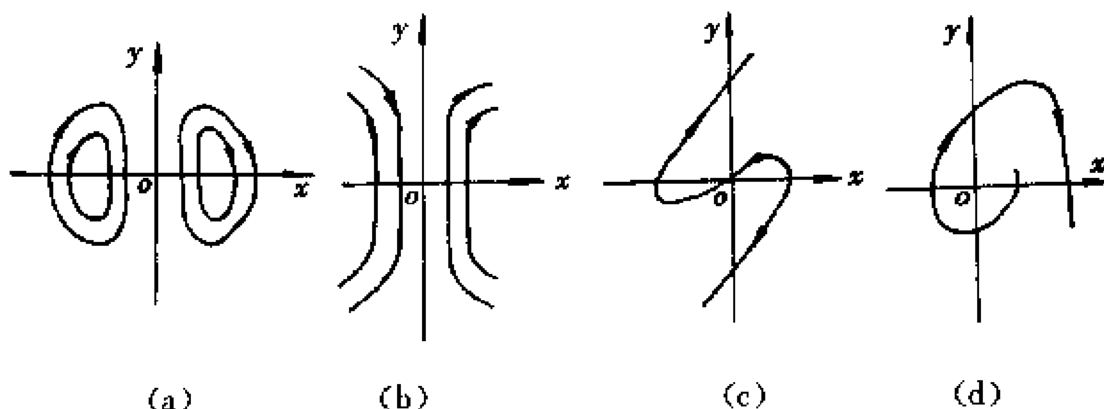


图 5-5

$$x=y,$$
$$y=-D(D-1)x^{1-2/D}+D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D=2: y^2/2=C-2x-2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2: y^2/2=C-9x^{2/3}-3Ax^{-2}/8.$$

对于开放的宇宙($k=-1$)，当 $\Lambda=0$(见图 5-5 中的(b))：

$$x=y,$$
$$y=D(D-1)x^{1-2/D}+D(3-D)Ax^{1-6/D}/3;$$
$$D=2: y^2/2=C+2x-2Ax^{-1}/3,$$
$$D=3/2: y^2/2=C+9x^{2/3}/8-3Ax^{-2}/8.$$

因此，当 $\Lambda=0$ 时，弯曲效应改变了相平面的结构．换言之，平直模型相对于空间曲率的变化是结构不稳定的．

现在讨论考虑体粘滞系数的宇宙系统的一些解．方程组(3.5.5)是非线性的，具有复杂的奇点．对于闭合宇宙($k=+1$)，在 $\Lambda=0$ 的情况下，容许应用线性化程序．

对于辐射($D=2$)：

$$x=y,$$
$$y=\alpha y-2+2Ax^{-2}/3.$$

在具有物理意义的区域 $x\geqslant 0$，奇点是

$$x_0=\sqrt{A/3}.$$

线性化方程

$$\bar{x}-\alpha\dot{\bar{x}}+4\bar{x}\sqrt{A/3}/3=0$$

有解
$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t},$$
$$y=C_1\kappa_1e^{\lambda_1 t}+C_2\kappa_2e^{\lambda_2 t}.$$

式中 λ_1 和 λ_2 是特征方程

$$\lambda^2-\alpha\lambda+4\sqrt{3/A}=0$$

的根，κ_1 和 κ_2 是“分布系数”方程

$$\kappa^2-\alpha\kappa+4\sqrt{3/A}=0$$

的根．

对于相平面上的解，可以考虑下面的情况：

1. λ_1 和 λ_2 是实的，且同号

$$\lambda_{1,2}=(\alpha\pm[\alpha^2-16\sqrt{3/A}]^{1/2})/2,$$

α 满足 $A>A_\alpha=768/\alpha^4$. 这时有 $\lambda_1>\lambda_2>0$，且存在新的变量(ξ, η)，使$\frac{d\xi}{dt}=\lambda_1\xi$，$\frac{d\eta}{dt}=\lambda_2\eta$，$\eta=C\xi^a$，$a=\lambda_2/\lambda_1$. 初始坐标是不稳定节点类型的奇点.

方程组的通解(见图 5-5 中的 a)为

$$x(t)=x_0+C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}.$$

2. 根 λ_1 和 λ_2 是复共轭的

当 $0<A<A_\alpha$，$A_\alpha=768/\alpha^4$ 时出现这种情况，此时有

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(\alpha\pm i[-\alpha^2+16\sqrt{3/A}]^{1/2})=a+ib.$$

奇点(0，0)是不稳定的焦点. 由于当 $\bar{x}$，y 是实的时 ξ 和 η 是复共轭，故可引入中间变换

$$\lambda_1=a_1+ib_1,\ \lambda_2=a_1-ib_1,$$

$$\xi=u+iv,\ \eta=u-iv,$$

在极坐标系中我们得到对数螺线簇

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{a_1}{b_1}r,\ r=C\exp\left(\frac{a_1}{b_1}\varphi\right).$$

当过渡到相平面($\bar{x}$，y)时，螺线变形(见图 5-5 中的 b). 通解为

$$x(t)=x_0+Ce^{a_1 t}\sin(b_1t+c_1),$$

$$a_1=\mathrm{Re}\lambda,\ b_1=\mathrm{Im}\lambda.$$

3. 当 $A=A_\alpha=768/\alpha^4$，临界点是不稳定的节点

通解为 $x(t)=x_0+\exp(\alpha t/2)(C_1t+C_2)$.

在尘埃的情况下，奇点 $x_0=A^{3/8}$. 线性化方程为

$$\ddot{\bar{x}}-\alpha\dot{\bar{x}}+2\bar{x}\sqrt{1/A}=0.$$

特征方程

$$\lambda^2-\alpha\lambda+2\sqrt{1/A}=0$$

的根为

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}[\alpha\pm(\alpha^2-8\sqrt{1/A})^{1/2}].$$

相的形象类似于辐射的情况($A_{c}=64/\alpha^{4}$).

现在讨论当 $t\to\infty$ 时系统的渐近行为. 正如由相的形象看到的,当 $\Lambda<0$, $\alpha=0$,在闭合宇宙的情况下系统是周期性的,不具有渐近行为. 当 $t\to\infty$ 时具有 $\Lambda>0$,$\alpha=k=0$ 的动力学系统由方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}-D^2\Lambda x/3=0$$

描述,而渐近由下式表述:

$$x(t)=C_1\exp(\sqrt{D^2\Lambda/3}t)+C_2\exp(-\sqrt{D^2\Lambda/3}t).$$

相应地,当 $\Lambda=0$, $\alpha=k=0$, 系统由方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

描述,渐近为

$$x(t)=C_1t+C_2.$$

当 $\Lambda=\alpha=0$, $k=-1$, 由方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}=2,\ D=2$$

描述,渐近为

$$x(t)=(t-t_0)^2.$$

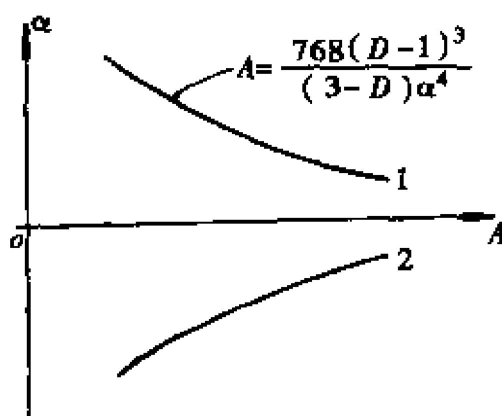


图 5-6

现在,对于恒定体粘滞系数 $\alpha=\text{const}$,我们建立奇点的相图. 半平面(A,α)上任一点对应一个宇宙模型,式中

$$A=\frac{768(D-1)^3}{(3-D)\alpha^4}.$$

区域 $\alpha>0$ 对应于不稳定的节点(曲线 1 的上方)和焦点(曲线 1 和轴 OA 之间),$\alpha<0$ 的区域对应于稳定的节点(曲线 2 下方)和焦点(曲线 2 和轴 OA 之间). 奇点的种类由系统的线性化矩阵的本征值确定. 如果体粘滞系数是某个参量 δ(比如态方程中的 γ)的函数,则 δ 的变化引起线性化矩阵行列式的变化. 由图可见,当参量 δ 取某些值(相图的大小)时,曲线由一种类型奇点的区域过渡到另一种类型奇点的区域. 由图可见,结构稳定性的要求导致研究非零粘滞系数的必要性. 因此,在这类解中,粘滞系数是稳

定性的要素.

对本节的讨论作一小结：

(1) 所讨论的模型对于宇宙项的变化(在 $\Lambda=0$, $\alpha=0$)是结构不稳定的.

(2) 具有 $k=\Lambda=0$ 的模型对于空间曲率 k 的变化(在 $\alpha=0$)是结构不稳定的.

(3) 宇宙常数是相图参量. 这说明即使宇宙项很小，对于比较不同的理论模型和真实宇宙也起着重要作用. 因此，在研究真实宇宙时，必须考虑非零的宇宙项.

§3.6 Dirac 假设

把自然界中的常数作一些组合，按数量级有如下关系：

$$\frac{Rm_ec^2}{e^2}\sim\frac{e^2}{Gm_e^2}\sim\frac{hc}{Gm_pm_e}\sim\left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/2}\sim10^{40}. \qquad (3.6.1)$$

式中 R 和 M 分别为现在的宇宙半径和相应的宇宙总质量. Dirac 认为这些数值关系不是偶然的，是宇观量和微观量之间存在某种联系的结果. 这实际上可认为是马赫原理的推广. 就是把以局部物理规律为基础的惯性系作为宇宙普适参考系.

比如膨胀宇宙，R 随时间变化. 由(3.6.1)第一式可知，如果设微观常数不变，则引力常数 G 就要随时间变化:$G\sim R^{-1}$；如果假设 G 不变，则 $e\sim R^{1/4}$. 若 e 随时间变化，则宇宙过去的原子光谱的精细结构就会改变. 由于铀等重原子核的静电能及 α 衰变几率不同，所以原子核的衰变方式和寿命也会改变. 这样，用放射性元素综合确定宇宙年龄的方法就会与用其他方法测得的结果不一致. 如果 G 随时间变化，则对恒星年龄有一定影响. 现在还没有足够证据来否定这些可能的变化.

§3.7 奇点定理

在§3.3中已指出，物理上合理的宇宙模型(弗里德曼宇宙

和毕安基型宇宙)都存在类空奇点. 通常人们是不喜欢有奇点的模型的，因此总要设法避免奇点. 那么，是否可以通过与高度对称性的偏离或其他途径避免奇点呢？了解下面的定理是有益的.

根据第二篇(3.11.24)，

$$u_{\mu;\nu}=\omega_{\mu\nu}+\sigma_{\mu\nu}+\frac{1}{3}\theta(g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu)-u_\mu u_\nu. \qquad (3.7.1)$$

将上式代入恒等式

$$(u_{\mu;\nu;\tau}-u_{\mu;\tau;\nu})g^{\mu\tau}u^\nu=-R_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \qquad (3.7.2)$$

并利用场方程，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}=-\frac{\theta^2}{3}-\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}-k(3p+\rho)+\omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}+u^\mu_{;\mu}. \qquad (3.7.3)$$

假设 $\rho+3p\geqslant 0$， (3.7.4)

则当旋速度和加速度等于零时由(3.7.3)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{\theta}\right)\geqslant\frac{1}{3}. \qquad (3.7.5)$$

由此可知，若 $\theta>0$，则 θ^{-1} 在过去的某一时刻为零；若 $\theta<0$，则 θ^{-1} 在将来的某一时刻为零. 由于膨胀速度 θ 是体积相对变化的量度，因此我们得到定理：在场源物质无旋、无加速且满足(3.7.4)的模型中一定存在奇点. 在弗里德曼模型中 $\theta=3R/R$，这一奇点恰与 $R=0$ 对应.

如果物质本身有旋，但宇宙空间中存在无旋的类时短程线簇，仍能得到类似的结论. 我们熟知，两个指向未来的类时单位矢 u^μ 和 v^μ，总满足 $u^\mu v_\mu\leqslant 1$. 由此根据场方程得到

$$R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu\geqslant k(\rho+3p)/2. \qquad (3.7.6)$$

根据满足这些条件的短程线，同样得到不等式(3.7.5). 物理上试验粒子行为的奇异性对应于数学上空间的奇异性.

作为上述定理的推广，可以证明，如果宇宙在某段时间内是均匀的(具有一个空间运动群)，对应的初值问题在初始曲面上有惟一解，且所有类时(或零)矢量 v^μ 都满足条件 $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu>0$，则宇宙一定存在一奇点.

4 宇宙的暴胀

§4.1 大爆炸宇宙模型的成就和困难

大爆炸宇宙模型成功地解释了自 $t=10^{-2}$s(轻核形成)至 $t=10^{10}$年(现在)宇宙演化阶段的观测事实. 其中包括元素的起源(氦丰度测量), 星系光谱的宇宙学红移, 3°K 微波背景辐射, 星系计数, 宇宙大尺度的均匀各向同性等. 因此, 大爆炸宇宙模型是普遍被人们所接受的. 与其他宇宙模型相比, 它是最成功的宇宙模型, 所以人们称之为**标准宇宙模型**.

然而, 大爆炸宇宙模型也有它的困难. 就是在 $t=0$(大爆炸奇点)到 $t=10^{-10}$s 这一极早期演化阶段中的四个问题:奇点问题, 视界问题, 平直性问题, 磁单极问题.

第一个问题是奇点问题. 正如上一章最后一节所论证的, 根据爱因斯坦引力理论和宇宙学原理, 以及哈勃定律和强能量条件 $(\rho+3p)\geqslant 0$, 必然导致一个结论:宇宙必然存在一个内禀的过去类空奇点($t=0$, $R=0$). 在奇点处, 温度、能量和物质密度都等于无限大, 这是没有物理意义的, 是物理学家最讨厌的. 这一问题(宇宙的创生)我们留在下一章(量子宇宙学)详细讨论.

后面三个问题(视界问题、平直性问题、磁单极问题)都可以由宇宙暴胀(inflation)的引入而得到解决.

为了说明这三个问题的内容, 我们首先对极早期宇宙作一简单的讨论.

我们考虑 $10^{-10}\text{s}>t>t_p\sim 10^{-43}$s 这一宇宙演化的极早期, 这

时对应的宇宙温度为 $T_p \sim 10^{32}\mathrm{K} > T > 10^{15}\mathrm{K}$，相应的能标为 $m_p \sim 10^{19}\mathrm{Gev} > E > 10^{2}\mathrm{Gev}$. 这时宇宙处于辐射为主的时期，与极端相对论粒子的情况相同，都有

$$p = \frac{\rho}{3}, \ \rho \sim [R(t)]^{-4}. \tag{4.1.1}$$

由此可得 $p \sim [R(t)]^{-4}$, $p[R(t)]^4 = \lambda = \mathrm{const}.$ (4.1.2)

由于 $TR(t) = \mathrm{const}$，可知

$$\rho \sim T^4. \tag{4.1.3}$$

考虑到极端相对论粒子的静止质量为零，由量子统计得到[20]

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} N(T) T^4. \tag{4.1.4}$$

式中 $N(T) = N_b + \frac{7}{8} N_f$，$N_b$ 和 N_f 分别为玻色子和费米子的手征态数目. 熵密度为

$$s = \frac{4}{3}\rho/T = \frac{2\pi^2}{45} N(T) T^3, \tag{4.1.5}$$

粒子数密度为

$$n = \frac{\zeta(3)}{\pi^2}\left(N_b + \frac{3}{4} N_f\right) T^3. \tag{4.1.6}$$

式中 $\zeta(3)$为 Riemam-Zeta 函数. 由(2.6.5)和(4.1.1)得到

$$\frac{\dot{R}^2(t)}{R^2(t)} = H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{R^2(t)} \approx \frac{8\pi}{3}\frac{\lambda}{R^4(t)}, \tag{4.1.7}$$

积分得 $$R(t) = \left(\frac{32\pi\lambda}{3}\right)^{1/4} t^{1/2}. \tag{4.1.8}$$

考虑到(4.1.3)，将(4.1.4)代入(2.6.5)，得到

$$\frac{\dot{T}^2}{T^2} + \varepsilon(T) T^2 = \frac{4\pi^3}{45} N(T) T^4,$$

$$\varepsilon(T) = \frac{k}{R^2(t) T^2} = k\left[\frac{2\pi^2}{45}\frac{N(T)}{SR^3(t)}\right]^{2/3}. \tag{4.1.9}$$

类似于得到(4.1.8)，由(4.1.9)得到

$$T = \left[\frac{90}{32\pi^3 N(T)}\right]^{1/4} t^{-1/2}. \tag{4.1.10}$$

下面我们说明标准宇宙模型在宇宙极早期存在的三个问题.

1. 视界问题

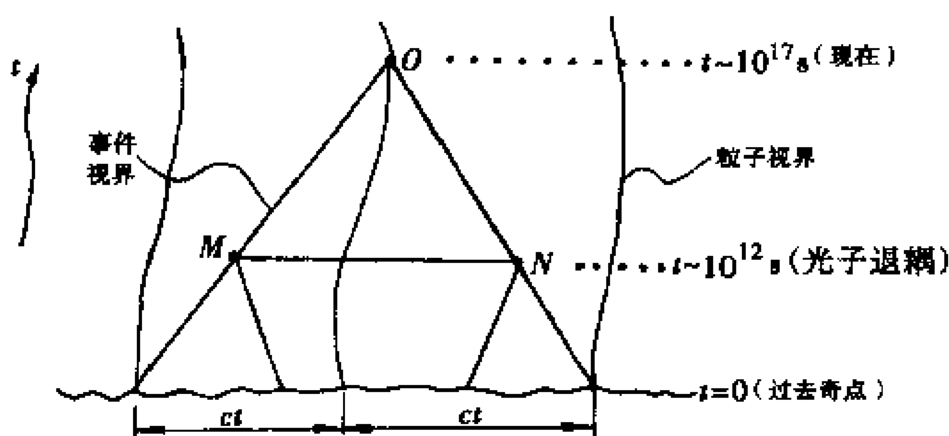


图 5-7

我们现在(图 5-7 中的 O 点)所接收到的宇宙中过去的信息，都只能来自我们的**过去光锥**之内. 如图所示，我们接收到的来自相反方向的两个辐射信号只能发自图中的 M 和 N 两个时空点，这两点的过去光锥并不相交. 由于信息有一个最大传播速度(真空光速 c)，所以在大爆炸起源的宇宙内，在时刻 t，任意两点(如二星系)间的距离大于 $D=2ct$. 这两点在小于 t 的时间内从未发生过因果联系.

$$D=2ct \tag{4.1.11}$$

叫做**视界距离**. 由于视界距离 D 正比于时间 t，而宇宙半径 R 正比于 $t^{1/2}$，故在宇宙极早期($t\ll1$)有 $D<R$. 即视界距离小于宇宙半径. 例如，当 $t\sim10^{-39}$秒时有

$$\frac{R}{D}\sim10^{20}. \tag{4.1.12}$$

这就是说，当 $t\sim10^{-39}$秒时，宇宙中至少存在 10^{20}个无因果联系的区域.

考虑方向相反的两个微波天线，接收到了发自 $t\sim10^{12}$秒时的两个辐射源的微波信号，由于宇宙大尺度的均匀各向同性，这两个辐射源之间的距离应为视界距离的 90 倍. 这当然是不可能的. 所以，**在宇宙极早期，宇宙大尺度的均匀各向同性是和视界的存在不相容的**. 这就是大爆炸宇宙模型的第二个困难——视界问题.

2. 平直性问题(熵疑难)

引入参量 $\Omega=2q_0$，根据 § 2.3 的计算，有

$$\Omega=\frac{\rho_0}{\rho_c}=\frac{8\pi\rho_0}{3H^2}=\frac{4\pi^3N(T)T^2}{45\varepsilon}. \tag{4.1.13}$$

ρ_0 为现在的宇宙物质密度. 由目前观测资料有

$$0.1<\Omega<4,\ \rho_0\leqslant 10\,\frac{3H_0^2}{8\pi}. \tag{4.1.14}$$

在极早期，宇宙物质的熵主要来源于光子和三种中微子. 利用熵守恒，和总熵

$$S_0=S_0R^3(t_0)=\frac{2\pi^2N(T_0)}{45}R^3(t_0)T_0^3,\quad T_0\approx 2.7\mathrm{K},$$

可以得到目前宇宙的总熵

$$S_0\geqslant 10^{90}. \tag{4.1.15}$$

又由(4.1.13)可得

$$\frac{\rho-\rho_c}{\rho}=\frac{45}{4\pi^3N(T)T^2}\left[\frac{k}{R^2(t)T^2}\right]. \tag{4.1.16}$$

考虑到 $t\approx t_p$ 时宇宙的物质状态情况，$N(T)\sim 10^2$，利用式

$$\frac{k}{R^2T^2}=k\left[\frac{2\pi^2}{45}\frac{N(T)}{S}\right]^{2/3}, \tag{4.1.17}$$

可以得到普朗克时期宇宙物质密度 ρ 满足

$$\frac{|\rho-\rho_c|}{\rho}<10^{-58}. \tag{4.1.18}$$

这表明 $\rho\approx\rho_c$，即宇宙极早期已非常平直. 事实上，由于有了式(4.1.15)，才有式(4.1.18)，即极早期宇宙非常平直决定于现在的宇宙有一极大的熵. 那么，为什么宇宙在极早期就已经非常平直了呢?或者说，为什么现在的宇宙有这么大的熵呢?大爆炸宇宙模型给不出任何理由. 这就是所谓平直性问题，也称为熵疑难.

3. 磁单极问题

特哈夫特和玻利亚科夫('tHooft-Polyakov)曾证明，任何一个单群[例如 $SU(5)$]自发破缺到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$时一定要出现磁单极(非阿贝尔磁单极). 可以证明，磁荷

$$g_{na}=\frac{hc}{e}=2g_a,$$

$$m \sim 10^{16}\text{Gev} \sim 10^{-8}\text{g}.$$

式中 g_{na}和 g_a 分别表示非阿贝尔磁单极和阿贝尔磁单极的磁荷.

磁单极是联结不同西格斯(Higgs)场真空平均值的拓扑结(拓扑孤子). 这表示真空简并或出现畴状真空(真空泡)时，在不同真空泡的交接处要出现磁单极.

每个真空泡(畴)的线度 l，应该不大于因果关联区的长度 D：

$$l \leqslant D = 2ct. \tag{4.1.19}$$

由此可知，磁单极密度 n_m 应满足

$$n_m \sim \frac{1}{l^3} \geqslant \frac{1}{8c^3t^3}. \tag{4.1.20}$$

现在，$t=t_0$，代入上式得到

$$\frac{n_m}{n_\gamma} \geqslant 10^{-12}，n_\gamma \sim 4\times 10^3/\text{cm}^3，$$

$$n_m \geqslant 4\times 10^{-9}/\text{cm}^3 \sim \frac{1}{m_m^3}.$$

于是得到磁单极的质量密度

$$\rho_m = n_m \cdot m_m \geqslant 4\times 10^{-17}\text{g/cm}^3，$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_c} \sim 10^{12}. \tag{4.1.21}$$

但是实际观测的结果是

$$\frac{n_m}{n_\gamma} < 2\times 10^{-28}， \tag{4.1.22}$$

而且 $$0.1 < \frac{\rho_0}{\rho_c} < 4. \tag{4.1.23}$$

理论与实测不一致，这就是大爆炸宇宙模型的第四个困难问题——磁单极问题.

§4.2 宇宙的暴胀

1. 大统一相变

1980 年，麻省理工学院的古什(Alan H. Guth)提出了一个暴胀宇宙模型，1982 年，林德(Linde)等人又作了改进. 暴胀宇宙

模型解决了上节所讲的大爆炸宇宙模型的三个困难问题. 这一模型和大爆炸模型的区别在于，它认为宇宙极早期经历了一个非常短暂而又非常迅速的膨胀阶段. 这一暴胀阶段只持续了大约 10^{-30}s. 在这段时间里宇宙增大了 10^{30}倍. 为什么会出现这样的暴胀呢？由于暴胀宇宙是对原有的大爆炸宇宙模型的改进，所以我们还是从大爆炸模型说起.

按大爆炸宇宙模型，在宇宙的极早期(10^{-43}s～10^{-35}s)，宇宙处于超高能状态(10^{19}～10^{15}Gev)，粒子物理学中的三种基本相互作用(强、电磁、弱)应统一为一个只含一个耦合常数的基本相互作用，这就是大统一理论(GUT). 当能标为 10^{19}～10^{15}Gev 时，$SU(5)$大统一理论成立；当能标～10^{15}Gev 时($t\sim10^{-35}$s，$T\sim10^{28}$K)，$SU(5)$对称性破缺为 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. 至于对称性破缺的原因，规范场理论认为关键在于真空. 场方程的对称性总是保持的，真空的对称性破缺(真空简并，不惟一，出现畴状真空)引起不可观测到的物理规律的对称性破缺.

理论上，用一个标量场 φ(Higgs 场)的基态来描述真空. 考虑到真空涨落(单圈)和温度效应后，宇宙的有效势(西格斯有效势)如图 5-8 所示.

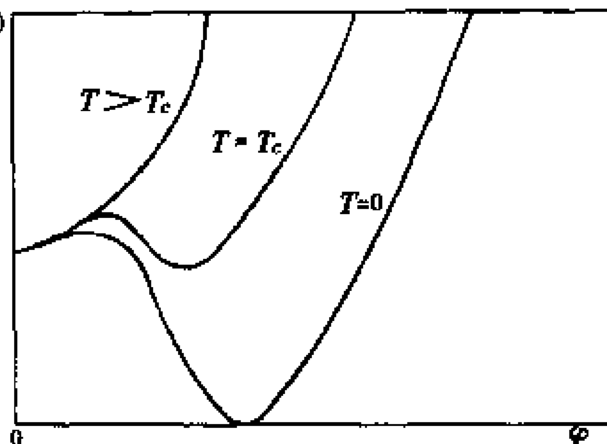


图 5-8

暴胀宇宙模型的主要思想是，宇宙在大统一时间($t\sim10^{-35}$s)附近发生的对称性破缺相变是一级相变. 如图所示，在零温($T=0$)时，$\varphi=\sigma$，$V(\varphi)$有一个整体极小，这是一个对称真空——**真真空**. 对于现在，非零温($T\approx2.7$K)，宇宙这一标量场围绕真真空值有一微小的涨落($\lesssim10^{-45}$Gev). 有效势 V 和宇宙常数 λ 之间存在关系式

$$\lambda=8\pi V(\sigma). \tag{4.2.1}$$

由于现在 λ 很小，所以可设 $V(\sigma)=0$. 另外，$T=0$ 的有效势还有

一个局部极小 $V|_{\varphi=0}$，这是一个**假真空**.

设发生一级相变的温度为 T_c，即当 $T\gtrsim T_c$ 时，$V(\varphi)$有一整体极小；当 $T\to T_c$ 时，在 $\varphi\neq 0$ 处出现一个极小，其有效势的值与假真空的相近，在 $T=T_c$ 时这两个极小是简并的. 在 $T\ll T_c$ 的情况下，自发对称破缺($\varphi=\sigma$)的极小为有效势的整体极小. $SU(5)$ 大统一理论的有效势恰好具有上述性质. 这就是说，当 $T\gg T_c$ 时，$\varphi=0$ 为有效势的整体极小；温度继续降低，一直到 $T\gtrsim T_c$ 之前，宇宙一直处于 $\varphi=0$ 的假真空态，并按大爆炸模型($R\sim t^{1/2}$)演化. 当 $T<T_c$ 时，对称破缺的真真空态对应的极小($\varphi=\sigma$)远小于假真空态对应的极小($\varphi=0$)，真空能量密度远大于辐射能量密度，于是宇宙处于假真空过冷状态(亚稳态)，最后因低温破缺态的泡的自发形成而衰变，借助于量子隧道效应，贯穿势垒，宇宙由假真空态跃迁到真真空态，放出潜能 ρ_0，实现一级相变. 当 $T_H<T<T_c$(式中 $T_H=H/2\pi k$ 是 Hawking 辐射温度)时，可证明真空能密度 ρ_v 远大于辐射能密度 ρ_γ，宇宙物质密度 $\rho=\rho_v+\rho_\gamma\approx\rho_v=\text{const}$. 此常数值即 $V(0)$，由大统一理论确定. 略去曲率项，弗里得曼方程为

$$\frac{R}{R}=(8\pi G\rho_v/3)^{1/2},\tag{4.2.2}$$

积分得 $R(t)\sim e^{Ht}$,

$$H=(8\pi G\rho_v/3)^{1/2},\tag{4.2.3}$$

即当处于亚稳态的假真空时，宇宙按指数规律暴胀(过冷的暴胀阶段).

由连续性方程

$$\rho=-3(\rho+p)H\tag{4.2.4}$$

代入 $\rho\approx\rho_v=0$，得到

$$p=-\rho\approx-\rho_v=0.\tag{4.2.5}$$

将上式代入(2.1.5)，可知 $R>0$. 正是由于负压强的贡献超过了正能密度的贡献(引力起了斥力的作用)，使得膨胀速度 R 随时间增大. 这和大爆炸模型的情况相反，那里的 ρ 和 p 都是正的，引

力使膨胀速度随时间减小.

2. 慢滚动相

当 $T\approx T_H$ 时，宇宙由假真空向真真空发生量子跃迁，继续以指数形式暴胀. 跃迁后(处于真真空)的宇宙线度 $R\sim10^{-20}$cm，经过滚动相阶段($\tau\sim10^{-32}$s)后，$R>10^{28}$cm，即达到目前可观测的宇宙半径. 这就是说，只需要要求滚动相时空 $\tau>10^{-32}$s，真空泡的半径就大于目前可观测宇宙的半径，即目前我们的可观测宇宙位于一个真空泡(畴内). 这样，磁单极问题就得到了解决.

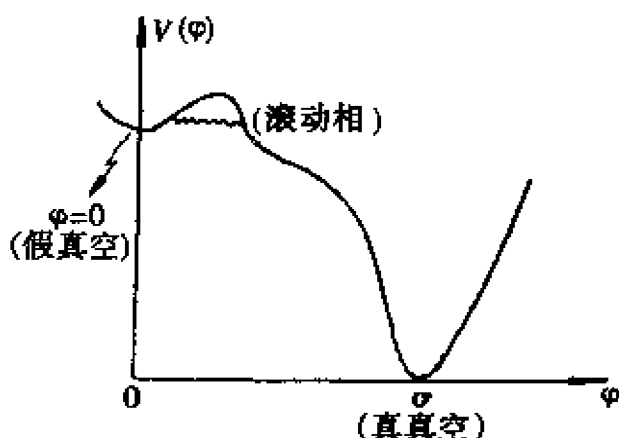


图 5-9

在滚动相后，西格斯场在对称性破缺的稳定真真空 $\varphi=\sigma$ 处发生振荡，出现下列转化：

西格斯粒子→规范粒子，重子，重子数不守恒，γ 光子

真空能→物质能(辐射为主)

指数暴胀($R\sim e^{Ht}$)→标准膨胀($R\sim t^{1/2}$)

随着真空能转化为物质能，宇宙被重新加热(潜热释放)，宇宙温度由 T_{min} 升至 $T_c=T_{GUT}$. 以后宇宙以辐射为主，按标准模型(大爆炸模型)演化.

3. 宇宙熵

由前面的讨论可知，暴胀前和暴胀后(被重新加热)的温度差不多都接近于 T_c，因此暴胀前后宇宙的熵密度之间存在关系

$$S_1\approx S_2. \qquad (4.2.6)$$

由于 $R_2\approx ZR_1$，总熵 $S=R^3S$，所以有

$$S_2=Z^3S_1. \qquad (4.2.7)$$

这样，如果假设暴胀之前总熵 $S_1\sim1$，那么只要 $Z\geqslant10^{28}$(实际上没有上限)，就可知现在宇宙总熵 S_0 满足

$$S_0\approx S_2\geqslant10^{90}. \qquad (4.2.8)$$

这就成功地解释了现在观测到的宇宙总熵比 10^{90}还大这一事实.也就是说，宇宙总熵几乎全部来源于由假真空态向真真空态跃迁直到重新加热的非绝热过程.

设 $t=10^{-39}$秒(宇宙极早期)，可得

$$\left(\frac{D}{R_t}\right)^3=10^{-83}Z^3\sim10^2, \tag{4.2.9}$$

即视界距离大于宇宙半径，成功地解决了视界问题；整个宇宙内各部分之间都可以存在因果联系.

设 $t=t_p=10^{-43}$s(暴胀前)，可得

$$\frac{|\rho-\rho_c|}{\rho}<10^{-58}Z^2\sim10^{-2}. \tag{4.2.10}$$

可见宇宙在极早期($t=t_p$)并不平直，只是经过暴胀阶段(熵骤增)后宇宙才变得很平直，于是平直性困难得到解决.

§4.3 关于宇宙暴胀的补充讨论

上一节我们讨论了暴胀宇宙模型的整体图像，本节将对这一图像的一些细节和一些相关问题做一补充讨论.

(1) 关于'tHooft-Polyakov 磁单极

设背景时空为$(1+D)$维 Minkowski 时空

$$ds^2=dx^{0^2}-\eta_{ik}dx^idx^k, \tag{4.3.1}$$

$$i, k=1, 2, \cdots D.$$

当 $D=3$ 时，对于 Higgs 场(标量场)$\varphi_a(x)$和 Yang-Mills 场 $A_a^\mu(x)$相互作用，拉格朗日具有形式

$$L=-\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{a\mu\nu}+\frac{1}{2}\varphi_{a;\mu}\varphi_a^{;\mu}-\frac{\lambda}{4}\left(\varphi_a\varphi_a-\frac{m^2}{\lambda}\right)^2. \tag{4.3.2}$$

式中 $$F_{a\mu\nu}=A_{\mu a,\nu}-A_{\nu a,\mu}+e\varepsilon_{abc}A_{\mu b}A_{\nu c},$$

$$\varphi_{a;\mu}=\varphi_{a,\mu}+e\varepsilon_{abc}A_{\mu b}\varphi_c.$$

由于 $m^2>0$，所以 $SU(2)$或 $SO(3)$的对称性是自发破缺的.与上式对应的场方程为

$$F_{\mu\nu a}^{\ \ ;\nu}=e\varepsilon_{abc}(F_{\mu\nu b}A_c^\nu-\varphi_{b;\mu}\varphi_c),$$

$$\varphi^{,\mu}_{a,\mu}=e\varepsilon_{abc}\varphi_{b,\mu}A^{\mu}_{c}+m^2\varphi_a-\lambda\varphi_a\varphi^2. \tag{4.3.3}$$

方程(4.3.3)的拓扑孤子解，称为'tHooft-Polyakov 磁单极解，此解可写为球对称形式：

$$e\varphi_a=g(r)\frac{r_a}{r^2},$$

$$A^a_0=0,\ eA^a_i=\varepsilon_{aik}\frac{r_k}{r^2}[1-h(r)]. \tag{4.3.4}$$

将(4.3.4)代入场方程(4.3.3)，得到微分方程

$$r^2g_{,rr}=g(r)[2h^2(r)-m^2r^2+\eta g^2(r)/e^2],$$

$$r^2h_{,rr}=h(r)[h^2(r)-1+g^2(r)]. \tag{4.3.5}$$

(4.3.5)的严格解至今尚未找到. Actor(1979)经分析指出，当$r\to\infty$时，此方程组的解应满足边界条件

$$h(r)\to A(m,\lambda,e)re^{-\beta r},\ \beta=\left(\frac{em}{\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2}; \tag{4.3.6a}$$

$$g(r)\to\left(\frac{me}{\sqrt{\lambda}}\right)r+D(m,\lambda,e)e^{-\sqrt{2}mr}; \tag{4.3.7a}$$

$$A^a_i\to\varepsilon_{ain}\frac{1}{e}\frac{r_n}{r^2}; \tag{4.3.8a}$$

$$\varphi_a\to\frac{r_a}{r}\left[\left(\frac{m}{\sqrt{\lambda}}\right)+\left(\frac{D}{e}\right)\frac{1}{r}e^{-\sqrt{2}mr}\right]. \tag{4.3.9a}$$

当$r\to 0$时有

$$h(r)\to 1+eB(m,\lambda,e)r^2; \tag{4.3.6b}$$

$$g(r)\to eC(m,\lambda,e)r^2; \tag{4.3.7b}$$

$$A^a_i\to-\varepsilon_{ain}r_nB(m,\lambda,e); \tag{4.3.8b}$$

$$\varphi_a\to C(m,\lambda,e)r_a. \tag{4.3.9b}$$

式中A，B，C，D均为常数.

Arafune(1975)指出，与规范势A^a_i的无质量分量G_μ对应的Maxwell张量为

$$F_{\mu\nu}=\hat{\varphi}_aF_{a\mu\nu}=G_{\nu,\mu}-G_{\mu,\nu}-\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}\hat{\varphi}_a\hat{\varphi}_{b,\mu}\hat{\varphi}_{c,\nu}. \tag{4.3.10}$$

式中$G_\mu=\hat{\varphi}_aA^a_\mu$，$\hat{\varphi}_a=\frac{\varphi_a}{\varphi}$，$\varphi=(\varphi_a\varphi_a)^{1/2}$. (4.3.11)

由(4.3.4)得到

$$G_\mu=0, \quad \hat{\varphi}_a=r_a, \tag{4.3.12}$$

代入(4.3.10)，得到 Maxwell 张量的各分量和磁场强度：

$$F_{0\mu}=0, \tag{4.3.13}$$

$$F_{ij}=-\frac{1}{e}\varepsilon_{abc}r_a r_{b,i}\hat{r}_{c,j}, \tag{4.3.14}$$

而

$$\left(\frac{x_b}{r}\right)_{,i}=\frac{1}{r}\delta_{bi}-\frac{2}{r^2}x_i x_b,$$

$$\left(\frac{x_c}{r}\right)_{,j}=\frac{1}{r}\delta_{cj}-\frac{2}{r^2}x_j x_c,$$

所以

$$F_{ij}=-\frac{1}{e}\varepsilon_{ijk}\frac{r_k}{r^3}. \tag{4.3.15}$$

由(4.3.14～15)得到

$$B_i=\frac{g}{r^2}\hat{r}_i. \tag{4.3.16}$$

这正是磁荷 $g=\frac{1}{e}$ 的静止磁单极在 r 处产生的磁场强度. 与狄拉克(Dirac，1931)磁单极的磁荷

$$g_D=\frac{1}{e}\frac{n}{2} \tag{4.3.17}$$

比较可知，'tHooft-Polyakov 磁单极的最小磁荷 g 为 Dirac 磁单极磁荷的 2 倍.

引入磁流 J_μ：

$$J_\mu=\widetilde{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu}. \tag{4.3.18}$$

式中 $\widetilde{F}^{\mu\nu}$为 $F^{\mu\nu}$的对偶张量则显然有

$$J^\mu{}_{,\mu}=0, \tag{4.3.19}$$

即存在积分守恒量(磁荷)：

$$g_m=\frac{1}{e}\oint\frac{\vec{r}\cdot d\vec{s}}{r^3}=\frac{1}{e}\cdot 4\pi n. \tag{4.3.20}$$

式中 n 为积分路径环绕 $r=0$ 的“圈数”. 这一守恒量子数叫做绕数或拓扑荷.

假设 $n\neq 0$ 的闭合面连续变小，如果面内一直没有拓扑奇点，则闭合面将缩为一点，这显然是不可能的. 可见'tHooft-

Polyakov 磁单极位于拓扑奇点或拓扑缺陷处，实际上这就是不同 $SU(2)$[或 SO(3)]真空之间的拓扑结.

2. 关于 $SU(5)$大统一理论和有效势

20 世纪六七十年代，理论物理学家提出了一类统一理论，把弱相互作用，电磁相互作用和强相互作用纳入了一个统一的理论框架，这类理论称为大统一理论(GUT).

按照规范场理论，一切现有的相互作用都是规范相互作用.即用一个单群来描述一个场论的内部对称性，它们在规范变换下具有不变性. 如果群参数与时空有关(把规范变换局域化)，要使场论保持原有对称性，就必须引入与群的生成元个数相同的规范场，这些规范场就是传递对应相互作用的中间玻色子场. 在拉氏量中规范场不能含质量项(为了保持规范不变性)，所以在这类理论中还必须引入一类 Higgs 场，以使规范对称性破缺，从而与我们观察到的物理现象相符.

与电磁相互作用，弱相互作用和强相互作用相对应的对称群分别是 $U(1)$，$SU(2)$和 $SU(3)$. 弱、电磁统一理论是通过规范群

$$SU(2)\times U(1) \tag{4.3.21}$$

实现的. 60 年代末，人们把强相互作用纳入了 $SU(3)$规范场理论，通过规范群

$$SU(3)\times SU(2)\times U(1) \tag{4.3.22}$$

建立子粒子物理中的标准模型理论.

70 年代，Georgi 等人提出将单群 $SU(5)$作为规范群的大统一理论. 由于 $SU(5)$群的秩是 4，恰好等于群(4.3.22)的秩，所以可将(4.3.22)式的规范群嵌入 $SU(5)$中；或者说在一定能量标度时，$SU(5)$的对称性可以破缺到(4.3.22)的对称性.

在规范场论中，由于对称性自发破缺所出现的不对称真空的势能要低于对称真空的势能，这时将导致相变. 下面将指出，这是一种一级相变，在相变过程中将放出潜热. 为了讨论在早期宇宙中的应用，我们首先引人有效势的概念.

以标量场为例，生成泛函为

$$Z(J) = \int D[\varphi] e^{is}, \tag{4.3.23}$$

$$s = s(\varphi, J) = \int d^4x [L(\varphi) + J(x)\varphi(x)].$$

由 n 点格林函数

$$G^{(n)}(1, 2, \cdots, n) = \frac{1}{(i)^n} \frac{\delta}{\delta J_1} \cdots \frac{\delta}{\delta J_n} Z(J) |_{J=0} = \langle 0 | T\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) | 0 \rangle \tag{4.3.24}$$

可知 $$Z(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n J(x_1) \cdots J(x_n) G^n(x_1 \cdots x_n). \tag{4.3.25}$$

令 $$Z(J) = e^{iW(J)},$$

则 $W(J)$就是连通格林函数 $G_c^{(n)}$ 的生成泛函，即

$$G_c^{(n)} = (-i)^{n-1} \frac{\delta^n W(J)}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \bigg|_{J=0}. \tag{4.3.26}$$

故有 $$iW(J) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_n J(x_1) J(x_2) \cdots J(x_n) G_c^{(n)}(x_1 \cdots x_n). \tag{4.3.27}$$

令 $$\bar{\varphi}(x, J) = \frac{\delta}{\delta J(x)} W(J); \tag{4.3.28}$$

可以证明[19]

$$\Gamma(\bar{\varphi}) = W(J) - \int d^4x J(x) \bar{\varphi}(x); \tag{4.3.29}$$

$$\bar{\varphi}(x, J) = \frac{\langle 0 | \varphi | 0 \rangle^J}{\langle 0 | 0 \rangle^J};$$

$$\frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \bar{\varphi}(x)} = -J(x). \tag{4.3.30}$$

由(4.3.30)可知，$\Gamma(\varphi)$正是考虑到所有量子改正后的有效作用量.

我们定义有效势 V_{eff}：

当 $\bar{\varphi}$=const 时，

$$\Gamma(\bar{\varphi}) = \int d^4x [-V_{\text{eff}}(\varphi)]. \tag{4.3.31}$$

已知 $\Gamma(\bar{\varphi}) = \int d^4x L_{\text{eff}}$，故当 $\bar{\varphi}$ = const 时有

$$V_{\text{eff}} = -\mathscr{L}_{\text{eff}}.$$

例如在 $\lambda\varphi^4$ 场论中，

$$L=\frac{1}{2}(\varphi^{\mu}\varphi_{\mu}+m^2\varphi^2)-\frac{1}{4}\lambda\varphi^4,$$

$$V_{\text{eff}}=-\mathscr{L}_0-\mathscr{L}_1=-\frac{1}{2}m^2\bar{\varphi}^2+\frac{1}{4}\lambda\bar{\varphi}^4+V(\bar{\varphi}).$$

在 $SU(5)$ 大统一理论中，Higgs 场有 24 个分量，拉氏量为

$$\mathscr{L}=(\overline{\Psi}_R)_a i\gamma^{\mu}(D_{\mu})_{aa}(\Psi_R)_a+(\overline{\Psi}_L)_{ab}i\gamma^{\mu}(D_{\mu})_{ab,ab}\times (\Psi_L)_{ab}. \tag{4.3.32}$$

式中 $\Psi_R=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\e^c\\-\nu_e\end{bmatrix}_R$，上标 c 表示电荷共轭，

$$\Psi_L=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1\\ -u_3^c & 0 & u_1^c & u_2 & d_2\\ u_2^c & -u_1^c & 0 & u_3 & d_3\\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c\\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0\end{bmatrix}_L$$

分别是 $SU(5)$ 的[5*]维和[10]维表示，一个代(generation)中的 15 个夸克和轻子就可以填充在上述表示中.（6.3.32)中的 D_{μ} 为

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}+igA_{\mu,k}T_k(k=1,2,\cdots,24),$$

T_k 即 24 个生成元，在拉氏量的第一项中采用 5 维表示 $(T_k)_{ab}$，在第二项中采用 10 维表示 $(T_k)_{ab,ab}$. $A_{\mu,k}$ 即 24 个规范场，其中有 12 个 A_{μ}, W, Z°, $g^i(i=1,2,\cdots,8)$；12 个 $x_a(4/3)$, $\bar{x}_a(4/3)$, $Y_a(1/3)$, $\overline{Y}_a(1/3)$, $a=1,2,3$ 是色指标. g 为大统一耦合常数 $g=\sqrt{4\pi/45}$. c 表示电荷共轭态.

按照 Coleman-Weinberg 模式，引入把 $SU(5)$ 破缺到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的 Higgs 场

$$V_{\text{class}}=\frac{\lambda}{4!}\varphi^4, \tag{4.3.33}$$

则有效势可写为

$$V_{\text{eff}}=\frac{\lambda}{4!}\varphi^4+B\varphi^4\left[\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}-\frac{25}{6}\right].$$

由$\left.\frac{\mathrm{d}V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}\varphi}\right|_{\varphi=\sigma}=0$ 确定 $\lambda=88B$，代入上式得

$$V_{\text{eff}}=B\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{\sigma}-\frac{1}{2}\right). \tag{4.3.34}$$

上式就是采用 C-W 势[24]时，平直时空零温 $SU(5)$大统一理论的单圈有效势[25]．当 $\bar{\varphi}\beta\ll1$ 时($\beta=1/kT$)，有限温度下 $SU(5)$的单圈有效势可写为(Colemen-Winberg)：

$$V_{\text{eff}}^{(1)\beta}(\bar{\varphi})=B\bar{\varphi}^4\left(\ln\frac{\bar{\varphi}^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{75}{16\beta^2}g^2\bar{\varphi}^2-\frac{\pi^2}{15\beta^4}. \tag{4.3.35}$$

一般可忽略 β^{-4}项而仅保留 β^{-2}项，这相当于在温度改正项中出现一个依赖于温度的改正项

$$\frac{75}{16\beta^2}g^2\bar{\varphi}^2=\frac{75}{16}k^2T^2g^2\bar{\varphi}^2.$$

这一项的作用是把零温单圈有效势中 $\bar{\varphi}=0$ 处的极大变为极小．当 $T>T_c$ 时，这是一个整体极小(真真空)，当 $T\ll T_c$ 时，它仍为局部极小，成为一个亚稳态(假真空)．

3. 由假真空向真真空的跃迁

由上节的讨论可知，当温度 $T>T_c$ 时，有效势有一个整体极小，即对应于一个对称的和稳定的基态或真空．当温度 T 降至 $T\approx T_c$ 时，上述真空仍然存在，但不再稳定，称为假真空．这时，处于“过冷”状态的宇宙以指数形式膨胀，即暴胀．但是由于量子涨落(或因量子隧道效应，热涨落效应)，宇宙将由假真空向真真空跃迁，此后即发生一级相变．我们将计算单位时间的跃迁几率 Γ．

一个不稳定的波幅可表示为

$$\begin{aligned}&\Psi(t)=\Psi(0)\mathrm{e}^{i\frac{E}{\hbar}t},\\&E=\alpha+i\beta;\\&|\Psi(t)|^2=|\Psi(0)|^2\mathrm{e}^{-\Gamma t},\end{aligned} \tag{4.3.36}$$

衰变几率为

$$\Gamma=\frac{2}{\hbar}|\mathrm{Im}E|, \tag{4.3.37}$$

即衰变几率由假真空能量的虚部给出．设初态为$|\varphi_1\rangle$，末态为$|\varphi_2\rangle$，则有

$$\langle\varphi_2|e^{-HT/\hbar}|\psi_1\rangle = \sum_{n\ m}\langle\varphi_2|n\rangle\langle n|e^{-HT/\hbar}|m\rangle\langle m|\varphi_1\rangle = \sum_{n} e^{-E_nT/2}\langle\varphi_2|n\rangle\langle n|\varphi_1\rangle.$$

令此时的$|\varphi_1\rangle=|0\rangle$，表示假真空，则有

$$E_0=-\hbar\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\langle 0|e^{-HT/\hbar}|0\rangle, \tag{4.3.38}$$

此即假真空的能量．

由路径积分表述，

$$\langle\varphi_2|e^{-HT/\hbar}|\varphi_1\rangle = N\int D(\varphi)\exp[-S_E(\varphi)/\hbar] = \exp[-S_{Eeff}/\hbar]=\exp[-S_{Eclass}/\hbar]\cdot\exp[-S_{Eone-loop}].$$

对于欧氏时空标量场的运动方程

$$\bar{\varphi}^{\mu}_{;\mu}=V'(\bar{\varphi}). \tag{4.3.39}$$

可以证明 $\exp(-S_{Eone-loop}/\hbar)=(\prod_n\lambda_n)^{-1/2}$， (4.3.40)

从而有

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle = \exp[-S_E(\varphi)/\hbar]\Big[\prod_n\lambda_n\Big)^{-1/2}. \tag{4.3.41}$$

式中 λ_n 为本征值：

$$A\varphi_n=-\partial_\mu\partial_\mu\varphi_n+U''(\varphi_n)=\lambda_n\varphi_n.$$

在 A 的自身表象中有

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1^{-1} & & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n^{-1}\end{bmatrix},$$

所以 $\left(\prod_n \lambda_n\right)^{-1/2}=(\det A)^{-1/2}=\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu+U'']\}^{-1/2}$.

$$(4.3.42)$$

实际上，若设 $\bar{\varphi}$ 为方程(4.3.39)的解(瞬子解)，则可在此解附近把 $S_E(\varphi)$ 展开：

$$S_E(\varphi)=S_E(\bar{\varphi})+\int \mathrm{d}^4x\,\frac{\delta S_E(\bar{\varphi})}{\delta\bar{\varphi}(x)}[\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)]+\int \mathrm{d}^4x\mathrm{d}^4y\,\frac{\delta^2 S_E(\bar{\varphi})}{\delta\bar{\varphi}(x)\delta\bar{\varphi}(y)}[\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)]\cdot[\varphi(y)-\bar{\varphi}(y)]+\cdots$$

注意到 $\dfrac{\delta S_E}{\delta_\varphi}=-\Box\varphi+U'=0$,

$$\frac{\delta^2 S_E}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}=\{-\delta(x-y)\partial_\mu\partial_\mu-\bar{\varphi}(x)(-\partial_\mu\partial_\mu+U''),$$

得到 $S_E(\varphi)=S_E(\bar{\varphi})+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \mathrm{d}^4x[\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)](-\partial_\mu\partial_\mu+U'')\cdot[\varphi(x)-\bar{\varphi}(x)]+\cdots$

再采用式 $\displaystyle\int \mathrm{D}(\varphi)\exp\left[-\frac{1}{2}\varphi^+A\varphi\right]=(\det A)^{-1/2}$,

便得到

$$N\int \mathrm{D}(\varphi)\exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(\varphi-\bar{\varphi})A(\varphi-\bar{\varphi})\right]=$$

$$N\exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar]\int \mathrm{D}(\varphi)\exp\left[-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x(\varphi-\bar{\varphi})A(\varphi-\bar{\varphi})\right]=$$

$$N(\det A)^{-1/2}\exp[-S_{\mathrm{Eclass}}/\hbar].$$

将(4.3.42)代入(4.3.41)得到

$$\langle\varphi_2/\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle=K\exp(-B/\hbar). \qquad (4.3.43)$$

式中 $K=N\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi)\}^{-1/2}$; $B=S_E(\varphi)$叫衰变系数.

当 $T\to\infty$时，可以证明

$$N\{\det[-\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi)]\}^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega T/2}. \qquad (4.3.44)$$

式中 $\omega^2=U''(\varphi)$. 由此可得

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle=\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}e^{-\omega T/2}e^{-B/\hbar}. \tag{4.3.45}$$

设在$\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$和体积 V 内存在 n 个瞬子，每个瞬子的时空体元都不重叠，这样便可作稀疏气体近似. 注意到每一个瞬子解的贡献由(4.3.45)式给出，可以证明，当 $T\to\infty$, $V\to\infty$, $n\to\infty$时有

$$\langle\varphi_2|\exp(-HT/\hbar)|\varphi_1\rangle=$$
$$\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\exp(-\omega TV/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(TV)^n}{n!}\exp(-nB/\hbar)\cdot K^n, \tag{4.3.46}$$

又由(4.3.38)得到(当 $T\to\infty$)

$$E_0=-\frac{\hbar}{T}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\omega}{\pi\hbar}-VT\left(\frac{\omega}{2}-Ke^{-B/\hbar}\right)\right]=$$
$$V\left(\frac{\hbar\omega}{2}-\hbar Ke^{-B/\hbar}\right).$$

再采用式[7]

$$\mathrm{Im}K=\frac{1}{2}\left\{\frac{\det[-\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi_+)]}{\det^\circ[-\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi)]}\right\}^{1/2}. \tag{4.3.47}$$

式中 $\det^\circ$表示去掉零本征值后的行列式，φ_+ 表示假真空，φ 表示经典瞬子解，U 是有效势，最后得到单位体积、单位时间的衰变几率.

$$\frac{\Gamma}{V}=e^{-B/\hbar}\left\{\frac{\det[\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi^+)]}{\det^\circ[\partial_\mu\partial_\mu+U''(\varphi)]}\right\}^{1/2}. \tag{4.3.48}$$

下面讨论量子隧道效应后 φ 场的演化.

文[27, 28]指出，若欧氏时空中的瞬子方程(经典运动方程)

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi=U'(\varphi) \tag{4.3.49}$$

存在一个 $O(4)$不变解，则此解的作用量 S_E 要小于非 $O(4)$不变解的作用量. 类似地，若闵氏时空中的运动方程

$$\partial_\mu\partial_\mu\varphi=-U'(\varphi) \tag{4.3.50}$$

存在一个 $O(3, 1)$不变解，则此解的作用量要小于非 $O(3, 1)$不变解的作用量. 与(4.3.49)对应的解称为瞬子解(或反弹解)，与

(4.3.50)对应的解称为泡解. 我们只需考虑 $O(4)$不变瞬子解和 $O(3,1)$不变泡解.

4 维欧氏空间度规可写为

$$ds^2=d\xi^2+\rho^2(\xi)d\Omega_3^2,$$
$$d\Omega_3^2=dx^2+f^2(x)d\Omega_2^2. \tag{4.3.51}$$

式中 $\rho^2(\xi)=t^2-r^2$ 表示 4 维空间间隔. 采用 $O(4)$不变瞬子拉氏量，有

$$S_E=\int d^4x\sqrt{g_E}[g_E^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\varphi+U(\varphi)+(2k)^{-1}R]=$$
$$2\pi^2\int d\xi\left[\rho^3\left(\frac{1}{2}\varphi'^2+U\right)+\frac{3}{k}(\rho^2\rho''+\rho\rho'^2-\rho)\right], \tag{4.3.52}$$

由此得瞬子方程

$$\varphi''+\frac{3}{\rho}\rho'\varphi'=\frac{dU}{d\varphi},\ \varphi'=\frac{d\varphi}{d\xi}. \tag{4.3.53}$$

欧氏引力场方程具有形式

$$\rho'^2-1=\frac{1}{3}k\rho^2\left(\frac{1}{2}\varphi'^2-U\right).$$

设我们处在真真空泡中，真空能密度(宇宙因子项)为零，则有

$$U(\varphi_-)=0,\ U(\varphi_+)=\varepsilon.$$

式中 φ_- 为真真空泡，φ_- 为假真空背景. 当真真空泡形成时，设有 $\bar{\rho}\gg\varepsilon$(薄壁近似)，则由瞬子方程可以得到[27]

$$B=-\frac{1}{2}\pi^2\bar{\rho}^4\varepsilon+2\pi^2\bar{\rho}s_1.$$

衰变系数 B 取极值时泡形式，由 $\frac{dB}{d\bar{\rho}}=0$ 得到泡的半径

$$\bar{\rho}=\frac{12s_1}{4\varepsilon+3ks_1^2}=\frac{\bar{\rho}_0}{1+(\bar{\rho}_0/2\lambda)^2}\approx\varepsilon^{-12}\sigma;$$

$$B=\frac{B_0}{[1+(\bar{\rho}_0/2\lambda)^2]^2}.$$

式中 B_0 是无引力时的衰变系数，$\bar{\rho}_0=3s_1/\varepsilon$ 是无引力时泡的半径，

$$s_1 = \int_{\varphi_+}^{\varphi_-} d\varphi \{2[U_0(\varphi) - U_0(\varphi_+)]\}^{1/2} \approx \sigma(U_{0\max})^{1/2},$$

$$U_0(\varphi_-) = U_0(\varphi_+),$$

$$U(\varphi) = U_0(\varphi) - \frac{\varepsilon}{\sigma}(\varphi - \sigma),$$

$$\lambda = \left(\frac{k\varepsilon}{3}\right)^{-1/2}, \ k = 8\pi G.$$

$\rho=0$ 在欧氏空间中对应于 $\varphi=\varphi^*$，即表示真空泡的边界(泡壁)，在闵氏空间中 $\rho=0$ 对应于 $t\pm r=0$，即表示泡壁沿光锥运动. 在所讨论的情况下，引力的出现使真空泡出现的几率增大，使泡半径减小.

以上的讨论是半经典的. 结果表明，真真空泡由隧道效应产生，并以光速膨胀. 要引入量子改正，只需在(4.3.53)中将经典势 U 换成有效势 V_{eff}，产生的效应是使振幅衰减得快一些.

4. 林德(Linde)等人的工作

古什(1981)[20]认为宇宙由假真空向真真空的过渡只能通过量子隧道效应. 为了解决磁单极问题、平直性问题和视界问题，就要求泡的产生率较低，以使在泡与泡发生碰撞之前，泡就已经足够大. 但是泡的产生率如果这样低，就会导致一个不合理的结果——使得热化过程延迟到重子和核合成时期. 古什还认为，宇宙尺度按指数增长只出现在泡形成之前. 真真空泡形成之后，泡壁以光速膨胀，真空能转化为泡壁的动能. 泡与泡之间的碰撞是热化的惟一机制. 这一观点也遇到了困难. 因为宇宙在假真空阶段按指数增长而真真空泡不按指数增长，这样必然存在小于可观测宇宙的泡. 在可观测宇宙内泡的碰撞将破坏宇宙物质分布的均匀性，而且会使'tHooft 磁单极大量出现，与观测结果不符.

林德[28]1982 年对古什的模型做了修改，他认为在泡出现之后的一段时间 $\tau\approx T_b^{-1}$ 内，宇宙仍按指数规律膨胀. 下面我们介绍林德的工作.

按照林德理论的要求，需要一个与西格斯势形状不同的有效势. 科尔曼-温伯格(Coleman-Winberg)势基本上符合这一要求，

有效势曲线如图 5-10 所示.

令 $\frac{dV_{eff}}{d\varphi}=0$，得到[28]

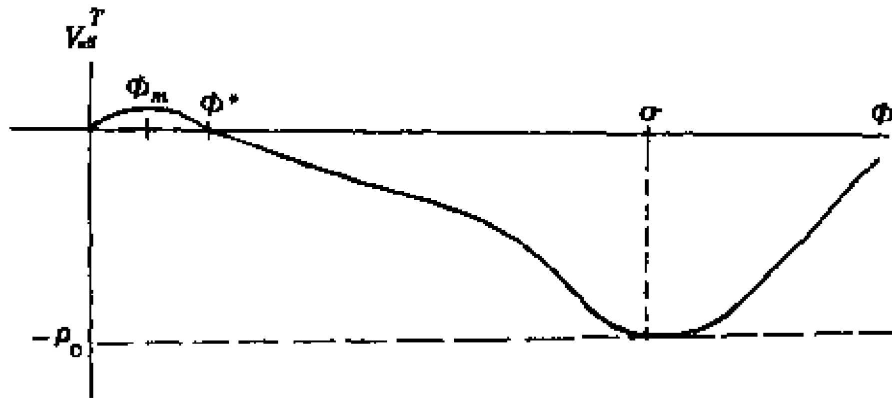


图 5-10

$$\varphi=0;$$

$$\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}=-\frac{C}{2B}\frac{T^2}{\sigma^2}\approx\frac{T^2}{T_c^2}\approx 0(\text{当 } T\ll T_c). \tag{4.3.54}$$

(4.3.54)有两个解，第一个解对应于 $\varphi\approx\sigma$，代表真真空；第二个解对应于势垒的最高点处 $\varphi=\varphi_m$. 我们采用 SU(5)大统一理论中的 g、B、C 值. 在所有情况下 $T_B\ll\sigma$，再考虑到

$$\left|\ln\frac{\varphi^2 m}{\sigma^2}\right|\gg 1, \tag{4.3.55}$$

$$\frac{\varphi_m}{\sigma}<\frac{T_b}{\sigma}, \tag{4.3.56}$$

我们得到 $V_{eff}^{T_b}(\varphi_m)/\rho_0=2\frac{\varphi_m^4}{\sigma^4}\left[\ln\frac{\varphi_m^2}{\sigma^2}-\frac{1}{2}\right]+\frac{2C}{B}\frac{\varphi_m^2 T_b^2}{\sigma^4}<\frac{\varphi_m^2}{\sigma^2}<\frac{\varphi_m}{\sigma}$.

由于有效势比 ρ_0 小几个数量级，所以有效势在 $\varphi\ll\sigma$ 时是很平坦的. 在期间 $\varphi_m<\varphi<\sigma$，标量场 φ 要经历一段足够长的滚动相 $\left(\tau\sim\frac{1}{T_b}\right)$.

如图所示，当 $\varphi=\varphi^*\ll\sigma$ 时，泡形成. 此后，在任一固定空间点，如果忽略引力作用，则可采用闵氏时空的经典运动方程(4.3.50). 假设在一个泡内 φ 是空间均匀的，此时有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi-\varphi_m)=-V'_{eff}(\varphi-\varphi_m)=$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\mathrm{eff}}\Big|_{\varphi_m}(\varphi-\varphi_m).$$

考虑到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}V_{\mathrm{eff}}^T=4B\varphi\sigma^2\left(\frac{\varphi^2}{\sigma^2}\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}+\frac{C}{2B}\frac{T^2}{\sigma^2}\right)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\mathrm{eff}}^T=2\left(6B\varphi^2\ln\frac{\varphi^2}{\sigma^2}+4B\varphi^2CT^2\right)\Big|_{\varphi_m}<0,$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V_{\mathrm{eff}}^T\Big|_{\varphi_m}(\varphi-\varphi_m)\approx 3CT_b^2(\varphi-\varphi_m),$$

积分，得 $\varphi(t)\approx\varphi^*\mathrm{e}^{\sqrt{C}\,T_b(t-t_b)}$. (4.3.57)

此即隧道效应后，泡在平坦区的演化方程(忽略重力)——泡仍按指数规律膨胀. 只要泡形成时的大小为 10^{-20}cm，经过时间 $\tau\geqslant 10^2H^{-1}$，泡的大小便可增至 $R(\tau)\geqslant 10^{28}$cm，即大于现在可观测宇宙的半径 10^{28}cm；整个宇宙处于一个泡内. 此后，场绕着真真空做阻尼振荡，真空能量耗散，指数膨胀停止，宇宙按标准模型演化. Higgs 场在 $\varphi=\sigma$ 附近的阻尼振荡相当于粒子的产生. 真空能量在相变时作为潜能释放出来，使宇宙重新加热至 $T\approx T_c$. 这里，热化的机制不再解释为泡壁的碰撞，而解释为(Hawking，1982)阻尼振荡中产生的粒子之间的相互作用.

Hawking 和 Moss(1982)考虑到引力和 Higgs 场的耦合，采用了更普遍的有效势

$$V_{\mathrm{eff}}(\varphi)=\frac{1}{2}(m^2+\xi R+CT^2)\varphi^2+\frac{1}{4}\alpha^2\varphi^4\left(\ln\frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}-\frac{1}{2}+\frac{m^2}{\alpha^2\varphi_0^2}\right)+\frac{1}{8}\alpha^2\varphi_0^4-\frac{1}{4}m^2\varphi_0^2.$$

(4.3.58)

式中 φ_0 是平直空间零温下 $V_{\mathrm{eff}}(\varphi_0)=0$ 的期望值，m^2 和 ξ 是重整化参量，$\alpha=5g^2/8\pi$，$\alpha^2/4\approx B$. 这一有效势比平直时空有限温度下的科尔曼-温伯格势多了几项，包括含 m 的项和 φ 场与曲率的耦合项.

由于 de Sitter 时空中 $R=12H^2$，故知 $\xi R=48\pi^2\xi k^2H_H^2$ 代表霍金温度 T_H 对有效势的贡献. 当温度降至 $T\approx T_H$ 时，质量项已可忽略，有效势退化为科尔曼-温伯格势. 此时势垒很低，量子涨

落或热涨落就足以使 φ 场从对称真空过渡到不对称真空.

引力和 Higgs 耦合场方程存在一个惟一的均匀解

$$ds^2=dt^2-H_1^{-2}\cosh^2(H_1t)(dx_2^2+\sin^2 x d\Omega^2)$$

$$\varphi=\varphi_1\approx\frac{m}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{m^2}\right)\right]^{-1/2}\ll\sigma,\quad H_1^2=\frac{8\pi}{3}\frac{V_{\rm eff}(\varphi_1)}{m_p^2}.$$

式中 φ_1 对应于 V 的局部极大值.

如果令

$$B=\frac{3}{8}T_p^2\left[V_{\rm eff}^{-1}(0)-V_{\rm eff}^{-1}(\varphi_1)\right]\approx$$

$$\frac{1}{\alpha^2}(m^2H^{-2})^2\left[\ln\left(\frac{\alpha^2\sigma^2}{m^2}\right)\right]^{-1},$$

则上述均匀解可解释为宇宙以几率

$$\Gamma\approx(m^2+\xi R)^2\exp(-B/\hbar)$$

跃迁至 $\varphi=\varphi_1$ 处，再沿势垒滚下，一直到达 $\varphi=\sigma$ 处，滚动相以后的演化和泡解相同.

在前面讨论的暴胀宇宙论中，实际上假定了初始的标量场只取一个特定值(如 $\varphi=0$). 1983 年，Linde 提出更自然地，φ 在初始时刻应该可以取一系列值，即在一定条件下取任何值. 考虑到量纲的要求，对极早期 φ 的取值有一定限制，如哈米顿量中动能项和势能项均不能大于 planck 质量 M_p 的四次方 M_p^4. 以 φ^4 场为例，即要求 $\partial_\mu(\varphi)^2\leqslant M_p^4$，$\frac{\lambda}{4!}\varphi^4\leqslant M_p^4$. 这样，在空间不同区域 φ 可以取 $\pm M_p/\lambda^{1/4}$ 之间的任一值.

φ 场运动方程

$$\ddot\varphi+3H\dot\varphi=-\lambda\varphi^3,\quad H=\left(\frac{2}{3}\pi\lambda\right)^{1/2}\varphi^2/M_p$$

的通解为 $\varphi=\varphi_0\exp\{-[\lambda^{1/2}M_p/(6\pi)^{1/2}]t\}$.

由此可以看出，场 φ 需要时间

$$\Delta t\sim\frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\lambda}\,M_p}$$

才能有足够的衰减. 因此，当 $\lambda\ll1$，在 $\Delta t>t_p\sim\frac{1}{M_p}$时间内宇宙按

指数规律膨胀．膨胀后宇宙半径为

$$R(\Delta t)\sim R_0 e^{H\Delta t}\sim R_0\exp(2\pi\varphi_0^2/M_p^2).$$

要使膨胀后的宇宙大于可观测宇宙，就要求 $\exp(H\Delta t)\geqslant\exp(65)$；于是按上式和量纲限制条件应有

$$\varphi_0\geqslant 3M_p,\ \lambda\leqslant 10^{-2}.$$

这表明，φ 场在宇宙的不同空间区域具有混沌的初始值 φ_0，任一满足 $\varphi_0\geqslant 3M_p$ 的空间区域(空间畴)都将作指数膨胀，经 Δt 后形成一个比可观测宇宙大的微宇宙泡；我们生活的宇宙就是其中某一个微宇宙泡演化来的．这个模型称为混沌暴胀模型．

混沌暴胀模型的另一个特点是它不要求宇宙早期的高温修正．一般说来，对有效势的高温修正实际上是给 φ 增加了一有效质量项

$$\triangle m^2(T)=CT^2.$$

式中 C 是一个常系数．这一项的作用是使原来的 φ 场(自发破缺的)由负质量变为正质量，从而导致对称性恢复．我们考虑 $C\sim 1$ 的情况，这时高温修正的影响需要一个驰豫时间[28]

$$\tau\sim\frac{1}{\Delta m^2(T)}\approx\frac{1}{T}.$$

考虑到宇宙极早期物质以相对论粒子为主，能量密度主要是它们的贡献，以及一般典型大统一模型 $N\sim 200$，则可算得宇宙时[28]

$$t\sim\frac{1}{50}\frac{M_p}{T^2}.$$

高温修正效应在 t 时刻起作用的必要条件是

$$t\geqslant\tau,\ \text{或}\ T\leqslant\frac{M_p}{50}.$$

此式表明，空间畴的指数膨胀要比温度降至 $\frac{M_p}{50}$ 来得早．这样，因空间畴的指数膨胀将导致畴内温度指数下降．所以高温修正效应始终不存在，即使 $t>\tau$，指数形式的急剧下降也将超过高温修正的影响．于是得到结论，在每个畴暴胀前，不会发生高温相变．

这一模型认为，每个畴暴胀后都可形成一个微宇宙，只需要

要求局部微宇宙满足均匀和各向同性条件，不需要要求这一条件是整体的．按此模型，我们现在的可观测宇宙仅是这些微宇宙中的某一个．也就是说，我们的宇宙是由极早期宇宙中某一微小的空间畴暴胀起来形成的．

混沌暴胀模型仍存在一个困难，就是得不到能量密度涨落的合理量级$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim 10^{-4}$.

5．量子涨落和密度扰动的演化

1978 年，Bunch 和 Davies 求得了宇宙暴胀过程中的真空平均值

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{3H^4}{8\pi^2m^2}. \tag{4.3.59}$$

由此式可见 $m^2\to 0$ 时$\langle\varphi^2\rangle\to\infty$，这是由于宇宙作指数膨胀，当 $m^2\to 0$，$\langle\varphi^2\rangle$与在 de sitter 空间中反常大波长密度涨落有关．在涨落量$|K|\ll H$ 时，Vilenkin 等导出了对$\langle\varphi^2\rangle$的主要贡献[28]：

$$\langle\varphi^2\rangle\approx\frac{H^{2-4m^2/3H^2}}{2\pi}\int_0^H\frac{k^2\mathrm{d}k}{\{\Delta m^2(T)+k^2\}^{3/2-2m^2/3H^2}}. \tag{4.3.60}$$

式中 $\Delta m^2(T)$是温度效应对质量的贡献，$\Delta m^2(T)\sim o(g^2T^2)$．当 $T\to 0$ 时，上式可写为

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{H^{2-4m^2/3H^2}}{2\pi}\int_0^H\frac{k^2\mathrm{d}k}{k^{3-4m^2/3H^2}}=\frac{3H^4}{8\pi^2m^2},$$

恰为(4.3.59)式．当 $T\gg H$ 时，上述反常贡献消失，此时有

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{T^2}{12},$$

这正是 Mikowski 空间的结果．当 $0<T<H$ 时，由于宇宙暴胀，$\Delta m^2(T)$按指数规律减小，此时(4.3.60)可写成

$$\langle\varphi^2\rangle=\frac{3H^4}{8\pi^2m^2}\left\{1-\exp\left[-\frac{2m^2}{3H}(t-t_0)\right]\right\}. \tag{4.3.61}$$

式中 t_0 是与 $m^2(T)=2H^2$ 对应的时刻．当 $t-t_0\ll 3H/2m^2$ 时，上式成为

$$\langle\varphi^2\rangle\sim\frac{H^2}{4\pi^2}(t-t_0), \tag{4.3.62}$$

即场的涨落与时间成线性关系. 当 $t-t_0\geqslant 3H/2m^2$ 时，有

$$\langle\varphi^2\rangle\sim\frac{3H^4}{8\pi^2m^2}\exp\left[\frac{2|m|^2}{3H}(t-t_0)\right],$$

此时$\langle\varphi^2\rangle$按指数规律增长.

考虑到场的量子涨落，暴胀过程就不是严格均匀的；这将对暴胀后的能量密度扰动产生影响，从而有可能解释物质和星系的起源问题. 场初始分布的不均匀会使宇宙暴胀过程中场的不同区域的势达到最小值需要不同的时间，但最后将升至相同的重加热温度. 这不同的时间正表现出暴胀后的密度扰动. 古什曾计算出这一扰动：

$$\frac{\delta\rho(k)}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\frac{H^2}{\varphi}\left[1+\frac{3}{2}\ln(kH)\right]^2_{\varphi=\varphi_*}.$$

式中 φ_* 是动量 $k_*=H$ 时的$\sqrt{\langle\varphi^2\rangle}$值，而 k_* 与具体势有关. 当选取科尔曼-温伯格势时，得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim 50. \tag{4.3.63}$$

这和观测到的微波背景辐射不符合. 霍金等人采用将空间分成不均匀的和均匀的两部分，并引入与空间位置有关的时间延缓因子，得到暴胀结束时有

$$\frac{\delta H}{H}\sim\frac{1}{3\pi}\left(\frac{g^2}{4\pi}\right). \tag{4.3.64}$$

注意到 $T\sim H$，得到

$$\frac{\delta T}{T}\sim\frac{1}{3\pi}\frac{g^2}{4\pi};$$

又由 $\rho\sim T^4$，得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim\frac{4\delta T}{T}\sim\frac{g^2}{4\pi}\sim 10^{-2}. \tag{4.3.65}$$

这一结果虽然比古什的结果小了三个量级，但仍比观测到的微波背景辐射密度涨落$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim 10^{-5}$要大. 下面将看到，超对称宇宙早期理论的预言与观测结果相符合.

1986 年，Ruiz-Altaba 等人提出了 $N=1$ 的超对称宇宙早期模型，其标势为

$$V=\mathrm{e}^{|\phi|^2}\left[\left|\frac{\partial P}{\partial\phi}+\phi P\right|^2-3P\right]. \tag{4.3.66}$$

式中 P 就是超对称的超势.

如果真空处于手征超场 ϕ_0，则为了使相应的宇宙常数为零，必有 $V(\phi_0)=0$. 若该点超对称不破缺，则有

$$\left|\frac{\partial P}{\partial\phi}+\phi R\right|_{\phi=\phi_0}=0. \tag{4.3.67}$$

令 $P=\left(\frac{\Delta^2}{M}\right)(\phi-\phi_0)^2,$ (4.3.68)

$$M=M_p/\sqrt{8\pi}\equiv 1,$$

Δ 是质量参数，

$$m_\phi\sim\Delta^2, \tag{4.3.69}$$

则(4.3.67)可改写为

$$V=\Delta^4\left[1-4\phi^3+\frac{13}{2}\phi^4-8\phi^5+\frac{23}{3}\phi^6+o(\phi^7)\right]. \tag{4.3.70}$$

宇宙从 $\phi\lesssim H_0$，$\dot{\phi}\approx 0$ 开始暴胀. 由于势为主暴胀场 ϕ 满足经典运动方程

$$\phi+3H\dot{\phi}+\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}=0,$$

$$H^2=\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2+V(\dot{\phi})\right]; \tag{4.3.71}$$

$$\Delta V_H\approx-\Delta^8\phi(\text{Hawking 辐射项}).$$

我们得到反 de Sitter 相的 Hubble 常数

$$H_0^2=V(0)=\Delta^4. \tag{4.3.72}$$

暴胀场产生在 $\phi\ll 3H^\circ\dot{\phi}$，$\phi\sim H_0$，直到时间 $t_I\sim m_\phi^{-1}$. 然后暴胀场如物质场一样演化，直到再加热时间 $t_R\sim\Gamma_\phi^{-1}$，然后衰变为辐射为主和再热相. 考虑到(4.3.69)有

$$\Gamma_\phi\sim\Delta^2 m_\phi\sim\Delta^4,$$

辐射能的增加满足式

$$\rho_\phi(t_R)=\rho(t_I)\left(\frac{t_I}{t_R}\right)^2=\Delta^2\left(\frac{\Gamma_\phi}{m_\phi}\right)^2\approx\frac{\pi^2}{15}NT_R. \tag{4.3.73}$$

式中 N 是光子有效自由度数．由上式可以得到

$$T_R\sim\Delta^3. \tag{4.3.74}$$

如果取 $\Delta\sim10^{-4}$(以 M 为单位)，则再热温度$\sim10^6$Gev．暴胀指数 N_I 满足

$$R(t_R)\sim e^{N_I}R(t_I),$$

于是得到

$$N_I=\int_{\phi_I}^{\phi_R}H_0\mathrm{d}t. \tag{4.3.75}$$

由于 $\phi_I\sim H_0$，$\phi_R\sim10^{-1}$，所以

$$N_I\sim10^8. \tag{4.3.76}$$

另一方面，暴胀的量子涨落的量级为 H_0，因此在标度为 λ 时产生能量密度涨落．按暴胀时能量密度涨落公式

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\approx\frac{H_0^2}{\dot\phi(t_I)}\left[1+\frac{3}{2}\ln(\lambda H_0)\right]^2. \tag{4.3.77}$$

式中 H_0 是 $\phi=0$ 时的哈勃常数，λ 是前面提到的能量密度涨落时的能量标度，代入(4.3.71)和(4.3.72)，得到

$$\frac{\delta\rho}{\rho}\sim10^2\Delta^2\sim10^{-4}. \tag{4.3.78}$$

(4.3.76)和(4.3.77)均与观测结果相符，这就克服了前面的以大统一和科尔曼-温伯格势为基础的暴胀理论遗留下来的两个问题：(i)量子涨落导出的跃迁太快，宇宙不足以膨胀到与观测一致的大小，即标度因子达不到 e 指数上大于 65 的量级的增长．(ii)暴胀时能量密度涨落太大，按(4.3.77)算得的值远大于观测值 10^{-4}．

因此，超对称理论应用于暴胀宇宙，成功地解释了再热机制，暴胀指数及能量密度涨落等关键问题．Ruiz 的这一理论的遗留问题是再热温度较低，不足以产生足够的重子数不对称．

6．小结

为了解决大爆炸宇宙模型(即标准宇宙模型)在宇宙极早期存

在的几个疑难问题，1981 年，古什首先提出了一个关于宇宙极早期的暴胀宇宙模型，它认为暴胀产生在(超冷)假真空对称相破缺之前. 这理论无法解释大量宇宙泡的产生所引起的不均匀性等问题. 1982 年，Linde 等人提出了新的暴胀过程模型，它认为宇宙泡沿着势的平坦部分慢慢滚动下来，即暴胀与对称破缺的相变同时发生，由此解决了原暴胀模型存在的疑难问题. 1983 年，人们抛弃了高温修正效应，又提出一个混沌暴胀模型，认为标量场在一定取值范围内，在时空中都可形成宇宙泡，每个宇宙泡都可以在暴胀后形成一个微宇宙，每个微宇宙暴胀后都可超过我们可观测宇宙的线度；我们就生活在这样的许多个宇宙中的一个里面. 1984 年以来，人们又进一步引入了超对称理论，把暴胀宇宙和 $N=1$ 的超引力物质相耦合，使得标量场的势的形状更合理——使所得推论更符合观测事实.

加上了暴胀模型的广义相对论宇宙学，仍然无法解决宇宙的创生问题和星系的形成问题. 这些问题我们将在下一篇中讨论.

参 考 文 献

[1] Ehlers J. GRG, 1971: 1682

[2] Fang L Z. Sato H. GRG, 1985 (17): 1117

[3] Fang L Z Wu Z C. Galaxies. Quasars and Cosmology. 1985

[4] Fang L Z. Ruffini R. World Scientific, 1985

[5] Hawking S W. Ellis G F R. The Large-Scale Structure of Space-Time, 1973

[6] Ishihava H. et al, Preprint of Hiroshima Univ. RRK, 1983

[7] Kaplan S A. JETP, 1979 (79): 4

[8] Mattens, N. Comm. Math. Phys, 1978 (59): 273

[9] Misner C W. Ap J, 1968 (151): 431

[10] Peebles P J E. Physical Cosmology, 1971

[11] S. 温伯格著. 邹振隆等译. 引力论和宇宙论. 北京：科学出版社. 1980：§15.2、§15.6

[12] 沈有根，王永久，俞大为．毕安基V型宇宙．天体物理学报，1988 (8)：235
[13] T. Fukui. Gen. Rel. Grav, 1993 (25) 731
[14] Ibid, 1992 (24): 389
[15] Wesson, P S. Astron. Astrophys, 1984 (119): 145.
[16] Fukui T. Astrophys Space Sci, 1988 (141): 407
[17] Fukui T. Gen. Rel Grav, 1993 (25): 931
[18] Peebles P J E. Principles of physical Cosmology. Princeton University Press, Princeton, 1992
[19] 刘辽，蒋元方，钱振华．宇宙的暴胀．物理学进展，1989 (9)：120
[20] Guth A H. Phys Rev, 1981, D (23): 347
[21] Linde A D. Rep, Prog. Phys, 1984 (47): 925
[22] Vilenkin A and Ford, L H. Phys Rev, 1982, D (26): 1231
[23] Howking S W. and Moss. I G. Nucl. Phys, 1985, B (224): 180
[24] Coleman S. and Weinberg E J. Phys. Rev, 1973, D (7): 1888
[25] Coleman. S. In The Whys of Subnuclear Physics ed. by A. Zichichi New York Plenum, 1979
[26] Coleman S. Phys Rev, 1977, D (15): 2929
[27] Coleman S. and Deluccia, F. Phys Rev. 1980; D (21): 2305
[28] Linde. A D. Phys. Lett, 1982, B (108): 389; Phys. Lett, 1982, B (114): 431

第6篇 量子宇宙学

上一篇的最后，我们谈到暴胀宇宙学可以解释标准宇宙模型中的视界问题、平直性问题和磁单极问题. 它已经把我们带到了$t=10^{-35}$s 的宇宙极早期，已接近于宇宙的开端. 剩下的一个问题就是宇宙的创生了，这是量子宇宙学要回答的问题.

广义相对论宇宙学是建立在爱因斯坦引力理论基础上的. 严格地说，量子宇宙学应该建立在量子引力理论的基础上. 然而，至今人们还未能建立一个令人满意的量子引力理论. 尽管如此，人们仍然可以根据已经了解的量子引力的某些特征，去寻找各种途径，尝试解决量子宇宙学的主要问题——宇宙的创生问题. 80年代初，霍金(Hawking)、维林金(Vilenkin)等人提出用宇宙波函数来描述宇宙的量子状态，而宇宙波函数满足宇宙动力学方程——惠勒-德维特(Wheeler-De Witt)方程. 这样，只要确定宇宙的边界条件，便可定量地研究宇宙的创生问题了.

对于宇宙波函数的选择和宇宙边界条件的确定，哈特-霍金(Hartle-Hawking)和维林金(Vilenkin)分别提出了不同的方案，这两个方案构成了目前量子宇宙学中的两个学派. 他们虽然都可以解决宇宙的创生问题，但它们的理论本身差异甚大，争论相当激烈. 下面我们先讨论哈特-霍金的方案[19~29]，然后讨论维林金的方案[51~59].

1 宇宙量子力学

在量子宇宙学中，宇宙的状态由宇宙波函数来描述，由这个波函数可确定宇宙按特征量分布的几率幅. 故在量子力学意义上讲，这种描述是完备的. 在哈特-霍金理论中，可以自然地给出宇宙边界条件，所以能够得到一个自含的宇宙. 在这样的理论框架下，人们的任务是给出宇宙按照对观测有兴趣量分布的宇宙波函数. 哈特-霍金采用了欧氏（其中时间为纯虚数）路径积分表述.

§1.1 量子引力的路径积分表述

在量子力学中，所有的物理定律都可以用路径积分形式来表述，对于单个粒子系统，粒子可以从事件(x_1, t_1)经由任何路径到达事件(x_2, t_2)，每个路径的权重为$\exp(iI)$，其中I是系统的作用量. 于是，粒子由点(x_1, t_1)到达点(x_2, t_2)的几率幅为

$$\langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle = \int \delta x \exp(iI), \tag{1.1.1}$$

其中的泛函积分是对连接(x_1, t_1)和(x_2, t_2)的所有路径进行的. 这一表述同样可用于量子场论. 我们把场$\phi(x)$看作场构形空间的坐标，则事件便可由点$(\phi(x), t)$给出. 其含义是在时刻t场具有构形$\phi(x)$. 于是，场由$(\phi_1(x), t_1)$到$(\phi_2(x), t_2)$的几率幅为

$$\langle \phi_2(x), t_2 | \phi_1(x), t_1 \rangle = \int \delta\phi(x, t) \exp(iI). \tag{1.1.2}$$

式中积分沿构形空间中连接$(\phi_1(x), t_1)$和$(\phi_2(x), t_2)$的所有路径进行. 这样，只要作代换$(x, t) \leftrightarrow (\phi(x), t)$，对单粒子系统的讨论和对场的讨论便在形式上完全一样.

作为量子理论的起点，是通过在适当的构形空间给出系统的波函数，从而确定系统的状态. 波函数的构造要从它的几率解释出发，可以写成形式

$$\Psi(x, t) = N\int_{c}\delta x(t)\exp(iI[x(t)]), \tag{1.1.3}$$

其中 N 是归一化因子，由系统的初始准备给出，积分是沿一类路径进行的，这类路径是从 (x, t) 出发并按前面所述的方式加权.

(1.1.3)并不是好的定义，因为在一般情况下(1.1.1)和(1.1.2)中的路径积分可能发散. 为了解决这一问题，只要将时间轴在虚平面上顺时针转到虚时间轴($t\to -i\tau$)，并且考虑到 $t\to -\infty$ 时对系统的准备对应于 $\tau\to -\infty$. 按照这种程序，单粒子系统的基态波函数应构造为

$$\Psi(x, \tau) = N\int\delta x\,\exp(-I[x(\tau)]). \tag{1.1.4}$$

式中 $I(x(\tau))$ 是所谓欧氏作用量，它是通过作代换 $t\to -i\tau$ 并调整一个整体符号(使其为正)得到的. 可以看出，如果 $I[x(\tau)]$ 是正定的，则路径积分(1.1.4)便是收敛的. 将所得波函数解析延拓到实时间轴，便可得到物理结果.

上式可直接推广到量子场情况，系统的基态波函数具有形式

$$\Psi(\phi(x), \tau) = N\int\delta\phi(x)\exp(-I[\phi(x)]). \tag{1.1.5}$$

我们希望将同样的表述用于量子引力. 在广义相对论中，引力场即度规张量场. 一个紧致的 4 维流行时空度规可表示为

$$ds^2 = -(N^2 - N_iN^i)dt^2 + 2N_i dx^i dt + h_{ij}dx^i dx^j, \tag{1.1.6}$$

其中 N 是时移(lapse)函数，N_i 是位移(shift)函数，h_{ij} 是 3 维类空超曲面 $t=\text{const}$ 上的内禀度规. N，N_i，h_{ij} 均为时空坐标的函数；h_{ij} 作为自由度构成一个无限维的超空间，而 N 和 N_i 可以通过适当的广义变换消去，因此它们不构成物理的自由度. 下面证明(1.1.6)式. 首先，我们在时空流形中引入一个类空超曲面，在其上任一点 (x^i, t) 引入法矢 n^a 和切矢 $X_i^a \equiv X^a{}_{,i}$，它们满足关系

$$g_{ab}X^a n^b = g_{ab}X^a X^b = 0, \qquad \text{(正交)}$$

$$g_{ab}n^a n^b = -1, \qquad \text{(类时)}$$

则$\{n^a, X^a_i\}$构成一个局部 4 标架．设超曲面在时空中连续变形，定义变形矢量为

$$N^a \equiv \frac{\partial}{\partial t} X^a(x, t) \equiv \dot{X}^a.$$

把它在局部 4 标架上分解：

$$N^a = N n^a + N^i X^a_i.$$

式中的类时分量 N 就是前面说的时移(lapse)、类空分量 N^i 即为位移(shift)．由于

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{ti}dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j,$$

而

$$g_{tt} = \frac{\partial X^a}{\partial t}\frac{\partial X^b}{\partial t} g_{ab} = N^a N^b g_{ab} =$$

$$N^a N^b (h_{ab} - n_a n_b) = N^i N_i - N^2.$$

实际上

$$N^a N^b (h_{ab} - n_a n_b) = N_a N^b h^a_b - N^2 =$$

$$(N n_a + N^i X_{a,i})(N n^b + N^i X^b_i) h^a_b - N^2 =$$

$$(N n_a + N^i X_{a,i})(0 + N^i X^b_i) - N^2 =$$

$$N^i N_i - N^2.$$

类似地有

$$g_{ti} = X^a_i N^b g_{ab} = X^a_i N^b (h_{ab} - n_a n_b) = N_i,$$

$$g_{ij} = X^a_i X^b_j g_{ab} = X^a_i X^b_j (h_{ab} - n_a n_b) = h_{ij},$$

由此即可得到(1.1.6)式．

关于时间 t，在广义相对论(经典)宇宙学中是用的世界时，它是宇宙的内禀属性．显然，当研究量子宇宙学时，任何测量系统本身作为宇宙的一部分也必须量子化，因此独立的时间便完全失去了意义．这样，构形空间的坐标应该只有 h_{ij}，若还存在物质场 ϕ，则仅由(h_{ij}, ϕ)描述．于是，宇宙由 3 维类空超曲面 h_{ij}(其上有场 ϕ)跃迁到类空超曲面 h'_{ij}(其上有场 ϕ')的跃迁几率幅可表为

$$\langle h'_{ij}, \phi' | h_{ij}, \phi \rangle = \int \delta[g_{\mu\nu}, \phi] \exp(iI[g_{\mu\nu}, \phi]). \qquad (1.1.7)$$

与一般量子系统的处理相类似，量子引力系统的波函数可表示为

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = N \int_C \delta g_{\mu\nu} \delta\phi \exp(iI[g_{\mu\nu}, \phi]). \qquad (1.1.8)$$

式中 N 是归一化常数，积分区域 C 是构形空间中连接点(h_{ij}, ϕ)和初始点的所有路径．系统的基态波函数具有形式

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = N\int_C \delta g_{\mu\nu}\delta\phi\exp(-I[g_{\mu\nu}, \phi]). \qquad (1.1.9)$$

式中 $I[g_{\mu\nu}, \phi]$是欧氏作用量．

我们期望，波函数(1.1.9)应满足一个类似于薛定谔(Schrodinger)方程的宇宙动力学方程．下面我们将得到这样一个方程，它被称为惠勒-德威特(Wheeler-De witt)方程．

在单圈(也称为半经典的 WKB)近似下，(1.1.9)具有形式

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = N\sum_i B_i\exp(-I_{cl}^i). \qquad (1.1.10)$$

式中 I_{cl}^i是第 i 个满足最小作用量原理的经典欧氏作用量，N 是归一化常数，B_i 是对经典轨道的涨落．

§1.2 宇宙动力学方程

我们首先给出广义相对论的哈密顿形式．为此，引力场的作用量取为

$$I_g = \frac{1}{16\pi}\left[\int_M d^4x\sqrt{-g}(R-2\Lambda) + 2\int_{\partial M} d^3x\sqrt{h}K\right]. \qquad (1.2.1)$$

式中中括号内第二项的引入是为了抵消第一项在变分时出现的表面积分项．实际上，第一项在对 $g_{\mu\nu}$变分时给出的表面积分项为

$$\Delta I_g = \frac{1}{16\pi}\int_{\partial M}(\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \Delta\Gamma^{\mu}_{\cdot\mu}g^{\cdot\alpha})d\sigma_\alpha, \qquad (1.2.2)$$

积分是在时空流形 M 的表面 ∂M 上进行的．由于含有场量 $g_{\mu\nu}$的一阶导数项，所以 $\Delta\Gamma'$ 在表面 ∂M 上不能取为零．在式(1.2.1)中，$h=\det h_{ij}$，$K=h_{ij}K^{ij}$，h_{ij}和 K_{ij}分别是 3 维边界上的内禀度规张量和外部曲率张量，R 是标曲率，Λ 是宇宙常数．

如果存在物质场，作用量中还应加一项 I_m，注意到度规表示式(1.1.6)，可将作用量写为

$$I = I_g + I_m = \frac{1}{16\pi}\int d^4x h^{1/2} N(K_{ij}K^{ij} - K^2 + {}^3R - 2\Lambda) + I_m. \tag{1.2.3}$$

式中 $$K_{ij} = \frac{1}{N}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} + N_{(i|j)}\right), \tag{1.2.4}$$

下标的小竖表示对 h_{ij} 取协变微商，${}^3R$ 是由 h_{ij} 给出的内部曲率标量.

由(1.2.3)可以得到系统的哈密顿量的表示式：

$$H = \int d^3x(\pi\dot{N} + \pi^i\dot{N}_i + NH^0 + N_iH^i), \tag{1.2.5}$$

这里 N 和 N^i 起拉格朗日乘子的作用，

$$H^0 = \frac{h^{1/2}}{16\pi}[K_{ij}K^{ij} - K^2 - {}^3R(h) + 2\Lambda], \tag{1.2.6}$$

$$H^i = -2\pi^{ij}{}_{|j}; \tag{1.2.7}$$

$$\pi = \frac{\delta S_g}{\delta\dot{N}} = 0,$$

$$\pi^i = \frac{\delta S_g}{\delta\dot{N}_i} = 0,$$

$$\pi^{ij} = \frac{\delta S_g}{\delta\dot{h}_{ij}} = \frac{h^{1/2}}{16\pi}(Kh^{ij} - K^{ij}). \tag{1.2.8}$$

由于 $\pi = 0$ 和 $\pi^i = 0$ 恒成立，所以 $\dot{\pi} = 0$，$\dot{\pi}^i = 0$. 由哈密顿方程得

$$H^0 = 0, \tag{1.2.9}$$

$$H^i = 0. \tag{1.2.10}$$

式(1.2.9)和(1.2.10)即为哈密顿约束和动量约束.

在由场构形 $\{h_{ij}\}$ 构成的超空间中引入度规

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}), \tag{1.2.11}$$

则(1.2.6)可写为

$$H^0 = \frac{1}{16\pi}[G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - h^{1/2}({}^3R - 2\Lambda)]. \tag{1.2.12}$$

做算符化处理 $\pi^{ij} \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}$；如果有物质场存在，将相应的广

义动量以算符代替，则哈密顿约束给出：

$$\left\{-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}}+h^{1/2}\left[-{}^3R+2\Lambda+16\pi T_{nn}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi},\phi\right)\right]\right\}\Psi[h_{ij},\phi]=0, \tag{1.2.13}$$

此即 Wheele-DeWitt 方程，也就是我们要寻找的宇宙动力学方程. 式中 T_{nn} 是物质场能-动张量在 3 维类空超曲面法线方向上的分量. 人们可以把(1.2.13)认为是宇宙的薛定谔方程，但由于波函数不明显地依赖于时间，所以方程中没有时间导数项.

由动量约束可得

$$\left(\frac{\delta\Psi}{\delta h_{ij}}\right)_{|j}=T^{i}\cdot\Psi(h_{ij},\phi), \tag{1.2.14}$$

此即动量约束方程. 它表明，对于相互之间可以由坐标变换得到的不同度规 h_{ij}，其波函数必须是相同的.

方程(1.2.13)和(1.2.14)都是无限维空间中的变分方程，没有普遍的严格的求解方法，只有通过限制超空间自由度个数，也就是用小超空间模型(只有有限个自由度的超空间模型)，将量子涨落限制在保持时空某些拓扑及几何特征的自由度上，从而将变分方程简化为简单得多的偏微分方程组.

宇宙波函数 $\Psi(h_{ij},\phi)$ 要满足方程(1.2.13)和(1.2.14)，$|\Psi|^2$ 表征宇宙在超空间中出现在点 (h_{ij},ϕ) 处的几率.

关于方程(1.2.13)和(1.2.14)，我们再作一补充讨论.

(1) 由经典几何动力学可以得到经典几何应满足的两个约束；正则量子化以后，我们得到波函数应满足的两个偏微分方程，这就是量子几何动力学中的基本动力学方程. 原则上，它们应适用于任何量子引力系统，关键在于选择适当的边界条件.

我们可以把(1.2.13)看作一个零能的定态薛定谔方程. 对于闭合宇宙，它表示宇宙的总能量(引力能加上物质能)恒为零. 实际上，闭合宇宙的总能量必须为零，因为否则引力线通量将不会为零，而对于闭合宇宙这是不可能的.

对于真空引力场或按宇宙学原理，(1.2.14)式化为

$$\left[\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\Psi(h_{ij},\ \phi)\right]_{|j}=0.$$

此式表明，3维曲面上坐标系的微小变化将引起度规的微小变化，由此导致的波函数的变化为零，这意味着波函数是规范不变的.

（2）泛函微分方程(1.2.13)可以看作度规场流形$\{h_{ij}\}$上以G_{ijkl}为超度规的微分方程，所有无限多种3维几何$\{h_{ij}\}$和物质构形一起构成一个无限维构形空间，叫超空间. 1967年，De Witt首先指出了G_{ijkl}的几何意义. 可以验证，

$$G_{ijkl}=G_{jikl},\ G_{ijkl}=G_{ijlk},\ G^{ijkl}=G^{jilk},$$

$$G^{ijkl}=G^{ijlk},\ G_{ijkl}G^{klab}=\delta^{ab}_{ij}.$$

独立的对称指标是11，22，33，12，13，23；对角元素为G_{1111}，G_{2222}，G_{3333}，G_{1212}，G_{1313}，G_{2323}；号差为$(-+++++)$. 因此，W-D方程就是6维超度量空间内的一个双曲方程.

（3）Kuchar曾指出，在量子几何动力学中，由正则量子化并不能得到哈密顿，而只是得到了一个哈密顿约束. 这一点与通常的量子力学不同. 这一特点将导致波函数不能构成一个希尔伯特空间，因而波泛函的几率解释可能会遇到困难.

§1.3 边界条件

为了给出宇宙动力学方程的解，还需要有边界条件. 在量子宇宙学中，由于时间是内禀时间，所以初始条件包含在边界条件之中. 在量子宇宙学中，也存在某些“自然边界条件”，这些“自然边界条件”是由问题的物理考虑得到的. 比如考虑度规的正定性，即当看成场量时必须满足$h^{1/2}\geqslant 0$. 定义新的场量$h_{ij}\to\tilde{h}_{ij}\equiv h_{ij}/h^{1/2}$，则此边界条件可写成

$$\Psi[\tilde{h}_{ij},\ h^{1/2},\ \phi]=0,\ 当\ h^{1/2}<0. \qquad (1.3.1)$$

在路径积分表述中，这个边界条件可以由适当选择积分路径来实现.

有了边界条件(1.3.1)还不够，还需要有作为边界条件的初始宇宙波函数的形式．这涉及到(1.1.9)以及其中积分路径C的选取．

霍金认为，宇宙中任何一点都不应处于特殊地位，因此宇宙应该是没有边界的．他认为物理定律在任何地方都应有效，宇宙的开端处也不例外．为此，应该让路径积分只对非奇异性度规取和．在通常的路径情况下，人们知道测度更集中于不可微的路径．但是在某些适当的拓扑中，这些路径是光滑路径的完备化，并且具有定义完好的作用量．类似地可以想到，量子引力的路径积分应该对光滑度规的完备化空间取和，不应包含奇异性度规(因为它的作用量没有定义)．

在黑洞的情况下，路径积分应该对欧氏(规则)度规取和．这意味着像史瓦希黑洞这样的奇异性在欧氏度规中不出现，欧氏度规并没有到达视界面以内．视界像是极坐标原点．因此，欧氏度规的作用量是完好定义的．这一问题的处理可认为是宇宙监督的量子理论表述：奇点处结构的破坏不应影响任何物理测量．

这样看来，量子引力的路径积分应该对非奇异欧氏度规取和．那么在这些度规上应赋予什么样的边界条件呢？回答是：只存在两个自然的选择：第一个选择是度规在紧致集之外要趋于平直的欧氏度规；第二个选择是在紧致和没有边界的流形上的度规．

第一类度规(渐近欧氏度规)对于散射计算仍然很合适．在散射过程中，粒子由无穷远处射入，人们在无穷远处观测出射粒子，无穷远处的背景度规是平直的，可以用通常的方式把场的小涨落解释成粒子．人们不必问在中间的相互作用区域发生了什么．这就是人们让相互作用区域的路径积分对所有可能历史(即对所有欧氏度规)取和的原因．

在宇宙学中情况就不同了．人们处在宇宙之中而非宇宙之外，因此人们感兴趣的是在有限区域内而不是在无限远处进行测量．首先假定宇宙学的路径积分是对所有渐近欧氏度规取和．那

么对于有限区内的测量的几率将存在两类贡献. 第一类来自于连通的渐进欧氏度规；第二类来自于非连通的度规，它由一个包含测量区域的紧致度规和一个与之相分离的渐近欧氏度规组成，如图所示.

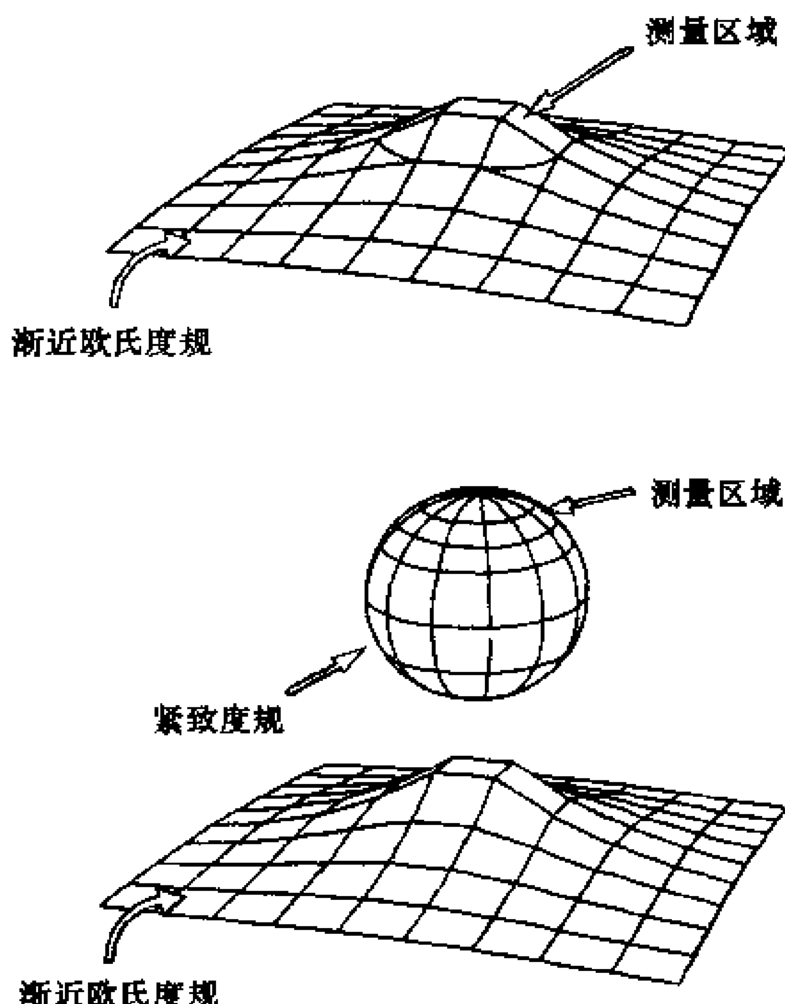


图 6-1

人们不应该把非连通度规从路径积分中排除，因为它们可以由连通度规来近似，在这些度规中不同部分可由虫洞(其作用量可忽略)连接起来.

对于散射问题，由于时空的非连通的紧致区域不和无穷远连接，而测量是在无穷远处进行的，所以紧致区域不影响散射计算. 但是它们会影响宇宙学中的测量，因为宇宙学的测量是在有限区域进行的. 的确，这种非连通度规贡献远远超过了来自连通的渐近欧氏度规贡献. 这样，即使把宇宙学的路径积分对所有渐近

欧氏度规取和，其效应和对所有紧致度规取和几乎完全相同. 所以哈特和霍金认为，更自然地应该对所有无边界的紧致度规取和. 这个宇宙的边界条件可以表述为：宇宙的边界条件是它没有边界.

我们对前面的讨论做一个小结：宇宙动力学方程由 Wheele-De Witt 方程给出，边界条件由式(1.1.9)(C 取上面所讨论的路径)以及因某些物理要求给出. 对于一个动力学系统，这种表述是完全的.

为了对哈特-霍金的"无边界"的边界条件有一个更清晰的了解，我们再做一直观的描述. 先从确定宇宙边界条件的必要性谈起. 在宇宙学中被研究的系统是整个宇宙. 根据定义，宇宙没有外部，没有人们可对其要求边界条件的"宇宙之外的部分". 而且仅仅依靠数学的相容性不可能求出 Wheeler-De Witt 方程的解. 因此，宇宙学家不能不从物理的考虑出发来确定宇宙的边界条件. 用几何的语言表述就是要确定基态波函数(1.1.9)中路径积分的积分路径. 量子力学中的路径积分表述就是对历史求和，波函数的计算就是对系统的某一类历史算出一个确定的和. 为了使波函数是惟一的，必须精确规定需要求和的历史类. 这种对历史求和在数学上相当于解薛定谔方程. 在量子宇宙学中，宇宙波函数可以通过对宇宙的某一类历史求和而计算出来. 这就是解 Wheeler-De Witt 方程的过程. 获得宇宙动力学方程的解取决于怎样选择对之求和的历史类. 我们可以由几何形体来描述哈特-霍金的工作. 把宇宙在指定时间的空间外延想像成位于水平面内的一个闭合圈(如图所示)，竖直轴代表时间，随时间的增加，闭合圈变大，表示宇宙膨胀. 这样，宇宙的各种可能的历史在宇宙随时间演化时就表现为由宇宙圈生长成的管子. 管子的终端代表今天的宇宙，最下端就表示宇宙的初始态(创生). 初始态要由提出的边界条件来确定. 某些管子的下端可能像一个锥体的尖端一样封闭；其他管子下端则可能突然结束. 哈特-霍金认为，只应考虑初始端以光滑规则方式收缩到零的半球形帽的那些管子. 就是

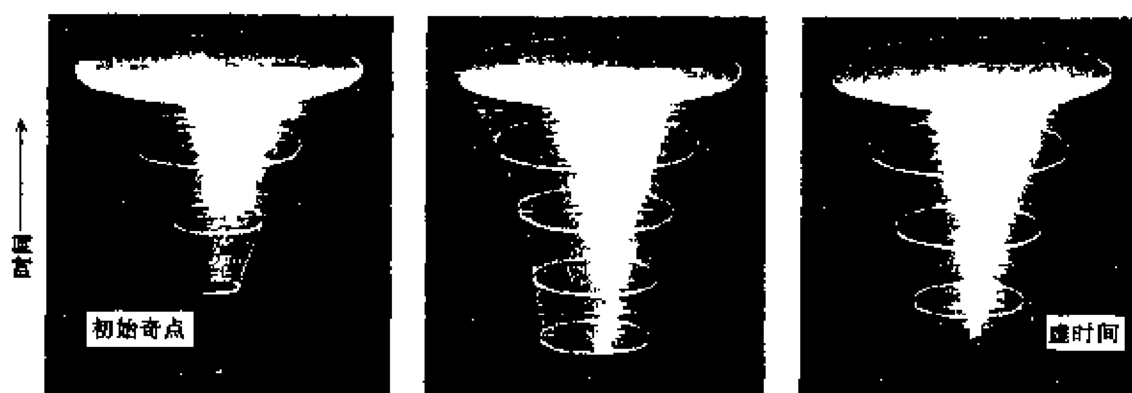


图 6-2

说，人们只应该对这些无边界几何形体求和，终端除外（终端是开放的，相当于今天的宇宙）．这就是哈特-霍金的无边界的边界条件．

在广义相对论宇宙学中要用这样一种光滑的方式封闭几何形体是不可能的．奇点定理告诉人们，宇宙的所有经典历史都必须以奇点的方式收缩到零，就像锥体的末端一样．但是量子理论中对历史的求和法则允许有许多可能的历史，而不仅仅是那些经典的历史．于是光滑的封闭便成为了可能．特别是，封闭的区域可以看作发生在虚时间内，因而显然是非经典的．

哈特-霍金由这一边界条件得到了一个宇宙动力学方程的解．由于虚时间的出现是量子理论中的隧道效应的特征，因此宇宙可能是从“一无所有”经隧道效应创生出来的；大爆炸是在隧道效应之后接着发生的．

下面我们具体讨论哈特-霍金的宇宙波函数．

2 宇宙波函数

§2.1 基态波函数的表述

这一章，我们将比较详细地讨论哈特-霍金的基态波函数理论[20]. 波函数依赖于类空超曲面的拓扑性质和3维度规以及曲面上的物质场的值. 为了简洁，我们现在只考虑 S^3 拓扑性质，其他可能性放在后面讨论.

正如前章所讨论的，基态波函数构造成泛函积分形式：

$$\Psi_0[h_{ij}, \phi] = N\int\delta g_{\mu\nu}\delta\phi\exp(-I[g_{\mu\nu}, \phi]), \qquad (2.1.1)$$

式中 I 是总的欧氏作用量，积分沿着具有紧致边界条件的一类4维欧氏几何和相应的一类欧氏场构形，在边界上诱导(或内禀)度规为 h_{ij}. 为了实现基态波函数的定义，需要给出一类几何和场用来求和. 其几何应当是紧致的，其上的场应是规则的. 在正宇宙常数的情况下，场方程的任何规则欧氏解必是紧致的. 最大的对称性解是半径为 $3/\Lambda$ 的4维球，其度规可写为

$$ds^2 = (\sigma/H)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_3^2). \qquad (2.1.2)$$

式中 $d\Omega^2$ 是3维球上的度规，$H^2 = \sigma^2\Lambda/3$，我们为以后表述方便还引入了一个因子 $\sigma^2 = l_p^2/24\pi^2$，$l_p^2 = 16\pi G$，显然，当 $\Lambda > 0$ 时，对紧致的4维几何取和是惟一合理的选择.

如果 $\Lambda \leqslant 0$，场方程没有紧致解. 最大对称性解是欧氏空间 $(\Lambda = 0)$

$$ds^2 = \sigma^2(d\theta^2 + \theta^2 d\Omega_3^2) \qquad (2.1.3)$$

和欧氏反 de Sitter 空间（$\Lambda<0$）

$$ds^2=(\sigma/H)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\Omega_3^2). \qquad (2.1.4)$$

正如在上一章最后一节中谈到的，对于散射问题来说，当 $\Lambda\leqslant 0$ 时，基态波函数定义为渐近欧氏几何上或渐近反 de Sitter 几何上的泛函积分更合适．然而在宇宙中，人们感兴趣的是在时空内部进行的测量，内部点是否与无穷远区域连通没什么关系．哈特-霍金认为，应该取由两部分组成的不连通的几何：其一是紧致的部分，没有内部边界．这个不连通几何实际上给出了对基态波函数的绝对主要的贡献．

在 $\Lambda\leqslant 0$ 的情况下，由紧致 4 维几何上得到的基态波函数，对大的 3 维几何发散，且波函数不能归一化．这是因为在作用量中，正的 Λ 和负的 Λ 对大的 4 维几何的作用刚好相反．因此，我们只考虑 $\Lambda>0$ 的情况，$\Lambda=0$ 将被视为 $\Lambda>0$ 的极限情况．

有时在 K-表象下描述波函数比较方便．即将 $h^{1/2}$ 代之以它的共轭动量 $-\frac{4}{3}Kl_p^{-2}$．这时也可用泛函积分构造之：

$$\Phi_0[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\phi}]=N\int\delta g_{\mu\nu}\delta\phi\exp(-I^K[g_{\mu\nu},\phi]). \quad (2.1.5)$$

积分仍沿着前面的场和几何，只是现在在边界上固定的是 $\tilde{\phi}$，$\tilde{h}_{ij}$ 和 K，而不再是 ϕ 和 h_{ij}．因此，I^K 是保持 $\tilde{\phi}$，$\tilde{h}_{ij}$ 和 K 在边界上固定的欧氏作用量．我们有

$$l_p^2 I_F^K(g_{\mu\nu})=-\frac{2}{3}\int_{\partial M}d^3x h^{1/2}K-\int_M d^4x g^{1/2}(R-2\lambda), \qquad (2.1.6)$$

$$I_M^K(g_{\mu\nu},\phi)=\frac{1}{2}\int_M d^4x g^{1/2}\left[(\nabla\phi)^2+\frac{1}{6}R\phi^2\right]. \quad (2.1.7)$$

向 K-表象变换时，我们有

$$\Phi[\tilde{h}_{ij}, K]=\int_0^\infty\delta h^{1/2}\exp\left[-i\frac{4}{3}l_p^2\int d^3x h^{1/2}K\right]\Psi[h_{ij}], \qquad (2.1.8a)$$

反过来有 $\Psi[h_{ij}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta K \exp\left[i\, \frac{4}{3} l_p^{-2} \int \mathrm{d}^3 x h^{1/2} K \right] \Phi[\tilde{h}_{ij}, K].$

$$(2.1.9a)$$

按照欧氏的 K，上两式可改写为

$$\Phi[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\Phi}] = \int_0 \delta h^{1/2} \exp\left[-\frac{4}{3} l_p^2 \int \mathrm{d}^3 x h^{1/2} K \right] \Psi[h_{ij}, \tilde{\Phi}], \tag{2.1.8b}$$

$$\Psi[h_{ij}, \phi] = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \delta K \exp\left[\frac{4}{3} l_p^2 \int \mathrm{d}^3 x h^{1/2} K \right] \Phi[\tilde{h}_{ij}, K, \tilde{\Phi}]. \tag{2.1.9b}$$

式中路径 C 从 $-i\infty$ 到 $+i\infty$.

从泛函积分(2.1.5)来构造基态波函数有一个优点，就是(2.1.9b)中的积分总能满足波函数 $\Psi_0(h_{ij}, \phi)$ 的要求，当 $h^{1/2} < 0$ 时这波函数等于零.

欧氏引力作用量(2.1.6)式不是明确限定的，因为(2.1.1)和(2.1.5)中的泛函积分还需要仔细地加以限制. 其中一种限制方法是使积分改变为沿着共形因子和共形等效几何上进行. 通过适当选择共形因子的积分路径，便可构造一种收敛的泛函积分.

这是哈特-霍金关于基态波函数的基本思想. 下面给出它的某些性质，并在一小超空间模型中表明它的合理性.

§2.2 半经典近似

基态波函数泛函积分定义的一个重要优点是它直接满足半经典近似. 本节将检验上一节定义的基态波函数的半经典近似. 为了简便，我们只考虑纯引力的情况，其结果可直接推广到含物质场的情况.

通过最陡下降法计算泛函积分，可以得到半经典近似. 如果只有一个稳态相点，半经典近似为

$$\Psi_0[h_{ij}] = N \Delta^{-1/2}[h_{ij}] \exp(-I_{cl}[h_{ij}]). \tag{2.2.1}$$

这里，I_{cl} 是稳态相点的欧氏作用量，即对应用于欧氏场方程

$$R_{\mu\nu}=\lambda g_{\mu\nu} \tag{2.2.2}$$

的解 $g^{cl}_{\mu\nu}$；在闭合 3 维曲面边界上，它给出度规 h_{ij}，且满足上节讨论的边界条件；关于 $\Delta^{-1/2}$的详细讨论可见文献[15].

如果存在不止一个稳态相点，则必须仔细考虑积分路径，以便确定哪个给出决定性的贡献. 一般地，有最低 ReI 值将是稳态相点，尽管也许不是，比如有两个对应于 4 维几何的稳态相点，则两个相互共形. 本节我们将看到一个这样的例子. 基态波函数是实的，这意味着如果稳态相点有复的作用量值，则必有其共轭的等同贡献；如果稳态相点的 4 维几何不存在，则在半经典近似下波函数将是零.

首先从泛函积分(2.1.5)求 Φ_0 的半经典近似，然后用最陡下降法求积分(2.1.9b)，从而获得 Ψ_0 的半经典近似. 要求

$$\int \delta h_{ij}\bar{\Psi}_0[h_{ij}]\Psi_0[h_{ij}]=1, \tag{2.2.3}$$

可确定(2.2.1)中的归一化常数. 我们将(2.2.3)几何地解释为所有 4 维几何上的路径积分，在度规为 h_{ij}的 3 维曲面两边这些 4 维几何是紧致的. 从而，根据无边界紧致 4 维几何的作用量，给出这个可能路径积分的半经典近似. 当 $\Lambda>0$，其解是 4 维球. 于是

$$N^2=\exp\left[-\frac{2}{3H}\right]. \tag{2.2.4}$$

由波函数的泛函积分定义，波函数的半经典近似使我们对 Wheeler-De Witt 方程的边界条件有一个深刻的理解. 它们可以自然地应用到足够大体积的和无穷小体积的 3 维几何.

首先考虑小 3 维体积的极限. 如果极限 3 维几何可以嵌入平直空间，则当 $\Lambda>0$ 时(2.2.2)的经典解是 4 维球，而且当 3 维几何缩为零时它保持为 4 维球. 此时作用量趋近于零. 因此必须考虑波函数的涨落行列式的行为. 在这种极限情况下，可忽略曲率，把涨落看作是关于平直空间区域的. 考虑它在 4 维度规常共形尺度变化下和边界 3 维度规下的行为，便可求其值.

在 $\Lambda>0$ 时，在半经典近似的基础上，我们可以定性地讨论足够大的 3 维体积波函数的行为. 对于(2.2.2)任一实解来说，4 维

球具有最大体积.随着 3 维几何体积的增大,将得到一不再能放人 4 维球任何地方的 3 维几何.于是我们认为稳态相几何变为复的了;如果(2.2.1)在稳态相的 4 维几何中取值,基态波函数将变为 2 表示的实组合.于是我们认为,随着 3 维体积的增大,波函数振荡.如果振荡没有强烈地衰减,则对应于一无限膨胀的宇宙.

以上讨论仅仅是定性的,但已指出基态波函数行为照样决定于 Wheeler-De Witt 方程的边界条件.下面将这些讨论用于一小超空间模型.

§ 2.3 小超空间模型

超空间是一个无限维流形,无法对 W-D 方程求解.如果考虑上述无限维空间内的一个有限维子空间,即所谓小超空间,则往往可以对 W-D 方程的解进行一些讨论.这里,我们将采用一特别简单的小超空间模型,来说明以前那些一般讨论的含义.在这一模型中,我们限定宇宙常数为正,4 维几何为空间均匀、各向同性且闭合.这就是说,设

$\Lambda>0$,

3 几何的拓扑是 S^3.

此时度规可表示为

$$ds^2=\sigma^2[-N^2(t)dt^2+a^2(t)d\Omega_3^2]. \tag{2.3.1}$$

式中 $N(t)$为时移(lapse),$\sigma=l^2/24\pi^2$.为简单计,设物质场是共形不变标量场,均匀性条件要求 $\phi=\phi(t)$.这样,波函数仅是两个变量 $a(t)$和 $\phi(t)$的泛函:

$$\begin{aligned}&\Psi=\Psi[a(t),\ \phi(t)],\\&\Phi=\Phi[K(t),\ \tilde{\phi}(t)].\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

式中 $\tilde{\phi}(t)=a^{-3/2}\phi(t)$.

为了简化讨论,我们引人如下定义并改变变量尺度:

$$\phi=\frac{\tilde{\phi}}{a}=\frac{\chi}{(2\pi^2\sigma^2)^{1/2}a}, \tag{2.3.3}$$

$$\Lambda=3\lambda/\sigma^2,\ H^2=|\lambda|. \tag{2.3.4}$$

经典洛仑兹作用量可写为

$$I^a = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\left(\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2 + a^2 - \lambda a^4 + \left(\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \chi^2\right]. \tag{2.3.5}$$

实际上，$I^a=I^a_g+I^a_m$，而

$$I^a_g = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}x^3\sqrt{g}\,(R-2\Lambda),$$

$$I^a_m = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[g^{00}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{6}R\phi^2\right],$$

$$R-2\Lambda = 6\sigma^{-2}a^{-2}(aaN^{-2} - aaNN^{-3} + a^2N^{-2} + 1 - a^2\lambda),$$

$$a = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}.$$

由于 $\mathrm{d}s^2 = \sigma^2\{-N^2(t)\mathrm{d}t^2 + a^2(t)[\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\mathrm{d}\varphi^2)]\} = c(\eta)\{-\mathrm{d}\eta^2 + [\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta(\mathrm{d}\theta_1^2 + \sin^2\theta_1\mathrm{d}\varphi^2)]\}$,

所以有 $R-2\Lambda = C^{-1}\left[3\dot{D} + \frac{3}{2}D^2 + 6K\right] - 2\Lambda = 6\sigma^{-2}a^{-2}(a^{11}a^{-1} + 1 + a^2\lambda) = 6\sigma^{-2}a^{-2}(aaN^{-2} - aaNN^{-3} + a^2N^{-2} + 1 - a^2\lambda).$

考虑到 $a' = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\eta} = \frac{a}{N}\dot{a}$,

$$\int \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\theta_1\mathrm{d}\varphi\sqrt{-g} = 2\pi^2\sigma^4a^3N,$$

可得 $I_g = 12\pi^2\sigma^2\int \mathrm{d}t\left(\frac{N}{a}\right)\left[-\frac{a^2}{N^2}\dot{a}^2 + a^2 - \lambda a^4\right]$,

于是得到(2.3.5)。

用通常的方法可以由这一作用量构造 a 和 χ 的共轭动量 π_a 和 π_χ：

$$\pi_a = \frac{\delta L}{\delta\dot{a}} = \frac{1}{2}\frac{N}{a}\left(2\frac{a}{N}\dot{a}\frac{a}{N}\right) = -\frac{a}{N}\dot{a},$$

$$\pi_\chi=\frac{\delta L}{\delta\dot{\chi}}=\frac{1}{2}\ \frac{N}{a}\left(2\ \frac{a}{N}\dot{\chi}\frac{a}{N}\right)=-\frac{a}{N}\dot{\chi}.$$

对(2.3.5)对 N 求变分，得到

$$\frac{\delta I}{\delta N(t')}=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}t\left\{\frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\ \frac{1}{a}\left[-\left(\frac{a}{N}a\right)^2+a^2-\lambda a^4+\left(\frac{a}{N}\dot{\chi}\right)^2-\chi^2\right]+\frac{N}{a}\left[2\left(\frac{a}{N}\dot{a}\right)\left(\frac{a}{N^2}a\ \frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\right)+2\left(\frac{a}{N}\chi\right)\left(-\frac{a}{N^2}\chi\ \frac{\delta N(t)}{\delta N(t')}\right)\right]\right\}=$$

$$\frac{1}{2a}\left\{\frac{a^2}{N^2}a^2-\frac{a^2}{N^2}\chi^2+a^2-\lambda a^4-\chi^2\right\}.$$

由此得到

$$\pi_a^2+a^2-\lambda a^4-\pi_\chi^2-\chi^2=0, \tag{2.3.6}$$

此即哈密顿约束.

引入正则量子化

$$\pi_a=-\imath\ \frac{\partial}{\partial a},\ \pi_\chi=-\imath\ \frac{\partial}{\partial\chi},$$

W-D 方程为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}-a^2+\lambda a^4-\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}+\chi^2\right]\Psi(a,\ \chi)=0. \tag{2.3.7a}$$

实际上，在把 c 数变为 q 时，要出现排列中的不确定性，一般有

$$\pi_a^2=-\frac{1}{a^p}\ \frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right). \tag{2.3.8}$$

式中 p 代表次序模糊因子. 因此，在一般情况下，W-D 方程可写为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^p}\ \frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right)-a^2-\lambda a^4-\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}+\chi^2\right]\Psi(a,\ \chi)=0. \tag{2.3.7b}$$

令上式中的 $p=0$，即得(2.3.7).

现在，我们讨论对波函数进行分离变量求解. 令

$$\Psi(a,\ \chi)=\sum_n C_n(a)u_n(\chi), \tag{2.3.9}$$

由(2.3.7b)得到两个常微分方程：

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial^2}{\partial\chi^2}+\chi^2\right)u_n(\chi)=\left(n+\frac{1}{2}\right)u_n(\chi), \tag{2.3.10}$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}C_n+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(n+\frac{1}{2}\right)C_n. \tag{2.3.11a}$$

(2.3.11a)也可以写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{a^p}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(a^p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}C_n\right)+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(n+\frac{1}{2}-\epsilon_0\right)C_n. \tag{2.3.11b}$$

(2.3.10)的解正是一个1维谐振子解

$$u_n(\chi)=\mathrm{e}^{-\chi^2/2}H_n(\chi). \tag{2.3.12}$$

(2.3.11a)的严格解无法求得，我们讨论其渐近行为.

当 a 甚小时，有

$$C_n\approx\text{const}, C_n\approx a^{1-p}; \tag{2.3.13}$$

当 a 甚大时，有

$$C_n\approx a^{-1}\exp\left(\pm\frac{i}{3}Ha^3\right). \tag{2.3.14}$$

为了构造小超空间模型中(2.3.11a)式的解，我们可以把欧氏泛函积分的规定应用到小超空间模型中. 对于 $\Psi_0(a_0, \chi)$，我们建议在满足边界条件的欧氏几何和场构形上对 $\exp(-I[g, \phi])$ 求和. 几何求和应该在形如

$$\mathrm{d}s^2=\sigma^2[\mathrm{d}\tau^2+a^2(\tau)\mathrm{d}\Omega_3^2] \tag{2.3.15}$$

的紧致几何上进行，$a(\tau)$ 与超曲面上给定的 a_0 值相对应. 对于物质场，应在各向同性的场 $\chi(\tau)$ 上求和，这个场与超曲面上规定的 χ_0 值相对应，且在紧致几何上是规则的. 这样，我们可以写出

$$\Psi_0(a_0, \chi_0)=\int\delta a\delta\chi\exp(-I[a, \chi]), \tag{2.3.16}$$

其中定义 $\mathrm{d}\eta=\mathrm{d}\tau/a$，作用量为

$$I=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\eta\left[-\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\eta}\right)^2-a^2+\lambda a^4+\left(\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}\eta}\right)^2+\chi^2\right]. \tag{2.3.17}$$

一共形旋转可以使(2.3.16)中的积分收敛.

在小超空间模型中构造基态波函数的另一种方法是在 K 表

象中进行. 对于具有 3 维超球面的 4 球而言，引入

$$k \equiv \frac{\sigma}{9} K,$$

由 $$K = h^{ij} K_{ij} = \frac{1}{N}\left(-\frac{1}{2} h^{ij} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} \right)$$

得到 $$k = \frac{1}{3a} \frac{da}{d\tau}.$$

又由 $$ds^2 = \left(\frac{\sigma}{H} \right)^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Omega_3^2) =$$

$$\sigma^2 \left[\left(\frac{d\theta}{H} \right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{H} \right)^2 d\Omega_3^2 \right] = \sigma^2 [d\tau^2 + a^2 d\Omega_3^2],$$

可得 $$k = \frac{H}{3} \cot\theta. \tag{2.3.18}$$

又由 $$I^K = K a^3 + I,$$

$$ds^2 = \sigma^2 [d\tau^2 + a^2 d\Omega_3^2] = \sigma^2 a^2 (d\eta^2 + d\Omega_3^2),$$

可知 $$I = \frac{1}{2} \int d\eta \left[-\left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 - a^2 + \lambda a^4 \right] =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\sin\theta}{H^2} (\sin^2\theta - 1 - \cos\theta) d\theta =$$

$$\frac{1}{2H^2} \left[-\frac{1}{3} \cos\theta (\sin^2\theta + 2) + \cos\theta + \frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^\theta.$$

式中 θ 为边界值. 由此可得

$$I^K = \frac{1}{3a} \frac{da}{d\tau} \cdot a^3 \Big|_\theta + I = \frac{1}{3H^2} \cos\theta \sin^2\theta + I,$$

$$I^K = -\frac{1}{3H^2} \left[1 - \frac{K}{(\kappa^2 + 1)^{1/2}} \right]. \tag{2.3.19}$$

式中 $$\kappa = \frac{3}{H} k = \cot\theta. \tag{2.3.20}$$

在 $K(k)$ 表象中，与(2.3.16)对应地有

$$\Phi_0(k_0, \chi_0) = \int \delta a \delta\chi \exp(-I^k[a, \chi]).$$

求和是在与(2.3.16)相同的几何和场上进行的，只是现在要求在 3 维曲面边界上 k 取给定值. 即在边界上它们要满足

$$k_0 = \frac{1}{3a} \frac{da}{d\tau}. \tag{2.3.21}$$

满足此要求的作用量是

$$I^{k}=k_{0}a_{0}^{3}+I. \tag{2.3.22}$$

如果算出了 $\Phi_{0}(k_{0}, \chi_{0})$，则通过线积分便可还原为 $\Psi_{0}(a_{0}, \chi_{0})$：

$$\Psi_{0}(a_{0}, \chi_{0}) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\mathrm{d}k \exp (ka_{0}^{3})\Phi_{0}(k_{0}, \chi_{0}). \tag{2.3.23}$$

式中积分从 $-i\infty$ 到 $+i\infty$.

从普遍的观点看，直接从(2.3.16)计算 $\Psi_{0}(a_{0}, \chi_{0})$ 和通过 K 表象(2.3.23)计算没有区别.

在半经典近似下，我们有

$$\Phi_{0}(K_{0}) = N\int\delta a \exp(-I^{K}) \approx N \exp[-I^{K}(K_{0})], \tag{2.3.24}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{0}(a_{0}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c}\mathrm{d}K \exp\left[\frac{4}{3}\int h^{1/2}\mathrm{d}^{3}x \cdot K\right]\Phi_{0}(K) &= \\ -\frac{N}{2\pi i}\int\mathrm{d}K \exp(ka_{0}^{3}-I^{K}) &= \\ -\frac{N}{2\pi i}\exp[-I^{K}(K_{0})+k_{0}a_{0}^{3}] &= \\ -\frac{N}{2\pi i}\exp(-I). &\end{aligned} \tag{2.3.25}$$

式中 I 和 I^{K} 分别为 $h^{1/2}$ 表象和 K 表象中的纯引力场作用量. 在推导上式过程中用到了积分

$$\frac{4}{3}\int h^{1/2}\mathrm{d}^{3}xK = \frac{4}{3}\int(\sigma a)^{3}\mathrm{d}\Omega_{3}\left(\frac{9}{\sigma}k\right) = a^{3}k = \frac{H}{3}a^{3}\kappa.$$

式中 $\int\mathrm{d}^{3}x = \sigma^{3}a^{3}\int\mathrm{d}\Omega_{3} = 2\pi^{2}\sigma^{3}a^{3}.$

按最小作用量原理有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\kappa}=0,$$

由此可得 $\sin\theta=Ha_{0}=\frac{a_{0}}{H^{-1}}$， (2.3.26)

而 $\sin\theta=(1+\cot^{2}\theta)^{-1/2}=\frac{1}{(1+\kappa^{2})^{1/2}}.$

解之得 $\kappa=\pm\frac{1}{Ha_0}\sqrt{1-H^2a_0^2}$，

即 $$\kappa^2=\frac{1-H^2a_0^2}{H^2a_0^2}. \tag{2.3.27}$$

把(2.3.27)代入(2.3.19)，得到

$$I_\pm=-\frac{1}{3H^2}[1\pm(1-H^2a_0^2)^{3/2}]. \tag{2.3.28}$$

当 $Ha_0<1$，即3球半径 a_0 小于4球半径 H^{-1}，这相当于宇宙处于欧氏号差的量子演化阶段. I 的极值点出现在等值反号的实 κ 值，此3球半径与4球半径之比为 $\sin\theta$.

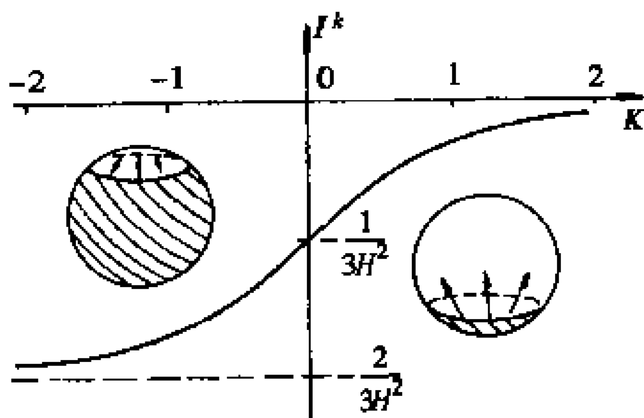


图 6-3

$\kappa<0$ 对应于4球被3球面包围的部分大于4球半径. $\kappa\to-\infty$ 表示4球完全被3球面包围，当 $I\to-\frac{2}{3H^2}$ 时即成为 de Sitter 空间的欧氏作用量.

在经典近似下，必须令积分路径经过作用量 I 的极值点. 由此可得

$$\Psi_0\approx N\exp[-I_-(a_0)]=N\exp\left\{\kappa a_0^3+\frac{1}{3H^2}[1-(1-H^2a_0^2)^{3/2}]\right\}. \tag{2.3.29}$$

当 $Ha_0\ll1$，上式可写为

$$\Psi_0\approx\exp\left[\kappa a_0^3+\frac{1}{2}a_0^2-\frac{1}{3}H^{-2}\right],$$

$$N=\exp\left(-\frac{1}{3}H^{-2}\right). \tag{2.3.30}$$

在上式中，我们只取了 $\kappa>0$ 时的 I_-，这是由于积分路径应选在右半复 κ 平面的缘故.

由(2.3.29)和(2.3.30)可以看出，宇宙波函数随 a 的增大而指数增长. 特别是在(2.3.30)中，令 $a_0=0$ 时 Ψ_0 是有意义的且不为零. 这表明宇宙将从欧氏号差的量子相 de Sitter 空间膨胀到处于洛仑兹号差的经典 de Sitter 空间中去. 在广义相对论宇宙学中的大爆炸奇点($a=0$)在量子宇宙学中不复存在.

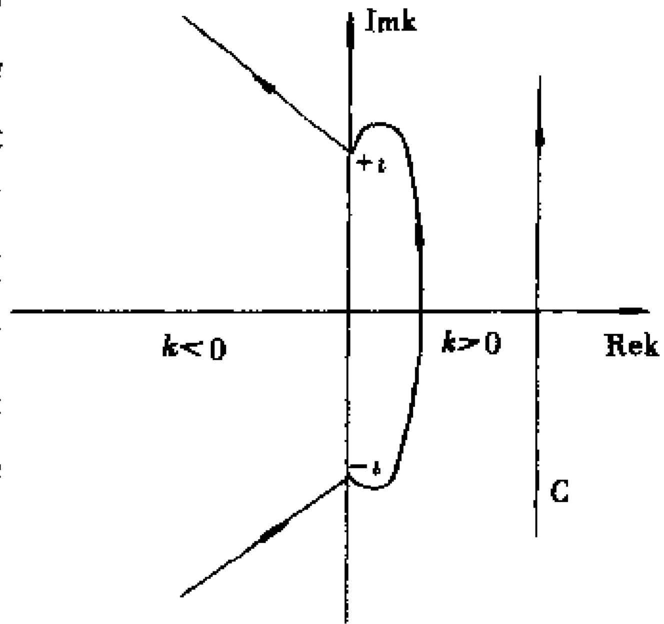


图 6-4

当 $Ha_0>1$，即 3 球半径 a_0 大于 4 球半径 H^{-1}. 这相当于宇宙处于洛仑兹号差的经典 de Sitter 演化阶段. 作用量 I 的极值出现在等值反号的虚 K 值，即

$$K=\pm\frac{1}{3}H\left(1-\frac{1}{H^2a_0^2}\right)^{1/2}. \tag{2.3.31}$$

在经典极限下，应令积分路径经过作用量的极值点，由此可得

$$\Psi_0(a_0)=2\cos\left[\frac{(H^2a_0^2-1)^{3/2}}{3H^2}-\frac{\pi}{4}\right]. \tag{2.3.32}$$

当 $Ha_0\gg1$，上式可写为

$$\Psi_0(a_0)=\exp\left[\frac{1}{3}Ha_0^3\right]+\exp\left[-\frac{1}{3}Ha_0^3\right]. \tag{2.3.33}$$

这一结果和(2.3.14)相符合，这表明欧氏路径积分表述的半经典近似所得到的解满足 W-D 方程所要求的渐近形式.

由(2.3.32)和(2.3.33)可知，处于经典 de Sitter 相的宇宙波函数是一个振荡函数. 这表明

(1) 各种尺度因子(de Sitter 宇宙)都可能以相同的几率出现；

(2) de Sitter 宇宙可以无限地膨胀下去. 如果在(2.3.11a)中

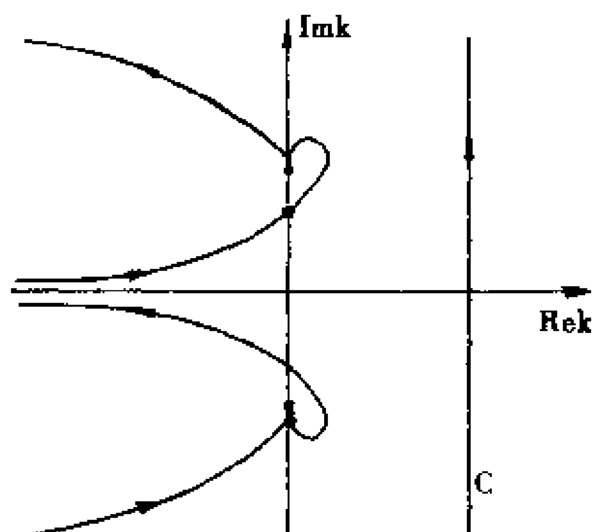


图 6-5

考虑到物质场能-动张量的重整化，在基态情况下，(2.3.11a)应写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\mathrm{d}^2C_n}{\mathrm{d}a^2}+(a^2-\lambda a^4)C_n\right]=\left(\frac{1}{2}-\epsilon_0\right)C_n. \qquad (2.3.34)$$

设 $p=0$，$\epsilon_0=-\frac{1}{2}$，$\Psi_0(a=0)=0$，则(2.3.34)的数值解如图所示．当 $Ha<1$ 时，振幅迅速衰减，这相当于欧氏 de Sitter 相．当 $Ha>1$ 时，振幅衰减很慢，这相当于无限膨胀的洛仑兹 de Sitter 相．由于量子欧氏相对应于隧道效应，因此 H-H 的量子宇宙学提供了一个宇宙从"无"经过量子隧道效应自发创生的图像．

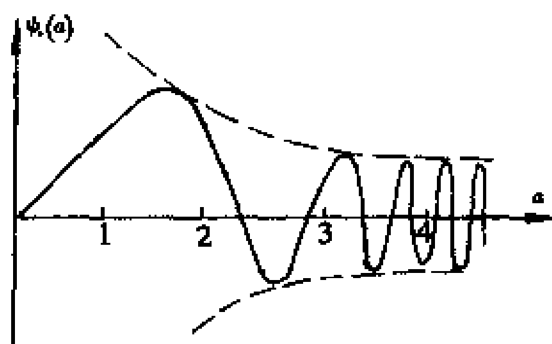


图 6-6

3 宇宙结构的起源

如前所述，用一紧致4维度规的路径积分来确定宇宙的量子状态，这可看作超空间宇宙波函数的边界条件，而这个超空间包括3维超曲面上的所有3维度规和物质场. Halliwell 和 Hawking 把以前的超空间有限维近似推广到无限维超空间，严格给出了两个均匀各向同性自由度的小超空间模型，把哈密顿中其他的非均匀、各向异性自由度精确到二阶项. 明确地指出，各种非均匀性和各向异性模式都从它们的基态出发. 对于每一模式都可以得到与时间有关的薛定谔方程. 这些模式一直处于基态，直到他们的波长超出了暴胀期的视界线度. 基态涨落被随后的膨胀进一步扩大. 可以得到一密度扰动谱;原则上，这个谱可用来解释银河系和所有其他结构的起源. 如果导致暴胀的标量场的质量为 10^4Gev 或更少,则这个涨落与微波背景辐射的观测相符合.[19]

§3.1 引　言

微波背景辐射的观测表明，宇宙在大尺度上是均匀、各向同性的. 但宇宙极早期却不可能是完全均匀和各向同性的，因那样星系和恒星是不可能形成的. 在标准大爆炸宇宙模型中，用来产生宇宙结构的密度扰动不得不假定为初始条件. 在暴胀宇宙模型中，引起宇宙暴胀的标量场的基态涨落可能导致密度扰动. 最简单的大统一暴胀模型预言的密度扰动幅太大. 其他具有不同势的标量场模型，有一些原则上可以得到与观测一致的扰动幅. 引力波模式的基态涨落给出一个长波引力波谱，与观测相符合——由

这一波谱得到的暴胀期哈勃常数不超过普朗克质量的 10^{-4}倍.

但是这些结果对宇宙起源的解释不能令人满意，因为暴胀模型并没有假定初始或边界条件. 特别是它不能保证存在一个典型的暴胀期，在此期间标量场和引力波模式均处于基态. 如果没有宇宙的边界条件，目前的任何状态都是可能的——人们可以选择任一状态，然后沿着时间逆推回去，看它导致什么样的初始条件. H-H 量子宇宙学认为，宇宙的边界条件就是宇宙没有边界. 即用没有边界的紧致 4 维度规的路径积分来确定宇宙的量子状态. 描述宇宙量子态的波函数 Ψ 是无限维空间(超空间)W 上的函数，这个超空间包括 3 维超曲面 S 上所有的 3 维度规和物质场构型 Φ_0. 因为波函数不明显地依赖于时间，所以它满足零能薛定谔方程. 薛定谔方程可以分解为动量约束，这意味着波函数在空间上的任何一点都是相同的. 波函数由路径积分给出，这一要求就变成了决定 Ψ 惟一解的 W-D 方程的一组边界条件.

在本章中，将小超空间推广到引力、标量场具有更大自由度的情况，严格给出两个均匀各向同性自由度的小超空间模型，把哈密顿中其他非均匀各向异性的自由度精确到二阶项. 在 Ψ 剧烈震荡的 W 区域，采用 WKB 近似把波函数与经典解联系起来，由此引出时间概念. 与前面的小超空间模型一样，这组解中包括一个具有长暴胀期的解. 就经典解的时间参数而言，引力波和密度扰动模式满足退耦与时间有关的薛定谔方程. 边界条件意味着这些模式都从基态出发. 当它们仍留在暴胀相的视界内时，由于膨胀可以是绝热的，所以它们仍然处于基态. 但是当超过了暴胀相的视界时它们就“冻结”了，直到再进入物质为主时期的视界. 随后，他们产生引力波和密度扰动谱，这与微波背景辐射一致. 如果标量场的质量是普朗克质量的 10^{-5}倍，还可以解释星系的起源. 因此，原则上路径积分定义宇宙量子态的理论可以解释宇宙结构的起源；最终解释不是来自任何初始条件，而是来自海森伯测不准原理决定的基态量子涨落.

§3.2 广义相对论的正则形式

考虑把 4 维流形分成两部分的 3 维超曲面 S. 在 S 的邻域里，引入坐标 t、S 是 $t=0$ 和 $x^i(i=1,2,3)$的超曲面. 如前所述，度规具有形式(1.1.6)：

$$ds^2=-(N-N_iN^i)dt^2+2N_idx^idt+h_{ij}dx^idx^j. \qquad (3.2.1)$$

作用量 $$I=\int(L_g+L_m)d^3xdt. \qquad (3.2.2)$$

式中 $$L_g=\frac{m_p^2}{16\pi}N(G^{ijkl}K_{ij}K_{kl}+h^{1/2}\ {}^3R). \qquad (3.2.3)$$

$$K_{ij}=\frac{1}{2N}\left[-\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}+2N_{(i|j)}\right]; \qquad (3.2.4)$$

$$G^{ijkl}=\frac{1}{2}h^{1/2}(h^{ik}h^{jl}+h^{il}h^{jk}-2h^{ij}h^{kl}). \qquad (3.2.5)$$

在有质量标量场中，

$$L_m=\frac{1}{2}Nh^{1/2}\left[N^{-2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2-2\frac{N^i}{N^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}-\left(h^{ij}-\frac{N^iN^j}{N^2}\right)\frac{\partial\Phi\partial\Phi}{\partial x^i\partial x^j}-m^2\Phi^2\right]. \qquad (3.2.6)$$

在广义相对论的哈密顿表述中，人们把 h_{ij}和场 Φ 作为正则坐标，正则共轭动量为

$$\pi^{ij}=\frac{\partial L_g}{\partial\dot{h}_{ij}}=-\frac{1}{16\pi}h^{1/2}m_p^2(K^{ij}-h^{ij}K), \qquad (3.2.7)$$

$$\pi_\phi=\frac{\partial L_m}{\partial\dot{\Phi}}=N^{-1}h^{1/2}\left(\dot{\Phi}-N^i\frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\right). \qquad (3.2.8)$$

哈密顿为 $$H=\int(\pi^{ij}\dot{h}_{ij}+\pi_\phi\dot{\Phi}-L_g-L_m)d^3x=\int(NH_0+N_iH^i)d^3x. \qquad (3.2.9)$$

式中 $$H_0=16\pi m_p^{-2}G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl}-\frac{m_p^2}{16\pi}h^{1/2}\cdot{}^3R+\frac{1}{2}h^{1/2}\left(\frac{\pi_\phi^2}{h}+h^{ij}\frac{\partial\Phi\partial\Phi}{\partial x^i\partial x^j}+m^2\Phi^2\right), \qquad (3.2.10)$$

$$H^i = -2\pi^{ij}_{|j} + h^{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial x^j}\pi_\phi \tag{3.2.11}$$

以及 $$G_{ijkl} = \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}). \tag{3.2.12}$$

量 N 和 N_i 作为拉格朗日乘子，所以解满足

$$H^i = 0, \tag{3.2.13}$$

$$H_0 = 0. \tag{3.2.14}$$

运动方程为

$$\dot{h}_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{ij}}, \quad \dot{\pi}^{ij} = -\frac{\partial H}{\partial h_{ij}},$$

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\phi}, \quad \dot{\pi}_\phi = -\frac{\partial H}{\partial \Phi}. \tag{3.2.15}$$

§3.3 量 子 化

如前所述，宇宙的量子态由一个波函数 Ψ 描述，它是 S 面上所有 3 维度规 h_{ij}和物质场 Φ 的无限维流形 W 上的函数，W 的切矢量为 S 上的一对场(γ_{ij}, μ)，其中 γ_{ij}可看作度规 h_{ij}的无穷小改变量，μ 可看作 Φ 的无穷小改变量，对于 S 上 $N>0$ 的每一选择，有一个 W 上的自然度规 $\Gamma(N)$：

$$\mathrm{d}s^2 = \int N^{-1}\left(\frac{m_p^2}{32\pi}G^{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} + \frac{1}{2}h^{1/2}\mu^2\right)\mathrm{d}^3x. \tag{3.3.1}$$

波函数不明显依赖于时间 t，因为 t 只不过是通过选择不同的 N 和 N_i 值可给以任何值的坐标. 这表示 Ψ 满足零能薛定谔方程

$$H\Psi = 0, \tag{3.3.2}$$

算符 H 是经典哈密顿，具有通常的代换关系：

$$\pi^{ij}(x) \to i\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)}, \quad \pi_\phi(x) \to -i\frac{\delta}{\delta \Phi(x)}. \tag{3.3.3}$$

因为 N 和 N_i 是两个独立的拉格朗日乘子，所以薛定谔方程可分为两个部分. 动量约束为

$$H^i\Psi \equiv \int N_i H^i \mathrm{d}^3x \Psi =$$

$$\int h^{1/2} N_i \left[\left(\frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \right)_{|j} - h^{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} \right] \mathrm{d}^3 x \Psi = 0. \tag{3.3.4a}$$

这表明波函数 Ψ 对于 3 维度规和物质场构形是相同的. 薛定谔方程的另一部分为

$$H_1 \Psi = 0. \tag{3.3.4b}$$

式中 $H_1 = \int N H_0 \mathrm{d}^3 x.$

(3.3.4b)即 W-D 方程. 我们假设 $H_1\Psi=0$ 具有形式

$$\left(-\frac{1}{2} \nabla^2 + \xi R + V \right) \Psi = 0. \tag{3.3.5}$$

式中 ∇^2 是度规 $\Gamma(N)$ 中的拉普拉斯算符，R 是这个度规的标曲率，势 V 是

$$V = \int h^{1/2} N \left[-\frac{m_p^2}{16\pi} 3R + \in + U \right] \mathrm{d}^3 x. \tag{3.3.6}$$

式中 $U = T^{00} - \frac{1}{2} \pi_\phi^2,$

常数 $\in$ 可看作宇宙常数 Λ 的重整化. 我们假设重整化的 Λ 为零，且 R 的系数 ξ 为零.

对于 S 上 N 和 N_i 的任一选择，任何满足动量约束和 W-D 方程的波函数 Ψ 都描述一个可能的宇宙量子态. 其中一个特解是以路径积分表示的：

$$\Psi = \int \mathrm{d}[g_{\mu\nu}] \mathrm{d}[\Phi] \exp[-\hat{I}(g_{\mu\nu}, \Phi)]. \tag{3.3.7}$$

式中 $\hat{I}$ 为欧氏作用量(设 N 为负虚数). 可以把(3.3.7)看作 W-D 方程的边界条件. 这意味着当 h_{ij} 为零时 Ψ 趋于一个常数(可归一化为 1).

§3.4 未受扰动的弗里德曼模型

考虑由弗里德曼模型构成的小超空间. 弗里德曼度规为

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2(-N^2 \mathrm{d}t^2 + a^2 \mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{3.4.1}$$

式中 $d\Omega_3^2$ 是单位 3 球度规．为了方便，引入一个规一化常数 $\sigma^2=2/3\pi m_p^2$．这个模型包括一个质量为 $\sigma^{-1}m$ 的标量场($\sqrt{2}\pi\sigma)^{-1}\phi$，其质量在 t 为常数的超曲面上是常数．我们很容易将其推广到势为 $V(\phi)$的标量场．其中包括具有高阶导数量子修正的一些模型．作用量为

$$I=-\frac{1}{2}\int \mathrm{d}tNa^3\left[\frac{1}{N^2a^2}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{N^2}\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2+m^2\phi^2\right]. \tag{3.4.2}$$

经典哈密顿为

$$H=\frac{1}{2}N(-a^{-1}\pi_a^2+a^{-3}\pi_\phi^2-a+a^3m^2\phi^2). \tag{3.4.3}$$

式中
$$\pi_a=-\frac{a}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t},\ \pi_\phi=\frac{a^3}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}. \tag{3.4.4}$$

经典哈密顿约束为 $H=0$．经典场方程为

$$N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)+\frac{3}{a}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+N^2m^2\phi=0. \tag{3.4.5}$$

$$N\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right)=N^2am^2\phi^2-2a\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{3.4.6}$$

W-D 方程为

$$\frac{1}{2}N\mathrm{e}^{-3\alpha}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+2V\right)\Psi(\alpha,\ \phi), \tag{3.4.7}$$

式中
$$V=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2-\mathrm{e}^{4\alpha}), \tag{3.4.8}$$

且 $\alpha=\ln a$．我们把(3.4.7)作为具有坐标$(\alpha,\ \phi)$的平直空间中 Ψ 的双曲方程，α 作为时间坐标．边界条件是当 $\alpha\to-\infty$时 $\Psi\to1$．积分(3.4.7)，我们发现波函数在区域开始振荡(这个已由数值计算给出)．可以由 WKB 近似来解释波函数的振荡部分

$$\Psi=Re(C\mathrm{e}^{iS}). \tag{3.4.9}$$

式中 C 是缓变振幅，S 是剧烈变化的相位．选择 S，使之满足经典哈密顿-雅可比方程

$$H(\pi_\alpha,\ \pi_\phi,\ \alpha,\ \phi)=0. \tag{3.4.10}$$

式中
$$\pi_\alpha=\frac{\partial S}{\partial\alpha},\ \pi_\phi=\frac{\partial S}{\partial\phi}. \tag{3.4.11}$$

(3.4.10)可改写为

$$\frac{1}{2}f^{ab}\frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^b}+\mathrm{e}^{-3\alpha}V=0. \tag{3.4.12}$$

式中 f^{ab}是度规 $\Gamma(1)$的逆：

$$f^{ab}=\mathrm{e}^{-3\alpha}\mathrm{diag}(-1,1). \tag{3.4.13}$$

为了使波函数(3.4.9)满足 W-D 方程，只要有

$$\nabla^2 C+2\mathrm{i}f^{ab}\frac{\partial C}{\partial q^a}\frac{\partial S}{\partial q^b}+\mathrm{i}c\nabla^2 S=0, \tag{3.4.14}$$

式中∇^2为度规 f_{ab}的拉普拉斯算符. 我们可以忽略上式中的第一项，沿着矢量场 $X^a=\mathrm{d}q^a/\mathrm{d}t=f^{ab}\partial S/\partial q^b$ 的矢量线(与经典解对应)积分上式，从而确定振幅 C.

由 $V=0$，$|\phi|>1$，$\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t=0$ 开始，波函数振荡部分的解按指数规律膨胀：

$$S=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\alpha}m|\phi|(1-m^{-2}\mathrm{e}^{-2\alpha}\phi^{-2})\approx -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3\alpha}m|\phi|, \tag{3.4.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}=m|\phi|,\ \frac{\mathrm{d}|\phi|}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{3}m. \tag{3.4.16}$$

经过量级为 $3m^{-1}(|\phi_1|-1)$的时间之后，场ϕ开始振荡，频率为 m；式中ϕ_1为ϕ的初值. 此后，解变为物质为主的，且 e^α 与 $t^{2/3}$成正比膨胀. 如果存在其他场，有质量标量粒子将分解为光子，且 e^α 与 $t^{1/2}$成正比膨胀. 最后此解会达到一个最大半径，其值可能为 $\exp(9\phi_1^2/2)$或 $\exp(9\phi_1^2)$；对于大多数膨胀，这依赖于是辐射为主的还是物质为主的，此后用类似的方式重新收缩.

§3.5 扰动的弗里德曼模型

假设度规仍取(3.2.1)的形式，只在右端乘以一个因子 σ^2. 3 维度规具有形式

$$h_{ij}=a^2(\Omega_{ij}+\epsilon_{ij}). \tag{3.5.1}$$

式中 Ω_{ij}为单位 3 球度规，ϵ_{ij}为度规的一个扰动，可按谐函数展

开：

$$\epsilon_{ij} = \sum_{nlm}\Big[6^{1/2}a_{nlm}\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q^n_{lm} + 6^{1/2}b_{nlm}(P_{ij})^n_{lm} + 2^{1/2}C^0_{nlm}(S^0_{ij})^n_{lm} + 2^{1/2}c^e_{nlm}(S^e_{ij})^n_{lm} + 2d^0_{nlm}(G^0_{ij})^n_{lm} + 2d^e_{nlm}(G^e_{ij})^n_{lm}\Big]. \quad (3.5.2)$$

系数 a_{nlm}，…，d^e_{nlm}都是时间 t 的函数，不是空间坐标 χ^i 的函数. $Q(\chi^i)$为 3 球上的标量谐函数. $P_{ij}(x^i)$由式

$$P_{ij}=\frac{1}{n^2-1}Q_{,ij}+\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q \quad (3.5.3)$$

给出（这里除 ij 以外的附标都隐去了），P_{ij}是无迹的，$P^i_i=0$. S_{ij}由式

$$S_{ij}=S_{i|j}+S_{j|i} \quad (3.5.4)$$

给出，式中 S_i 是横矢量谐函数 $S^{|i}_i=0$. G_{ij}是无迹横张量谐函数，$G^i_i=G^{|j}_{ij}=0$. 下一节我们详细讨论谐函数和它们的正交归一性.

时移、位移和标量场均可用谐函数展开：

$$N = N_0[1 + 6^{-\frac{1}{2}}\sum_{n,l,m}g_{nlm}Q^n_{lm}], \quad (3.5.5)$$

$$N_i = e^a\sum_{n,l,m}[6^{-\frac{1}{2}}k_{nlm}(P_i)^n_{lm} + \sqrt{2}\,j_{nlm}(S_i)^n_{lm}], \quad (3.5.6)$$

$$\Phi = \sigma^{-1}\Big[\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi}\phi(t) + \sum_{n,l,m}f_{nlm}Q^n_{lm}\Big]. \quad (3.5.7)$$

式中 $P_i=[1/(n^2-1)]Q_{|i}$. 为了简化，下面 n、l，m，o，e 都用 n 表示. 这样，我们可以把作用量用各（全部）阶的背景量 a，ϕ，N_0 的项展开，而“扰动”则只到 2 阶项：

$$I = I_0(a, \phi, N_0) + \sum_n I_n. \quad (3.5.8)$$

式中 I_0 是未受扰动模型(3.4.2)的作用量，I_n 是扰动的二次式.

我们可以用一般方式定义共轭动量：

$$\pi_a=-N_0^{-1}e^{3a}\dot{a}+2\text{ 阶项}, \quad (3.5.9)$$

$$\pi_\phi=N_0^{-1}e^{3a}\dot{\phi}+2\text{ 阶项}, \quad (3.5.10)$$

$$\pi_{a_n}=-N_0{}^{-1}e^{3\alpha}\left[\dot{a}_n+\dot{\alpha}(a_n-g_n)+\frac{1}{3}e^{-\alpha}k_n\right], \qquad (3.5.11)$$

$$\pi_{b_n}=N_0{}^{-1}e^{3\alpha}\frac{n^2-4}{n^2-1}\left(\dot{b}_n+4\dot{\alpha}b_n-\frac{1}{3}e^{-\alpha}k_n\right), \qquad (3.5.12)$$

$$\pi_{c_n}=N_0{}^{-1}e^{3\alpha}(n^2-4)(\dot{c}_n+4\dot{\alpha}c_n-e^{-\alpha}j_n), \qquad (3.5.13)$$

$$\pi_{d_n}=N_0{}^{-1}e^{3\alpha}(\dot{d}_n+4\dot{\alpha}d_n), \qquad (3.5.14)$$

$$\pi_{f_n}=N_0{}^{-1}e^{3\alpha}[\dot{f}_n+\dot{\phi}(3a_n-g_n)]. \qquad (3.5.15)$$

方程(3.5.9)和(3.5.10)中的2阶项在§3.7中给出．哈密顿可由动量和其他量表示：

$$H=N_0[H_{|0}+\sum_n H^n_{|2}+\sum_n g_n H^n_{|1}]+\sum_n(k_n{}^S H^n_{-1}+j_n{}^V H^n_{-1}). \qquad (3.5.16)$$

式中 $H_|$ 和 H 的下标0，1，2表示扰动量的阶数，S 和 V 表示哈密顿位移的标量和矢量部分．$H_{|0}$ 是 $N=1$ 时未受扰动模型的哈密顿：

$$H_{|0}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}(-\pi_\alpha^2+\pi_\phi^2+e^{6\alpha}m^2\phi^2-e^{4\alpha}). \qquad (3.5.17)$$

二阶哈密顿为

$$H_{|2}=\sum_n H^n_{|2}=\sum_n({}^S H^n_{|2}+{}^V H^n_{|2}+{}^T H^n_{|2}).$$

式中

$$\begin{aligned}{}^S H^n_{|2}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\Big\{&\left[\frac{1}{2}a_n^2+\frac{10(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\pi_\alpha^2+\\&\left[\frac{15}{2}a_n^2+\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\pi_\phi^2-\pi_{a_n}^2+\frac{n^2-1}{n^2-4}\pi_{b_n}^2+\pi_{f_n}^2+\\&2a_n\pi_{a_n}\pi_\alpha+8b_n\pi_{b_n}\pi_\alpha-6a_n\pi_{f_n}\pi_\phi-\\&e^{4\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2+\frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2+\right.\\&\left.\frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n-(n^2-1)f_n^2\right]+\\&e^{6\alpha}m^2(f_n^2+6a_nf_n\phi)+\\&e^{6\alpha}m^2\phi^2\left[\frac{3}{2}a_n^2-\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\Big\},\end{aligned} \qquad (3.5.18)$$

$$^{V}H^{n}_{|2}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\Big[(n^2-4)c_n^2(10\pi_\alpha^2+6\pi_\phi^2)+\frac{1}{n^2-4}\pi_{c_n}^2+$$
$$8c_n^2+8c_n\pi_{c_n}\pi_\alpha+(n^2-4)c_n^2(2e^{4\alpha}-6e^{6\alpha}m^2\phi^2)\Big],\tag{3.5.19}$$

$$^{T}H^{n}_{|2}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\{d_n^2(10\pi_\alpha^2+6\pi_\phi^2)+\pi_{d_n}^2+8d_n\pi_{d_n}\pi_\alpha+$$
$$d_n^2[(n^2+1)e^{4\alpha}-6e^{6\alpha}m^2\phi^2]\}.\tag{3.5.20}$$

一阶哈密顿为

$$^{S}H^{n}_{-1}=\frac{1}{3}e^{-3\alpha}\Big\{-a_n(\pi_\alpha^2+3\pi_\phi^2)+2(\pi_\phi\pi_{f_n}-\pi_\alpha\pi_{a_n})+$$
$$m^2e^{6\alpha}(2f_n\phi+3a_n\phi^2)-\frac{2}{3}e^{4\alpha}\Big[(n^2-4)b_n+$$
$$\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\Big]\Big\}.\tag{3.5.21}$$

哈密顿的位移部分为

$$^{S}H^{n}_{-1}=\frac{1}{3}e^{-3\alpha}\left\{-\pi_{a_n}+\pi_{b_n}+\left[a_n+\frac{4(n^2-4)}{(n^2-1)}b_n\right]\pi_\alpha+3f_n\pi_\phi\right\},\tag{3.5.22}$$

$$^{V}H^{n}_{-1}=e^{-\alpha}[\pi_{c_n}+4(n^2-4)c_n\pi_\alpha].\tag{3.5.23}$$

经典场方程见§3.7.

拉格朗日乘子 N_0，g_n，k_n，j_n 是独立的，所以零能薛定谔方程

$$H\Psi=0\tag{3.5.24}$$

可分解为动量约束和 W-D 方程. 由于动量约束是线性的，所以算符的阶数是很明确的. 于是得到

$$^{S}H^{n}_{-1}\Psi=-\frac{1}{3}e^{-3\alpha}\left\{\frac{\partial}{\partial a_n}-\left[a_n+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n\right]\frac{\partial}{\partial\alpha}-\right.$$
$$\left.\frac{\partial}{\partial b_n}-3f_n\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}\Psi=0,\tag{3.5.25}$$

$$^{V}H^{n}_{-1}\Psi=e^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_n}+4(n^2-4)c_n\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\Psi=0.\tag{3.5.26}$$

对于每一个 n，一阶哈密顿 H^{n}_{-1} 给出一组有限维二阶微分方程. 为了所需要的近似，我们可以增加一些 $\partial/\partial\alpha$ 的线性项，它们

的影响可以用 e^{α} 的幂乘以波函数来补偿，不会影响不同观测的相对几率. 因此，我们可以忽略这些不确定性和这样一些项：

$$\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left\{a_n\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+3\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)-2\left(\frac{\partial^2}{\partial f_n\partial\phi}-\frac{\partial^2}{\partial a_n\partial\alpha}\right)+\right.$$
$$m^2e^{6\alpha}(2\phi f_n+3a_n\phi^2)-$$
$$\left.\frac{2}{3}e^{4\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]\right\}\Psi=0. \quad (3.5.27)$$

最后，我们得到一个无限维二阶微分方程

$$[H_{|0}+\sum_n({}^SH^n_{|2}+{}^VH^n_{|2}+{}^TH^n_{|2})]\Psi=0. \quad (3.5.28)$$

式中 $H_{|0}$是未受扰动的弗里德曼小超空间模型的 W-D 方程中的算符：

$$H_{|0}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+e^{6\alpha}m^2\phi^2-e^{4\alpha}\right] \quad (3.5.29)$$

以及

$${}^SH^n_{|2}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left\{-\left[\frac{1}{2}a_n^2+\frac{10(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\right.$$
$$\left[\frac{15}{2}a_n^2+\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2}{\partial a_n^2}-\frac{n^2-1}{n^2-4}\frac{\partial^2}{\partial b_n^2}-$$
$$\frac{\partial^2}{\partial f_n^2}-2a_n\frac{\partial^2}{\partial a_n\partial\alpha}-8b_n\frac{\partial^2}{\partial b_n\partial\alpha}+6a_n\frac{\partial^2}{\partial f_n\partial\phi}-$$
$$e^{4\alpha}\left[\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2+\frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2+\frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n\right.$$
$$\left.-(n^2-1)f_n^2\right]+e^{6\alpha}m^2(f_n^2+6a_nf_n\phi)+$$
$$\left.e^{6\alpha}m^2\phi^2\left[\frac{3}{2}a_n^2-\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]\right\}, \quad (3.5.30)$$

$${}^VH^n_{|2}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left[-(n^2-4)c_n^2\left(10\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+6\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)-\frac{1}{n^2-4}\frac{\partial^2}{\partial c_n^2}-\right.$$
$$\left.8c_n\frac{\partial^2}{\partial c_n\partial\alpha}+(n^2-4)c_n^2(2e^{4\alpha}-6e^{6\alpha}m^2\phi^2\right], \quad (3.5.31)$$

$${}^TH^n_{|2}=\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left\{-d_n^2\left(10\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+6\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial d_n^2}-8d_n\frac{\partial^2}{\partial d_n\partial\alpha}+\right.$$
$$\left.d_n^2[(n^2+1)e^{4\alpha}-6e^{6\alpha}m^2\phi^2]\right\}. \quad (3.5.32)$$

(3.5.28)称为主方程. 它不是双曲线型的，因为在每个${}^SH^n_{|2}$

中都有正的二阶导数$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$，在$H_{|0}$中也有正的二阶导数$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$. 但是可以用动量约束(3.5.25)代换对的偏导数，然后解关于$a_n=0$的方程. 同样，用(3.5.26)代换对c_n的偏导数，然后解关于$c_n=0$的方程. 这样，便可得到一个关于f_n的双曲方程. 如果知道了$a_n=0=c_n$的波函数，便可利用动量约束计算a_n, c_n其他值的波函数.

§3.6 3球上的谐函数

本节我们详细讨论3球S^3上的标量、矢量和张量哈密顿的一系列性质. S^3上的度规为Ω_{ij}，所以线元为

$$dl^2=\Omega_{ij}dx^i dx^j=d\chi^2+\sin^2\chi(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2). \qquad (3.6.1)$$

附标中用一小竖表示对于度规Ω_{ij}的协变导数. 附标i, j, k的升降均用度规Ω_{ij}.

1. 标量谐函数

标量球谐函数$Q^n_{lm}(\chi, \theta, \phi)$是$S^3$上拉普拉斯算符的本征函数，于是满足本征方程

$$Q^{(n)|k}_{\ \ k}=-(n^2-1)Q^{(n)}, \ n=1, 2, 3, \cdots \qquad (3.6.2)$$

此方程的最一般的解是

$$Q^{(n)}(\chi, \theta, \phi)=\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l}A^n_{lm}Q^n_{lm}(\chi, \theta, \phi) \qquad (3.6.3)$$

的一个线性组合，式中A^n_{lm}是一组任意常数，Q^n_{lm}的显式为

$$Q^n_{lm}(\chi, \theta, \phi)=\prod{}^n_l(\chi)Y_{lm}(\theta, \phi), \qquad (3.6.4)$$

其中$Y_{lm}(\theta, \phi)$是2球S^2上通常的球谐函数，$\prod^n_l(\chi)$是福克(Фок)的谐和函数，球谐函数Q^n_{lm}对于S^3上任意标量场的展开，构成一完全正交集.

2. 矢量谐函数

横矢量谐函数是S^3上拉普拉斯算符的矢量本征函数，于是它们满足本征方程

$$S^{(n)|k}_{i\ \ |k}=-(n^2-2)S^{(n)}_i, \ n=2, 3, 4, \cdots \qquad (3.6.5)$$

和横条件

$$S_i^{(n)|i}=0. \tag{3.6.6}$$

(3.6.5)和(3.6.6)的最一般的解是

$$S_i^{(n)}(\chi,\theta,\phi)=\sum_{l=1}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}^n(S_i)_{lm}^n(\chi,\theta,\phi) \tag{3.6.7}$$

的线性组合，式中 B_{lm}^n是一组任意常数. $(S_i)_{lm}^n$的显式在文[19]中给出，那里还指出，可按奇的或偶的将其分类. 这样，我们有两个线性独立的横矢量谐函数 S_i^o 和 S_i^e.

利用标量谐函数 Q_{lm}^n可以构成第三个矢量谐函数$(P_i)_{lm}^n$：

$$P_i=\frac{1}{n^2-1}Q_{|i},\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots \tag{3.6.8}$$

可以看出，矢量谐函数 P_i 满足

$$P_{i|k}{}^{|k}=-(n^2-3)P_i,$$

$$P_i{}^{|i}=-Q. \tag{3.6.9}$$

这三个矢量谐函数 S_i^o，S_i^e 和 P_i 对于 S^3 上任意矢量场的展开构成一完全正交系.

3. 张量谐函数

无迹的横张量谐函数$(G_{ij})_{lm}^n(\chi,\theta,\phi)$是 S^3 上拉普拉斯算符的张量本征函数，于是满足本征方程

$$G_{ij|k}^{(n)}{}^{|k}=-(n^2-3)G_{ij}^{(n)},\ n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots \tag{3.6.10}$$

和横的无迹的条件

$$G_{ij}^{(n)|i}=0,\ G_i^{(n)i}=0 \tag{3.6.11}$$

(3.6.10)和(3.6.11)的最一般的解是

$$G_{ij}^{(n)}(\chi,\theta,\phi)=\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l}c_{lm}^n(G_{ij})_{lm}^n(\chi,\theta,\phi). \tag{3.6.12}$$

式中 C_{lm}^n为一组任意常数. 和矢量的情况类似，他们也可以分为奇的或偶的. $(G_{ij}^o)_{lm}^n$和$(G_{ij}^e)_{lm}^n$的显式已由文[19]给出.

利用矢量谐函数$(S_i^o)_{lm}^n$和$(S_i^e)_{lm}^n$，可构成无迹张量谐函数$(S_{ij}^o)_{lm}^n$和$(S_{ij}^e)_{lm}^n$，奇的和偶的均为(隐去附标 l，m，n)

$$S_{ij}=S_{i|j}+S_{j|i}. \tag{3.6.13}$$

由于 S_i 是无迹的，故 $S_i{}^i=0$. 另外，S_{ij}满足

$$S_{ij}{}^{|j}=-(n^2-4)S_i, \tag{3.6.14}$$

$$S_{ij}{}^{|ij}=0, \tag{3.6.15}$$

$$S_{ij|k}{}^{|k}=-(n^2-6)S_{ij}. \tag{3.6.16}$$

利用标量谱函数 Q^n_{lm}，可以构成两个张量$(Q_{ij})^n_{lm}$和$(P_{ij})^n_{lm}$(隐去附标 n, l, m)：

$$Q_{ij}=\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q,\ n=1,\ 2,\ 3 \tag{3.6.17}$$

$$P_{ij}=\frac{1}{n^2-1}Q_{|ij}+\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q,\ n=2,\ 3,\ 4. \tag{3.6.18}$$

P_{ij}是无迹的，$P_i{}^i=0$. 另外，它满足

$$P_{ij}{}^{|j}=-\frac{2}{3}(n^2-4)P_i, \tag{3.6.19}$$

$$P_{ij|k}{}^{|k}=-(n^2-7)P_{ij}, \tag{3.6.20}$$

$$P_{ij}{}^{|ij}=\frac{2}{3}(n^2-4)Q. \tag{3.6.21}$$

以上六个张量谱函数 Q_{ij}, P_{ij}, S^0_{ij}, S^e_{ij}, G^0_{ij}和 G^e_{ij}对于以上任意对称二阶张量场的展开构成一完全正交系.

4. 正交归一性

标量、矢量和张量谱函数的归一性是由正交关系式决定的. 用 $\mathrm{d}\mu$ 表示 S^3 上的标体元，即

$$\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}^3x(\det\Omega_{ij})^{1/2}=\sin\chi\sin\theta\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \tag{3.6.22}$$

Q^n_{lm}是归一化的，即

$$\int\mathrm{d}\mu Q^n_{lm}Q^{n'}_{l'm'}=\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.23}$$

这表明 $$\int\mathrm{d}\mu(P_i)^n_{lm}(P^i)^{n'}_{l'm'}=\frac{1}{n^2-1}\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{3.6.24}$$

$$\int\mathrm{d}\mu(P_{ij})^n_{lm}(P^{ij})^{n'}_{l'm'}=\frac{2}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.25}$$

奇的和偶的$(S_i)^n_{lm}$都是归一化的，即

$$\int\mathrm{d}\mu(S_i)^n_{lm}(S^i)^{n'}_{l'm'}=\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.26}$$

这表明 $$\int\mathrm{d}\mu(S_{ij})^n_{lm}(S^{ij})^{n'}_{l'm'}=2(n^2-4)\delta^{nn'}\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{3.6.27}$$

最后，奇的和偶的$(G_{ij})^n_{lm}$都是归一化的，即

$$\int d\mu (G_{ij})^n_{lm} (G^{ij})^{n'}_{l'm'} = \delta^{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \tag{3.6.28}$$

§ 3.7 作用量和场方程

作用量(3.5.8)即

$$I = I_0(\alpha, \phi, N_0) + \sum_n I_n. \tag{3.7.1}$$

式中 I_0 为未受扰动模型的作用量(3.4.2)：

$$I_0 = -\frac{1}{2}\int dt N_0 e^{3\alpha}\left[\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2} - e^{-2\alpha} - \frac{\dot{\phi}^2}{N_0} + m^2\phi^2\right], \tag{3.7.2}$$

I_n 是扰动中的二次式，可写为

$$I_n = \int dt (L_g^n + L_m^n). \tag{3.7.3}$$

式中

$$\begin{aligned}
L_g^n = & \frac{1}{2}e^{\alpha}N_0\Bigg\{\frac{1}{3}\left(n^2-\frac{5}{2}\right)a_n^2+\frac{n^2-7}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2- \\
& 2(n^2-4)c_n^2-(n^2+1)d_n^2+\frac{2}{3}(n^2-4)a_nb_n+ \\
& g_n\left[\frac{2}{3}(n^2-4)b_n+\frac{2}{3}\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]+ \\
& \frac{1}{N_0}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{n^2-1}k_n^2+(n^2-4)j_n^2\right]\Bigg\}+ \\
& \frac{1}{2}\frac{e^{3\alpha}}{N_0}\Bigg\{-\dot{a}_n^2+\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n^2+(n^2-4)\dot{c}_n^2+\dot{d}_n^2+ \\
& \dot{\alpha}\Bigg[-2a_n\dot{a}_n+8\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+ \\
& 8(n^2-4)c_n\dot{c}_n+8d_n\dot{d}_n\Bigg]+ \\
& \dot{\alpha}^2\left[-\frac{3}{2}a_n^2+6\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2+6(n^2-4)c_n^2+6d_n^2\right]+ \\
& g_n[2\dot{\alpha}\dot{a}_n+\dot{\alpha}^2(3a_n-g_n)]+ \\
& e^{-\alpha}\Bigg[k_n\left(-\frac{2}{3}\dot{a}_n-\frac{2}{3}\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n+\frac{2}{3}\dot{\alpha}g_n\right)-
\end{aligned}$$

$$2(n^2-4)\dot{i}_n j_n\Big]\Big\},\tag{3.7.4}$$

$$L_m^n=\frac{1}{2}N_0\mathrm{e}^{3\alpha}\Big\{\frac{1}{N_0^2}(\dot{f}_n^2+6a_n\dot{f}_n\dot{\phi})-m^2(f_n^2+6a_nf_n\phi)-$$

$$\mathrm{e}^{-2\alpha}(n^2-1)f_n^2+\frac{3}{2}\Big(\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}-m^2\phi^2\Big)\Big[a_n^2-\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2-$$

$$4(n^2-4)c_n^2-4\mathrm{d}_n^2\Big]+\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}g_n^2-g_n\Big(2m^2f_n\phi+$$

$$3m^2a_n\phi^2+2\frac{\dot{f}_n\dot{\phi}}{N_0^2}+3\frac{a_n\dot{\phi}^2}{N_0^2}\Big)-2\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{N_0^2}k_nf_n\dot{\phi}\Big\}.\tag{3.7.5}$$

π_α 和 π_ϕ的表达式为

$$\pi_\alpha=\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\Big\{-\dot{\alpha}+\sum_n\Big[-a_n\dot{a}_n+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+$$

$$4(n^2-4)c_n\dot{c}_n+4d_n\dot{d}_n\Big]+$$

$$\dot{\alpha}\sum_n\Big[-\frac{3}{2}a_n^2+$$

$$\frac{6(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2+6(n^2-4)c_n^2+6d_n^2\Big]+$$

$$\sum_n g_n\Big[\dot{a}_n+\dot{\alpha}(3a_n-g_n)+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\alpha}k_n\Big]\Big\},\tag{3.7.6}$$

$$\pi_\phi=\frac{\mathrm{e}^{3\alpha}}{N_0}\Big\{\dot{\phi}+\sum_n\Big[3a_n\dot{f}_n+\dot{\phi}\Big(\frac{3}{2}a_n^2-4\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n^2-$$

$$4(n^2-4)c_n^2-4\mathrm{d}_n^2\Big)\Big]+\sum_n[\dot{\phi}g_n^2-$$

$$g_n(\dot{f}_n+3a_n\dot{\phi})-\mathrm{e}^{-\alpha}k_nf_n]\Big\}.\tag{3.7.7}$$

由作用量原理，将作用量(3.7.1)分别对每一个场作变分，便得到经典场方程，分别对 α 和ϕ取变分，得到两个场方程：

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{1}{N_0}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\Big]+3\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}+N_0^2m^2\phi=2\text{ 阶项},\tag{3.7.8}$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\frac{\dot{\alpha}}{N_0}\Big]+3\dot{\phi}^2-N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}-\frac{3}{2}(-\dot{\alpha}+\dot{\phi}-$$

$$N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}+N_0^2m^2\phi^2)=2\text{ 阶项}.\tag{3.7.9}$$

分别对扰动 a_n，b_n，c，d_n 和 f_n 取变分，得到五个场方程：

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{a}_n}{N_0}\right]+\frac{1}{3}(n^2-4)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}(a_n+b_n)+$$
$$3\mathrm{e}^{3\alpha}(\dot{\phi}\dot{f}_n-N_0^2m^2\phi f_n)=$$
$$N_0^2\left[3\mathrm{e}^{3\alpha}m^2\phi^2-\frac{1}{3}(n^2+2)\mathrm{e}^{\alpha}\right]g_n+$$
$$\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\alpha}\dot{g}_n-\frac{1}{3}N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{k_n}{N_0}\right],\tag{3.7.10}$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{b}_n}{N_0}\right]-\frac{1}{3}(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}(a_n+b_n)+$$
$$\frac{1}{3}(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}g_n+\frac{1}{3}N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{k_n}{N_0}\right],\tag{3.7.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{c}_n}{N_0}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{2\alpha}\frac{j_n}{N_0}\right],\tag{3.7.12}$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{d}_n}{N_0}\right]+(n^2-1)N_0^2\mathrm{e}^{\alpha}d_n=0,\tag{3.7.13}$$

$$N_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathrm{e}^{3\alpha}\frac{\dot{f}_n}{N_0}\right]+3\mathrm{e}^{3\alpha}\dot{\phi}\dot{a}_n+N_0^2[m^2\mathrm{e}^{3\alpha}+$$
$$(n^2-1)\mathrm{e}^{\alpha}]f_n=\mathrm{e}^{3\alpha}(-2N_0^2m^2\phi g_n+\dot{\phi}\dot{g}_n-\mathrm{e}^{-\alpha}\phi k_n).\tag{3.7.14}$$

在推导方程(3.7.10～14)过程中，利用了场方程(3.7.8～9)，并略去了扰动中的三阶项.

分别对拉格朗日乘子 k_n，j_n，g_n 和 N_0 取变分，得到一组约束. 对 k_n 和 j_n 取变分，得到动量约束：

$$\dot{a}_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}\dot{b}_n+3f_n\dot{\phi}=\dot{\alpha}g_n-\frac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{n^2-1}k_n\tag{3.7.15}$$

$$\dot{c}_n=\mathrm{e}^{-\alpha}j_n.\tag{3.7.16}$$

对 g_n 取变分，得到线性哈密顿约束：

$$3a_n(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2)+2(\dot{\phi}\dot{f}_n-\dot{\alpha}\dot{a}_n)+N_0^2m^2(2f_n\phi+3a_n\phi^2)-$$
$$\frac{2}{3}N_0^2\mathrm{e}^{-2\alpha}\left[(n^2-4)b_n+\left(n^2+\frac{1}{2}\right)a_n\right]=$$

$$\frac{2}{3}\dot{\alpha}e^{-\alpha}k_n+2g_n(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2). \tag{3.7.17}$$

最后，对 N_0 取变分，得到哈密顿约束，我们把它写为

$$\frac{1}{2}e^{3\alpha}\left[-\frac{\dot{\alpha}^2}{N_0^2}+\frac{\dot{\phi}^2}{N_0^2}-e^{-2\alpha}+m^2\phi^2\right]=2\ \text{阶项}. \tag{3.7.18}$$

§3.8 波 函 数

由于扰动模式之间不存在耦合，所以波函数可表示为形如

$$\Psi=\mathrm{Re}\left[\Psi_0(\alpha,\phi)\prod_n\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,b_n,c_n,d_n,f_n)\right]=$$
$$\mathrm{Re}(ce^{iS}) \tag{3.8.1}$$

的项的和，式中 S 是 α 和 ϕ 的剧变函数，C 是所有变量的缓变函数. 把(3.8.1)代入主方程(3.5.28)，同时除以 Ψ，得到

$$-\frac{\nabla_2^2\Psi_0}{2\Psi_0}-\sum_n\frac{\nabla_2^2\Psi^{(n)}}{2\Psi^{(n)}}-\sum_{n,m}\frac{(\nabla_2\Psi^{(n)})\cdot(\nabla_2\Psi^{(m)})}{2\Psi^{(n)}\Psi^{(m)}}-$$
$$\frac{\nabla_2\Psi_0}{\Psi_0}\cdot\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]+\sum_n\frac{H^n_{|2}\Psi}{\Psi}+$$
$$e^{-3\alpha}V(\alpha,\phi)=0. \tag{3.8.2}$$

式中 ∇_2^2 为小超空间度规 $f_{ab}=e^{3\alpha}\mathrm{diag}(-1,1)$ 的拉普拉斯算符，点积也相对于这一度规.

一个单独的扰动模式在(3.8.2)的第三、第四项中不给出有意义的贡献. 因此，这些项可代之以

$$-\frac{\nabla_2\Psi}{\Psi}\cdot\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}+\frac{1}{2}\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]^2\approx$$
$$-i(\nabla_2S)\cdot\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}+\frac{1}{2}\left[\sum_n\frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}\right]^2. \tag{3.8.3}$$

为使 ansatz(3.8.1)有效，必须使(3.8.2)中与 a_n，b_n，c_n，d_n，f_n 有关的项均为零. 这表明

$$\frac{\nabla_2\Psi}{\Psi}\cdot\nabla_2\Psi^{(n)}+\frac{1}{2}\nabla_2^2\Psi^{(n)}=\frac{H^n{}_2\Psi}{\Psi}\Psi^{(n)}. \tag{3.8.4}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\nabla_2^2+e^{-3\alpha}V+\frac{1}{2}J\cdot J\right)\Psi_0=0. \tag{3.8.5}$$

式中 $J=\sum_n \frac{\nabla_2\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}$.

在相 S 剧烈变化的区域，(3.8.4)的第二项与第一项相比可以略去. 还可以用 $\partial S/\partial\alpha$，$\partial S/\partial\phi$ 分别代替 $H^n_{|2}$中的 π_α，π_ϕ. 矢量 $X^a=f^{ab}\partial S/\partial q^b$ 可看作$\frac{\partial}{\partial t}$，其中 WKB 近似 Ψ 对应的经典弗里德曼度规的时间参量. 这样，沿着矢量场 X^a 的矢量线，对于每一个模式得到一个与时间有关的薛定谔方程：

$$i\frac{\partial\Psi^{(n)}}{\partial t}=H^n_{|2}\Psi^{(n)}. \tag{3.8.6}$$

方程(3.8.5)可看作 2 维小超空间模型的 W-D 方程，其中有一个由扰动引起的附加项$\frac{1}{2}J\cdot J$. 为了使 J 有限，须减去与宇宙常数 Λ 的重整化相对应的 $H^n_{|2}$基态能量(也可以利用普朗克质量 m_p 的重整化).

可以把 $\Psi^{(n)}$写为

$$\Psi^{(n)}={}^S\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,a_n,b_n,f_n){}^V\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,c_n){}^T\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,d_n). \tag{3.8.7}$$

式中${}^S\Psi^{(n)}$，${}^V\Psi^{(n)}$和${}^T\Psi^{(n)}$分别满足${}^SH^n_{|2}$，${}^VH^n_{|2}$和${}^VH^n_{|2}$的薛定谔方程.

§3.9 边界条件

我们希望能找到与

$$\Psi(h_{ij},\Phi)=\int d[g_{\mu\nu}]d[\Phi]\exp(-\hat{I}) \tag{3.9.1}$$

对应的主方程的解. 式中积分沿所有紧致 4 维度规和以 3 维超曲面 S 为边界的物质场. 如果令参数 α 为绝对值足够大的负数，而保持其他参数不变，则欧氏作用量 $\hat{I}$ 将按 $e^{2\alpha}$规律趋于零. 因此，我们期望当 α 趋于负无穷时，Ψ 趋于零.

可以从路径积分(3.9.1)估计扰动$\Psi^{(n)}$的标量、矢量和张量部分${}^S\Psi^{(n)}$,${}^V\Psi^{(n)}$和${}^T\Psi^{(n)}$的形式. 取4维度规$g_{\mu\nu}$具有背景形式

$$ds^2=\sigma^2(-N^2dt^2+e^{2\alpha(t)}d\Omega_3^2), \tag{3.9.2}$$

标量场Φ为$\phi(t)$，再加上一个由含t的变量(a_n, b_n, f_n), c_n, d_n描述的扰动. 为了使4维背景度规是紧致的，当$\alpha\to-\infty$时度规须是欧氏的，即当$\alpha\to-\infty$时N必须为纯负虚数，此时取作$t=0$. 在度规为洛仑兹的区域，N将是正实数. 为了使欧式空间到洛仑兹空间的变换是光滑的，取N为$-ie^{i\mu}$的形式，$t=0$时$\mu=0$. 为了使$t=0$时4维度规和标量场是正常的，就必须使$t=0$时a_n, b_n, c_n, d_n和f_n均为零.

张量扰动d_n有欧氏作用量

$${}^T\hat{I}_n=\frac{1}{2}\int dt d_n {}^T D d_n + \text{边界项}. \tag{3.9.3}$$

式中

$$\begin{aligned}{}^TD=&\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{3\alpha}d}{iN_0 dt}\right)+iN_0e^{\alpha}(n^2-1)\right]+\\&4iN_0e^{3\alpha}\left[\frac{1}{2}e^{-3\alpha}-\frac{3}{2}m^2\phi^2-\frac{3\dot{\phi}^2}{2(iN_0)^2}-\frac{3\dot{\alpha}^2}{2(iNo)^2}-\right.\\&\left.\frac{d}{iN_0dt}\left(\frac{\dot{\alpha}}{iN_0}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.9.4}$$

如果背景度规满足背景场方程，则上式最后一项为零. 当d_n满足方程

$${}^TDd_n=0 \tag{3.9.5}$$

时，作用量就只剩下边界项

$${}^T\hat{I}_n^{cl}=\frac{1}{2iN_0}e^{3\alpha}(d_n\dot{d}_n+4\dot{\alpha}d_n^2). \tag{3.9.6}$$

按d_n的路径积分为

$$\int d[d_n]\exp(-{}^T\hat{I}_n)=(\det{}^TD)^{-1/2}\exp(-{}^T\hat{I}_n^{cl}). \tag{3.9.7}$$

沿不同的背景度规积分(3.9.7),便得到波函数${}^T\Psi^{(n)}$. 我们期望主要贡献来自与经典背景场方程的解相近的背景度规. 对这些度规可采用一绝热近似，令α为时间t的缓变函数. 这样，(3.9.5)的满足边界条件$t=0$时$d_n=0$的解可写为

$$d_n = A(e^{\nu\tau} - e^{-\nu\tau}). \tag{3.9.8}$$

式中 $\nu = e^{-\alpha}(n^2 - 1)^{1/2}$,

$$\tau = \int \iota N_0 dt.$$

这种近似对于满足条件

$$\left|\frac{\dot{\alpha}}{N_0}\right| \ll n e^{-\alpha} \tag{3.9.9}$$

的背景场是成立的. 一个正常的欧氏度规, 在 $t=0$ 附近有 $|\dot{\alpha}/N_0| = e^{-\alpha}$. 如果度规是背景场方程的一个欧氏解, 则有 $|\dot{\alpha}/N_0| < e^{-\alpha}$. 这个绝热近似当 n 足够大时成立, 在相应区域中背景场方程的解是洛仑兹的, 可采用 WKB 近似. 这样, 波函数 ${}^T\Psi^{(n)}$ 可写为

$${}^T\Psi^{(n)} = B exp\left\{-\left[\frac{1}{2}n e^{2\alpha}\coth(\nu\tau) + \frac{2}{\iota N_0}\dot{\alpha}e^{3\alpha}\right]d_n^2\right\}. \tag{3.9.10}$$

在欧氏区域, τ 是正实数. 当 n 很大时有 $\coth(\nu\tau) \approx 1$. 在采用 WKB 近似的洛仑兹区域, τ 是复的, 但仍有正的实部; 当 n 很大时 $\coth(\nu\tau)$ 仍将近似为 1. 因此有

$${}^T\Psi^{(n)} = B exp\left[-2\iota\frac{\partial S}{\partial\alpha}d_n^2 - \frac{1}{2}n e^{2\alpha}d_n^2\right]. \tag{3.9.11}$$

归一化常数 B 可取为 1. 于是除了一个相因子之外, 引力波模式在 WKB 区域处于基态.

现在考虑波函数的矢量部分 ${}^V\Psi^{(n)}$. 这是一个纯规范, 因为 c_n 可由 j_n 参量化的规范变化给予任何值. 这个规范变换的可能性可由约束

$$e^{-\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial c_n} + 4(n^2-4)c_n\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\Psi = 0 \tag{3.9.12}$$

看出. 积分上式得到

$$\Psi(\alpha, \{c_n\}) = \Psi\left[\alpha - 2\sum_n (n^2-4)c_n^2, 0\right], \tag{3.9.13}$$

这里隐去了对其他变量的依赖性. 也可以用 $\iota(\partial S/\partial\alpha)\Psi$ 代替 $\partial\Psi/\partial\alpha$. 这样便可解出 ${}^V\Psi^{(n)}$:

$$^{V}\Psi^{(n)}=\exp\left[2i(n^2-4)c_n^2\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right]. \tag{3.9.14}$$

标量扰动包括张量扰动和矢量扰动行为的组合. 前节给出了作用量的标量部分. 它决定于经典场方程(3.8.10), (3.8.11)和(3.8.14)的解. 这三个方程有一个 3 参数解族, 满足边界条件 $t=0$ 时 $a_n=b_n=f_n=0$. 还有两个约束方程(3.8.15)和(3.8.17), 对应于两个被 k_n 和 g_n 参量化的规范自由度. 对于方程(3.8.10), (3.8.11), (3.8.14), (3.8.15)和(3.8.17)的解, 欧氏作用量为

$$\begin{aligned}^{S}\hat{I}^{cl}=\frac{1}{2iN_0}e^{3\alpha}\Big\{&-a_n\dot{a}_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\dot{b}_n+f_n\dot{f}_n+\\&\dot{\alpha}\left[-a_n^2+\frac{4(n^2-4)}{n^2-1}b_n^2\right]+3\dot{\phi}a_nf_n+g_n(\dot{\alpha}a_n-\dot{\phi}f_n)-\\&\frac{1}{3}e^{-\alpha}k_n\left[a_n+\frac{n^2-4}{n^2-1}b_n\right]\Big\}.\end{aligned} \tag{3.9.15}$$

这里利用了背景场方程.

令 $g_n=k_n=0$ 的规范是最简单的. 但这样我们找不到一个 4 维紧致度规满足上面三个场方程和两个约束方程. 令 $a_n=b_n=0$, 解约束方程(3.8.15)和(3.8.17), 得到

$$g_n=3\frac{(n^2-1)\dot{\alpha}\dot{\phi}f_n+\dot{\phi}\dot{f}_n+N_0^2m^2\phi f_n}{(n^2-4)\dot{\alpha}^2+3\dot{\phi}^2}, \tag{3.9.16}$$

$$k_n=3(n^2-1)e^{\alpha}\frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}\dot{f}_n+N_0^2m^2\phi f_n\dot{\alpha}-3f_n\dot{\phi}(-\dot{\alpha}^2+\dot{\phi}^2)}{(n^2-4)\dot{\alpha}^2+3\dot{\phi}^2}. \tag{3.9.17}$$

把它们代入(3.8.14), 得到 f_n 的一个二阶方程

$$\begin{aligned}&N_0\frac{d}{dt}\left[e^{3\alpha}\frac{\dot{f}_n}{N_0}\right]+N_0^2[m^2e^{3\alpha}+(n^2-1)e^{\alpha}]f_n=\\&e^{3\alpha}(-2N_0^2m^2\phi g_n+\dot{\phi}\dot{g}_n-e^{-\alpha}\dot{\phi}k_n).\end{aligned} \tag{3.9.18}$$

当 n 很大, 可再次利用绝热近似来估算 $|\phi|>1$ 时(3.9.18)的解:

$$f_n=A\sinh(\nu\tau). \tag{3.9.19}$$

式中 $\nu^2=e^{-2\alpha}(n^2-1)$. 因此，对于这些模式有

$$^S\Psi^{(n)}(\alpha,\phi,o,o,f_n)\approx\exp\left[-\frac{1}{2}ne^{2\alpha}f_n^2-\frac{1}{2}\iota\frac{\partial S}{\partial\phi}g_nf_n\right].\tag{3.9.20}$$

这是基态形式(只差一个小的相因子). 当 a_n 和 b_n 不为零时，$^S\Psi^{(n)}$的值可由积分约束方程(3.5.25)和(3.5.27)得到.

张量和标量模式从它们的基态开始，但要除去 n 很小的情况. 矢量模式是纯规范的，因此可以忽略. 所以总的扰动能量为

$$E=\sum_n\frac{H_{\ 2}^{(n)}\Psi^{(n)}}{\Psi^{(n)}}.$$

当不考虑基态能量时，这一总扰动能量是很小的. 又因为 $E=\iota(\nabla_2S)\cdot J$. 式中 $J=\sum\limits_n\nabla_2\Psi^{(n)}$，所以 J 也很小. 这表明波函数 Ψ_0 满足未受扰动的小超空间模型的 W-D 方程. 相因子 S 近似为 $-i\ln\Psi_0$. 然而均匀标量场模式 ϕ 将不再从它们的基态开始. 这有两个原因. 第一，$t=0$ 时的规则性要求 $a_n=b_n=c_n=d_n=f_n=0$，但不要求 $\phi=0$. 第二，ϕ 的经典场方程具有频率为常数 m 的阻尼振荡形式. 这表明绝热近似在很小的 t 内是不成立的，经典场方程的解 ϕ 近似为常数. 这些解的作用量很小，大的$|\phi|$值也不衰减. 因此，从大的$|\phi|$值开始的 WKB 具有很大的几率. 他们对应于那些有一个长的暴胀期而后又回到物质为主膨胀型的经典解. 在含有小静质量的其他场的模型中，物质可在有质量标量场的振荡中分解为具有热谱的光子. 然后，此模型像辐射为主的宇宙那样膨胀.

§3.10 扰动的增长

张量模式满足薛定谔方程

$$\frac{\partial\,^T\Psi^{(n)}}{\partial t}={}^TH_{\ |2}^{n}\,{}^T\Psi^{(n)}=\tag{3.10.1}$$

$$\frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left\{+d_n^2\left[10\left(\frac{\partial S}{\partial\alpha}\right)^2+6\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2\right]-\right.$$

$$\frac{\partial^2}{\partial d_n^2}-8\mathrm{d}_n\imath\frac{\partial S}{\partial\alpha}\frac{\partial}{\partial d_n}+$$

$$\mathrm{d}_n^2[(n^2+1)\mathrm{e}^{4\alpha}-6\mathrm{e}^{6\alpha}m^2\phi^2]\Big\}. \tag{3.10.2}$$

我们可将${}^T\Psi^{(n)}$写为

$${}^T\Psi^{(n)}=\exp(-2\alpha)\exp\left[-2\imath\frac{\partial S}{\partial\alpha}\mathrm{d}_n^2\right]^T\Psi_0{}^{(n)}. \tag{3.10.3}$$

利用 W-D 方程的 WKB 近似，得到

$$\imath\frac{\partial^T\Psi_0^{(n)}}{\partial t}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\alpha}\left[-\frac{\partial^2}{\partial d_n^2}+\mathrm{d}_n^2(n^2-1)\mathrm{e}^{4\alpha}\right]^T\Psi_0^{(n)}. \tag{3.10.4}$$

这样，上式具有频率为$\nu=(n^2-1)^{1/2}\mathrm{e}^{-\alpha}$的振子的薛定谔方程形式. 初始波函数${}^T\Psi_0^{(n)}$处于基态，而且频率$\nu$比$\dot{\alpha}$要大. 在这种情况下，可利用绝热近似来说明${}^T\Psi^{(n)}$保持在基本状态

$${}^T\Psi_0^{(n)}\approx\exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{2\alpha}\mathrm{d}_n^2\right). \tag{3.10.5}$$

当$\nu\approx\dot{\alpha}$时，绝热近似失效. 此时引力波长在暴胀期等于视界尺度，波函数也将冻结：

$${}^T\Psi_0^{(n)}\approx\exp\left(-\frac{1}{2}n\mathrm{e}^{-2\alpha_*}\mathrm{d}_n^2\right). \tag{3.10.6}$$

式中α_*是模式超出视界范围时的α值. 波函数${}^T\Psi^{(n)}$将保持(3.10.6)的形式，直到模式再进人物质为主或辐射为主时期的视界，此时α取大的值α_r. 于是可以对(3.10.4)再次用绝热近似，但${}^T\Psi_0^{(n)}$不再处于基态，它将处于多个高激发态的叠加. 这是引力波模式中基态涨落的放大现象.

标量模式的行为和上面讨论的很相似，但由于规范自由度的原因，它们的描述是相当复杂的. 前面我们曾用路径积分的方法估算了$a_n=b_n=0$时的波函数${}^S\Psi^{(n)}$. 在绝热近似适用时，所找到的基态形式是有效的；但当绝热近似不再适用时，即当波长超出暴胀期视界范围时，这种有效性也就不复存在了. 为了讨论随后波函数的行为，采用一阶哈密顿约束(3.5.27)来估算当$a_n\neq0$、$b_n=f_n=0$时的${}^S\Psi^{(n)}$的值是比较方便的. 我们得到

$$^{S}\Psi^{(n)}(\alpha, \phi, a_n, 0, 0) = B exp[\imath c a_n^2]^{S}\Psi_0^{(n)}(\alpha, \phi, a_n).$$
$$(3.10.7)$$

归一化因子 B 和相因子 C 依赖于 α 和 ϕ，但不依赖于 a_n：

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^{-1}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{1}{3}(n^2-4)e^{4\alpha}\right]. \qquad (3.10.8)$$

当模式的波长等于暴胀期的视界线度时，波函数 $^{S}\Psi^{(n)}$ 具有形式

$$^{S}\Psi_0^{(n)} = \exp\left(-\frac{1}{2}n y_*^{-2} e^{2\alpha_*} a_n^2\right). \qquad (3.10.9)$$

式中 y_* 代表模式超出视界范围时 $y=(\partial S/\partial\alpha)(\partial S/\partial\phi)^{-1}$ 的值，$y_* = 3\phi_*$. 更一般地，在势为 $V(\phi)$ 的标量场的情况下，$y = 6V(\partial V/\partial\phi)^{-1}$.

把 $b_n = f_n = 0$ 代入标量哈密顿 $^{S}H_{|2}^{n}$，且分别用动量约束(3.5.25)和一阶哈密顿约束(3.5.27)代换 $\frac{\partial}{\partial b_n}$ 和 $\frac{\partial}{\partial f_n}$，可以得到 $^{S}\Psi_0^{(n)}$ 的薛定谔方程：

$$\imath\frac{\partial^{S}\Psi_0^{(n)}}{\partial t} = \frac{1}{2}e^{-3\alpha}\left\{-y^2\frac{\partial^2}{\partial a_n^2} + e^{4\alpha}(n^2-4)\cdot\right.$$
$$\left.\left[\frac{1}{y^2} - \frac{1}{3}e^{4\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^{-2}\right]a_n^2\right\}^{S}\Psi_0^{(n)}. \qquad (3.10.10)$$

式中忽略了 $\frac{1}{n^2}$ 阶项. 与 $\frac{1}{y^2}$ 比较，项 $e^{4\alpha}(\partial S/\partial\alpha)^{-2}$ 是很小的，但在背景解的最大半径附近例外. $^{S}\Psi_0^{(n)}$ 的薛定谔方程与 $^{T}\Psi_0^{(n)}$ 的方程[即(3.10.4)]很相似，只是动力项乘以一个因子 y^2，势项除以 y^2. 因此，我们希望对视界范围内的波长，$^{S}\Psi_0^{(n)}$ 有基态形式 $\exp\left(-\frac{1}{2}y^{-2}e^{2\alpha}a_n^2\right)$，像(3.10.9)那样. 另一方面，当波长超出视界范围时，薛定谔方程(3.10.10)表明 $^{T}\Psi_0^{(n)}$ 将以(3.10.9)的形式冻结，一直到模式再进入物质为主时期的视界范围. 即使宇宙的状态方程到达波长超出视界线度的辐射为主时期，$^{S}\Psi_0^{(n)}$ 仍然将保持为(3.10.9)的形式. 标量模式的基态涨落放大，其方式与张量模式的相似. 在重返视界范围时，标量模式的均方根涨落(在规范 $b_n = f_n = 0$ 的条件下)要比同样波长的张量模式的均方根涨

落大一个因子 y..

§3.11 实验检验

在矢量场 X^i 的矢量线上一给定点，即在作为经典场方程解的背景度规中给定的 α 和 ϕ，由 ${}^T\Psi_0^{(n)}$ 和 ${}^S\Psi_0^{(n)}$ 可以计算观测到不同的 d_n 和 a_n 值的相对几率. 实际上，对 ϕ 的依赖性是无关紧要的，可以忽略. 于是可以计算观测微波背景各向异性的不同量的几率，并把这些预言与观测上限进行比较.

张量和标量扰动模式在 α 值很大时处于高激发态. 这表明我们可以把它们的发展作为一个整体演化来处理，演化决定于 d_n 和 a_n 初始时的经典运动方程. $\dot{d}_n$ 和 $\dot{a}_n$ 的初始分布分别正比于 $|{}^T\Psi_0^{(n)}\pi_{d_n}{}^T\Psi_0^{(n)}|$ 和 $|{}^S\Psi_0^{(n)}\pi_{a_n}{}^S\Psi_0^{(n)}|$. 当模式重返视界内时，分布集中在 $\dot{d}_n=\dot{a}_n=0$ 处.

$b_n=f_n=0$ 的超曲面为暴胀期金边解的常能量密度面. 根据局部能量守恒，在暴胀期后它们仍保持为长能量密度面，此时能量由均匀背景标量场 ϕ 的相关振荡决定. 如果标量粒子分解为光子，并把宇宙加热，则 $b_n=f_n=0$ 的面是等温面. 这样，微波背景最稀疏的面将是温度为 T_S 的超曲面. 可以认为，微波辐射是从这个面传播到地球的. 因此，观测到的温度将是

$$T_0=\frac{T_s}{1+z}. \qquad (3.11.1)$$

式中 z 是上述超曲面的红移. 不同方向上的 z 不同将引起观测到的温度不同，$(1+z)$的表达式为

$$1+Z=l^\mu n_\mu. \qquad (3.11.2)$$

式中 n_μ 是 $g_n=k_n=j_n=0$ 和 $b_n=f_n=0$ 时常数 t 面上的单位法矢量，l^μ 是零短程线的切矢量. 沿着观察者的过去光锥，可以计算 $l^\mu n_\mu$ 的演化：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[l^\mu n_\mu]=n_{\mu;\nu}l^\mu l^\nu. \qquad (3.11.3)$$

式中 λ 为零短程线上的仿射参量，$n_{\mu\nu}$的非零分量为

$$n_{ij} = e^{2\alpha}\Big[\dot{\alpha}\,\Omega_{ij} + \sum_n (\dot{a}_n + \dot{\alpha}\, a_n)\,\frac{1}{3}\Omega_{ij}Q +$$

$$\sum_n (b_n + \alpha\, b_n) P_{ij} + \sum_n (\dot{d}_n + \dot{\alpha}\, d_n) G_{ij}\Big].$$

(3.11.4)

在我们采用的规范中，在视界上尺度上，(3.11.4)中主要各向异性项是含有 $\dot{\alpha}a_n$ 和 $\dot{\alpha}d_n$ 的那些项. 他们给出具有形式

$$\langle(\triangle T/T)^2\rangle \approx \langle a_n^2\rangle \text{或} \approx \langle d_n^2\rangle \qquad (3.11.5)$$

的温度各向异性，在视界尺度上，对各向异性有贡献的模式数目具有 n^3 的量级. 我们得到

$$\langle a_n^2\rangle = y_*^2 n^{-1} e^{-2\alpha_*}, \qquad (3.11.6)$$

$$\langle d_n^2\rangle = n^{-1} e^{-2\alpha_*}. \qquad (3.11.7)$$

对各向异性的主要贡献来自标量模式，由此得到

$$\langle(\triangle T/T)^2\rangle \approx y_*^2 n^2 e^{-2\alpha_*}. \qquad (3.11.8)$$

但是 $ne^{-\alpha_*} \approx \dot{\alpha}_*$，是现在视界尺度的哈勃常数值. $\langle(\triangle T/T)^2\rangle$的观测上限为 10^{-8}，这要求哈勃常数小于 $5\times10^{-5}m_p$，从而限制标量场的质量小于 10^{14}Gev. 这就是说，如果标量场的质量为 10^{14} Gev 或更小，则我们讨论的扰动(由初始基态增长起来的扰动)便与微波背景辐射的观测结果相符.

前面我们计算了常时间、常密度超曲面的标量扰动. 在那样的规范里，没有密度变化. 但是我们可以对 $a_n=b_n=0$ 的规范作一个变换，当波长进入视界范围时，密度涨落为

$$\langle(\triangle\rho/\rho)^2\rangle \approx y^2\,\frac{\dot{\rho}_e^{\,2}}{\dot{\alpha}_e^2\rho_e^2}\,\dot{\alpha}_*^2. \qquad (3.11.9)$$

由于 y 和 $\dot{\alpha}_*$ 仅以对数形式依赖于扰动的波长，于是上式给出一个大范围的密度涨落谱. 这些密度涨落可以按经典的场方程演化，直到能够解释银河系和我们观测到的其他宇宙结构的形成.

4 虫洞波谱

在半经典近似中，虫洞可看作经典欧氏场方程的解．但是这些解相当特殊，且仅对于某些类型的物质场才存在．另一方面，可把虫洞描述为具有适当边界条件的 W-D 方程的解．含有无质量标量场的小超空间模型可给出这些解的不连续波谱．Giddings-Strominger 瞬子解对应于无限多这种解之和．在有质量标量场的小超空间模型中，也显示出具有给定渐近形式解的不连续波谱．

虫洞是由一狭窄管道式喉连接的两个大区域构成的欧氏度规．宏观虫洞也许可以为黑洞的完全蒸发和消失提供机制，而微观虫洞似乎会对物理常数，尤其是宇宙常数有重要影响[22]．虫洞主要作为经典欧氏场方程的解(瞬子)来研究，它们是半经典处理方案的基础．在这类方案里，人们作了稀薄虫洞近似，即忽略连接相同大区域的不同虫洞端点之间的相互影响．

但是实的类虫洞解只在几种特殊的物质场情况下才存在(允许 Ricci 张量有负的本征值)．这些物质场不包括极小偶合标量场(除非它是纯虚的)，但包括反对称张量场；在 4 维情况下，张量场的场方程等效于标量场的方程．在 4 维情况下没有电磁场虫洞解，而有 Yang-Mills 解，但是这些解一般不是作用量的局域极小值．因此，它们对半经典近似的贡献还不清楚．也存在有作用量局域极小值的 Yang-Mills 解，但它们只存在于 Yang-Mills 场没有同任何场耦合的情况．此外，这些解具有几个普朗克单位尺度的极大喉．这使人们很难看到虫洞如何把所有在宏观黑洞蒸发时失去的粒子和信息带走．

可能有人因此假设，仅仅在物质组成允许虫洞瞬子的几种非

常受限制的理论中，虫洞才重要．如果这样，则将难以使人相信虫洞是黑洞蒸发的机制，因为这一过程对于任何物质组成，甚至除了引力场没有物质都会发生．这样还会在能否用虫洞解释宇宙常数取值的问题上产生疑问．

基于以上考虑，霍金提出一个不同的研究方法，即不把虫洞看作经典欧场方程的解，而看作是 W-D 方程的解．波函数必须满足某些边界条件，以便描述虫洞．边界条件是：对于大的 3 维几何，波函数指数衰减，当 3 维几何坍缩至零时，波函数以某一适当的方式成为规则的．下面我们要讨论遵守边界条件的 W-D 方程解的不连续波谱．我们用含有标量场的 W-D 方程的小超空间解来说明这一点．含有无质量标量场的一连续解簇，对应于 Giddings 和 Strominger 发现的瞬子解．在无限远处波函数是衰减的，但是在零半径附近它们无限地振荡．这些解可以描述为不连续解簇的无限项和，它们在无限远和半径为零处都有好的行为．在有质量标量场的情况下，也可以近似地构造出这些解．对它们的渐近形式，我们将给出明显的表达式．

§4.1 边界条件

在稀薄虫洞近似中，可以把每一个虫洞分立地当做连接两个渐近欧氏区域的虫洞来处理．因此，我们要讨论拓扑为 $R^1\times S^3$ 的欧氏度规，在 R^1 的每一终点处，它是渐近欧氏的．为此，需要计算格林函数

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\rangle. \qquad (4.1.1)$$

式中 x_1，x_2，…和 y_1，y_2，…是远离虫洞的两渐近区域中的点．在平直空间中，点 x_1，x_2，…和 y_1，y_2，…实际上可以取为无限远．通过引入虫洞态的完全系

$$\langle\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots\rangle =$$
$$\sum_k\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots|\Psi_k\rangle\times\langle\Psi_k|\phi(y_1)\phi(y_2)\cdots|0\rangle \qquad (4.1.2)$$

(式中$|0\rangle$是没有虫洞的真空态，而$|\Psi_k\rangle$是虫洞态的完全系)，便可以将格林函数分解因式.

这些$|\Psi_k\rangle$虫洞态是什么？令S为分离两个渐近欧氏区域的3维曲面. 于是虫洞量子态可以描述为波函数$\Psi_k(h_{ij}, \phi_0)$，它依赖于3维度规h_{ij}和物质场ϕ_0. 这波函数在所有有限非零的3维度规h_{ij}处满足W-D方程和动量约束方程

$$H\Psi_k=\left[-\frac{1}{2}m_p^{-2}h^{1/2}(h_{il}h_{jm}+h_{im}h_{jl}-h_{ij}h_{lm})\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{lm}}-\right.$$
$$\left.m_p^2h^{1/2(3)}R+\frac{1}{2}h^{1/2}T^{mn}\left(\phi_0,\ -i\frac{\delta}{\delta\phi_0}\right)\right]\cdot$$
$$\Psi_k(h_{ij},\ \phi_0)=0, \tag{4.1.3}$$

$$H^i\Psi_k=\left[-2im_p^2\left(\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\right)_{|j}+\right.$$
$$\left.T^{ni}\left(\phi_0,\ -i\frac{\delta}{\delta\phi_0}\right)\right]\Psi_k(h_{ij},\ \phi_0)=0. \tag{4.1.4}$$

但是如果这个波函数对应于虫洞而不是其他种类的时空，它们还将满足3维度规h_{ij}退化或者变为无限大时的边界条件.

h_{ij}退化时的边界条件描述4维度规非奇异这一事实. 在所有3维度规的超空间中这些边界条件将是什么还不清楚，但是在小超空间模型中，正如下面要考虑的，波函数应该是规则的或者(依赖于因子顺序)随a接近零而变为半径a的幂的形式，它当然不应该振荡无限多次.

当h_{ij}足够大时，边界条件应表示4维度规是渐近欧氏的. 这可以解释为：渐近态中没有引力激发. 如果在渐近区域也没有物质激发的边界条件，就将得到"基态"或真空波函数Ψ_0和无边界波函数相似，由路径积分可以得到真空波函数：

$$\Psi_0(h_{ij},\ \phi_0)\ =\int \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\mathrm{d}[\phi]\mathrm{e}^{-I[g,\phi]}. \tag{4.1.5}$$

在无边界状态的情况下，路径积分是沿所有给出的紧致度规和物质场的. 但在真空态情况下，路径积分遍及所有的欧氏度规和所有在无限远处为零或者规范为零的物质场.

在小超空间模型中，无边界波函数以$\mathrm{e}^{a^2/2}$的形式随a的增大

而增大，其中 a 是 3 维曲面 S 的半径；另一方面，真空态波函数对于足够大的 a 以 $e^{-a^2/2}$ 的形式随 a 的增大而减小. 这一不同是由于引力作用量中的主要项是表面项

$$-\frac{m_P^2}{8\pi}\int d^3x\sqrt{h}K. \tag{4.1.6}$$

式中 K 是曲面 S 外法线 2 形式的迹. 在无边界波函数的情况下，零物质场稳态度规是半径为 a 的 3 维球内平直空间. 外法线发散，作用量为负的. 这使得无边界波函数随着 3 维曲面尺寸的增大而增大. 另一方面，真空波函数的稳态度规是半径为 a 的 3 维球外部平直空间. 外法线收敛，作用量为正的，在大半径 a 处波函数衰减.

然而，对于小超空间模型存在另一个 W-D 方程的解，在 $a=0$ 处也是规则的，在大半径处也衰减. 此时某些解可以描述为具有守恒量子流的解的迭加，这些解不能与紧致 4 维几何隔离，因为那样通量将为零. 在大半径处的行为表明，这些解是渐近欧氏的，而且在 $a=0$ 处是非奇异的. 这样，这些解应该对应于连接两个渐近欧氏区域的虫洞.

借助于 $S^3\times R^1$ 拓扑空间所有度规上的路径积分，可以定义虫洞的基态. 在 R^1 每一终点处，路径积分中的物质场将规范为零. 这意味着虫洞波函数与真空态波函数是等同的，由遍及所有渐近欧氏度规和所有渐近零质量场的路径积分给出. 另外，在 $a=0$ 处规则，在大半径处衰减的其他 W-D 方程的解可以解释为虫洞的“激发态”. 在文[20]中，把这些解解释为闭宇宙的激发态. 这是因为在小 a 处波函数振荡，所以对应于洛仑兹的闭佛里德曼度规. 同样可以认为，大 a 处指数形式的波函数对应于欧氏虫洞度规. 实际上，虫洞度规是佛里德曼度规的解析延拓.

虫洞激发态的波函数也可以由路径积分描述. 路径积分中的度规是渐近欧氏的，这意味着这里没有渐近的引力激发. 但是在无限远处物质场有场源，可以解释为存在有穿越虫洞的物质粒子. 这里，“在无限远处”意指与虫洞特有尺度相比的大距离. 这

适用于计算低能格林函数的源，也适用于稀薄虫洞近似下其他虫洞的有效源. 我们可以把稀薄虫洞近似解释为虫洞是“即壳”(on sell). 于是有关于 W-D 方程的边界条件:至少在小超空间情况下允许解的惟一一个分立波谱. 然而，当超出稀薄虫洞近似时，或者探讨相互靠近的虫洞时，就要在对格林函数分解因式的态中包含“离壳”(off sell)虫洞态的连续簇.

§4.2 具有无质量标量场的小超空间模型

我们讨论形式为

$$ds^2=\sigma^2[N^2(t)dt^2+a^2(t)d\Omega_3^2] \tag{4.2.1}$$

的度规，式中 $\sigma^2=2G/3\pi$, $d\Omega_3^2$ 是单位半径 3 维球的度规. 如果 N 为虚数，这是佛里德曼宇宙的洛仑兹度规，当 N 为实数时，这是欧氏虫洞度规. 但是 W-D 方程的解不依赖于 N 和 t. 于是根据波是振动的或指数形式的，分别解释为佛里德曼宇宙或虫洞.

首先考虑零质量最小耦合标量场 ϕ. W-D 方程为

$$\left[\frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a}-\frac{1}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-a\right]\Psi(a,\phi)=0, \tag{4.2.2}$$

其中因子顺序在小超空间坐标变换下是不变的，于是可以令

$$\Psi(a,\phi)=c(a)e^{ik\phi}, \tag{4.2.3}$$

来分离变量，其中

$$\frac{d^2c}{da^2}+\frac{1}{a}\frac{dc}{da}+\left[\frac{k^2}{a^2}-a^2\right]c=0. \tag{4.2.4}$$

两个独立的解为

$$J_{\pm ik/2}\left[\frac{i}{2}a\right]. \tag{4.2.5}$$

可以找到这些解的线性组合，在大的半径 a 处以 $e^{-a^2/2}$形式变化. 但在接近 $a=0$ 处，解以 $a^{\pm ik}$形式变化，于是它们振动无限多次.

这些解是量子力学算符 $\pi_\phi=-i\dfrac{\partial}{\partial\phi}$的本征态，本征值为 k. 经典地，

$$\pi_\phi = \frac{i}{N} a^3 \frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{4.2.6}$$

于是这些解携带一守恒的标量流 $q = 2\pi^2 k$，其中

$$q = i\int_S \phi_{;\mu} d\sigma^\mu. \tag{4.2.7}$$

它们将在 a 处振荡($0<a<k^{1/2}$)，在这些区域，它们可以解释为对应于具有标量流 q 的经典洛仑兹-佛里德曼解. 这些解将从 $a=0$ 膨胀到最大半径 $a=(q/2\pi^2)^{1/2}$，并再次收缩到 $a=0$. 在 $a=0$ 附近无限多数目的波函数振动对应于最初和最终佛里德曼解的奇点.

当 $a>k^{1/2}$，波函数将以 $e^{-a^2/2}$的形式指数地衰减. 这表明它们对应于渐近欧氏经典解，半径 a 的下限 $k^{1/2}$和非零标量流 q 的存在表明解具有连接两个渐近欧氏区域的虫洞的形式. 对于实的 q，在欧氏解中 ϕ 的梯度将是虚的，这意味着标量场的能-动张量将和在欧氏部分上为实的标量场的能-动张量反号. 经典欧氏解和 Giddings 与 Strominger 发现的解相同，恰恰是含有实 ϕ 的经典佛里德曼解的解析延拓.

在虫洞的半经典方案中，我们考虑作为经典欧氏解的瞬子. 如果要求物质场是实的，这样的解仅在反对称张量场或 Yang-Mills 场的特殊情况下才存在. 在纯引力的情况下它们不存在. 这表明，对于宇宙常数问题，虫洞不是一般解. 另一方面，在量子力学波函数方案中，人们可以期望，对于所有合理的物质形式，存在满足适当边界条件的 W-D 方程的解.

当然上面给出的解不满足 $a=0$ 处的规则性条件. 但我们将表明，有另外一类 W-D 方程的解，它们在 $a=0$ 处是规则的，并在大 a 值处是衰减的. 在小超空间中，我们引入一新的坐标，定义为

$$x = a\sinh\phi, \quad y = a\cosh\phi. \tag{4.2.8}$$

此时 W-D 方程变为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - y^2 + x^2\right]\Psi = 0. \tag{4.2.9}$$

这是能量符号相反的两个谐振子的方程. 其解在原点处规则，且在无限远处衰减，恰为两谐振子波函数的乘积：

$$\Psi=\Psi_n(x)\Psi_1(y). \tag{4.2.10}$$

式中

$$\Psi_n(x)=(2^n n!)^{-1/2}H_n(x)e^{-x^2/2}. \tag{4.2.11}$$

这些谐振子解，以下用 $|n\rangle$ 表示，构成 W-D 方程解的基础，它们在原点处规则，在无限远处衰减. 于是在 W-D 方程的对称性下，它们必须可以相互转换. 这可以看作是 xy 平面内的洛仑兹变换，由 Kıllıng 矢量 $\partial/\partial\phi=y\partial/\partial x+x\partial/\partial y$ 生成. 我们可以用两个谐振子的湮灭和产生算符来表示，采用

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x+a_x^+), \tag{4.2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2}}(a_x-a_x^+). \tag{4.2.13}$$

对称生成元 $K=\imath\pi_\phi$为

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=(a_x a_y-a_x^+ a_y^+). \tag{4.2.14}$$

我们可以按谐振子态，用上式来表示 K 本征态，反之亦然. 令

$$|k\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(k)|n\rangle. \tag{4.2.15}$$

用 K 作用之，得到

$$\imath kc_n=(n+1)c_{n+1}-nc_{n-1}. \tag{4.2.16}$$

可以由 $c_0(k)$用递推的方法得到 $c_n(k)$，而 $c_0(k)$由规则化来确定. 用超几何函数 F 表示，得到

$$c_n(k)=(-1)^n\pi^{3/2}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\pi k\right)F\left(-n,\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath k;1;2\right)=\pi^{3/2}\mathrm{sech}\left(\frac{1}{2}\pi k\right)F\left(-n,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\imath k;1;2\right). \tag{4.2.17}$$

这是 F 是 $\imath k$ 的奇或偶的 n 次多项式. 因此，我们可以把奇异的 K 本征态看作无限多规则谐振子解的迭加. 类似地，谐振子解可认为是不同 K 本征态的迭加，就像波动方程的波包解可被看作平

面波的迭加一样．于是，谐振子解可以解释为经典解的相干态．

含有共形不变标量场 ϕ 的小超空间模型，存在谐振子解的类似的不连续波谱．W-D 方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2}-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}-a^2+\xi^2\right)\Psi=0. \tag{4.2.18}$$

式中 $\xi=a\phi$．这一方程显然有 a 和 ξ 的谐振子解．然而人们总可以利用一个自由度做一度规的共形变换，来建立耦合于引力的共形标量场和最小标量场之间的等价性．在目前的情况下，由定义新的半径和标量场

$$\tilde{a}=a\sqrt{1-\phi^2},\ \phi=\mathrm{arctanh}\phi, \tag{4.2.19}$$

可以看到这种等价性，用这些新变量，W-D 方程就和最小无质量标量场的方程一样了．于是存在有 K 本征态解．在 $a=0$ 处这些解是奇异的，它们是解析延拓了的欧氏虫洞瞬子中 $a=0$ 处的奇点．在 $\phi=\pm1$ 处，它们也是奇异的，这对应于在 $\phi=\pm1$ 处牛顿引力常数变为无限大且改变符号．但在 $a=0$ 和 $\phi=\pm1$ 处谐振子解的行为都是好的．这样，它们可在有共形不变标量场的理论中提供一种虫洞的量子力学描述．

§4.3 有质量标量场的小超空间模型

共形不变的和无质量的最小耦合标量场都是相当特殊的物质形式．对于其他的物质形式，是否存在 $a=0$ 处规则、大半径处衰减的 W-D 方程的解？很难完全有信心地回答这个问题，因为人们显然不能得到封闭形式的、明显的严格解，即使在具有非零自耦合势 $U(\phi)$ 的最小耦合标量场这一简单情况下．但是，对于有质量标量场的情况，人们可以找到明显的渐近解，而且类似的构造方法对于相当任意的势都是可行的．

对于耦合于均匀标量场 ϕ，半径为 a 的 F-R-W3 维球几何，选择适当单位，W-D 方程可以写为

$$W\Psi=\left[a\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-a^4+2a^6U(\phi)\right]\Psi(a,\phi)=$$

$$\ddot{\Psi}-\Psi''-a^4\Psi+2a^6U\Psi=0. \tag{4.3.1}$$

式中圆点表示 $\partial/\partial a$，撇表示 $\partial/\partial\phi$. 作为出发点，构造一个零级 WKB 近似 e^{-I}，其中 $I(a,\phi)$是经典欧氏解的作用量，从(a,ϕ)点到 $a=\infty$和 $U(\phi)$极小处的 ϕ(为了使解是渐近欧氏的，必须使 $\phi=0$ 处 $U=0$).

欧氏作用量 $I(a,\phi)$满足哈米顿-雅可比方程

$$\dot{I}^2-I'^2-a^4+2a^6U=0. \tag{4.3.2}$$

I 中平方项的符号与洛仑兹作用量中的相反. 对于大的 a，可以用渐近形式给出作用量：

$$I(a,\phi)=a^3E(\phi)+\frac{1}{2}a^2F(\phi)+aG(\phi)+$$

$$H(\phi)+O(a^{-1}). \tag{4.3.3}$$

式中 $$E'^2-9E^2=2U, \tag{4.3.4}$$

在 $\phi=0$ 处 $E(\phi)$有极小值零，我们得到关于 ϕ 的其他函数的微分方程，积分后得到

$$F(\phi)=\exp\left[\int_0^\phi\frac{6E(x)\mathrm{d}x}{E'(x)}\right], \tag{4.3.5}$$

$$G(\phi)=[F(\phi)]^{1/2}\int_0^\phi[E'(x)]^{-3}[F(x)]^{-1/2}\times$$

$$\{U(x)[F(x)]^2-\frac{1}{2}[E'(x)]^2\}\mathrm{d}x, \tag{4.3.6}$$

$$H(\phi)=\int_0^\phi[E'(x)]^{-1}\left[F(x)G(x)-\frac{1}{2}F'(x)G'(x)\right]\mathrm{d}x. \tag{4.3.7}$$

只在 $\phi=0$ 处 $F(\phi)\neq0(F=1)$，于是沿着 $\phi=0$ 的线有 $I(a,0)=\frac{1}{2}a^2$，这对应于空的平直时空的欧氏解. 由(4.3.4)和(4.3.5)容易看到，随着远离 $\phi=0$，$E(\phi)$和 $F(\phi)$都是$|\phi|$的单调递增函数，只要 $U(\phi)$维持为非负或至少不降低到$-\frac{9}{2}E(\phi)$.

对于 $U(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 和 $\phi^2\ll 1$，我们可以找到 E、F、G 和 H 的幂级数解：

$$E(\phi)=m\left[\frac{1}{2}\phi^2+\frac{3^2}{2^5}\phi^4+\frac{3^3}{2^8}\phi^6+\frac{3^5}{2^{14}}\phi^8+0\phi^{10}+\frac{3}{2^{21}}\phi^{12}-\frac{3^9}{2^{24}7}\phi^{14}+O(\phi^{16})\right], \tag{4.3.8}$$

$$F(\phi)=1+\frac{3}{2}\phi^2+\frac{3^2 5}{2^6}\phi^4+\frac{3^2}{2^8}\phi^6-\frac{3^3 13}{2^{16}}\phi^8+\frac{3^4 41}{2^{15}5}\phi^{10}-\frac{3^4 2603}{2^{21}5}\phi^{12}-\frac{3^5 904417}{2^{24}7^2}\phi^{14}+O(\phi^{16}), \tag{4.3.9}$$

$$G(\phi)=m^{-1}\left[\frac{3}{2^4}\phi^2-\frac{3^3}{2^8}\phi^4+\frac{3\times 41}{2^{12}}\phi^6+\frac{3^2 115}{2^{19}}\phi^8-\frac{3^3 410953}{2^{21}5^2}\phi^{10}-\frac{3^3 2319221}{2^{25}5^2}\phi^{12}+O(\phi^{14})\right], \tag{4.3.10}$$

$$H(\phi)=m^{-2}\left[-\frac{3}{2^4}\phi^2-\frac{3^2}{2^8}\phi^4-\frac{43}{2^9}\phi^6+\frac{3^3 26267}{2^{22}}\phi^8-\frac{3^4 1377457}{2^{19}5^5}\phi^{10}+O(\phi^{12})\right]. \tag{4.3.11}$$

对于 $U(\phi)=(\lambda/2p)\phi^{2p}$，我们得到

$$E=\left[\frac{\lambda}{p}\right]^{1/2}\frac{\phi^{p+1}}{p+1}\left[1+\frac{3^2\phi^2}{2(p+1)(p+3)}+\frac{3^4(3p+1)\phi^4}{2^3(p+1)^3(p+3)(p+5)}+\frac{3^6(5p^3+15p^2-5p+1)\phi^6}{2^4(p+1)^5(p+3)^2(p+5)(p+7)}+O(\phi^8)\right], \tag{4.3.12}$$

$$F=1+\frac{3\phi^2}{p+1}+\frac{3^2p(p+4)\phi^4}{2(p+1)^3(p+3)}+\frac{3^2(p^4+10p^3+23p^2-34p+6)\phi^6}{2(p+1)^5(p+3)(p+5)}+O(\phi^8), \tag{4.3.13}$$

$$G=\left[\frac{\lambda}{p}\right]^{-1/2}\frac{3(2p-1)\phi^{3-p}}{2(p+1)^2(3-p)}\times$$

$$\left[1-\frac{3(4p^4-14p^3-61p^2+134p-39)}{2(p+1)^2(p+3)(2p-1)(5-p)}\phi^2+O(\phi^4)\right],$$

(4.3.14)

$$H=-\left[\frac{\lambda}{p}\right]^{-1}\frac{3(2p-1)\phi^{4-2p}}{(p+1)^3(3-p)}[1+O(\phi^2)]. \qquad (4.3.15)$$

如果把展开式(4.3.3)写为

$$I(a,\phi)=\frac{1}{2}a^2+\sum_{l=-3}^{\infty}a^{-l}F_l(\phi), \qquad (4.3.16)$$

则 $E=F_{-3}$，$F=1+2F_{-2}$，$G=F_{-1}$和 $H=F_0$，然后我们看到对于小的 ϕ 值，F_l 以 $\lambda^{-1-l/2}\phi^{2-(p-1)(l+2)}$的形式变化. 因此，如 $p>1$，对于 $l>(4-2p)/(p-1)$，在小 ϕ 值处这一展开式不成立. 然而，对于 $U=\frac{1}{2}m^2\phi^2$，$p=1$ 的情况，显然这个展开式对所有的 l 在小 ϕ 值处均成立. 于是我们假设，在足够小的 ϕ 值处，势以$\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 的形式变化($m^2>0$).

假设 $U(\phi)$不比 $e^{6|\phi|}$的常数倍增长得更快，可以看到，对于大的$|\phi|$，$l<0$ 时，a^{-l}的展开系数为

$$F_l(\phi)\approx C_l e^{-l|\phi|}. \qquad (4.3.17)$$

式中C_l 是依赖于$U(\phi)$的常数. 原则上，对(4.3.4)～(4.3.6)做数值计算，便可求出其值. 显然，C_{-3}和 C_{-2}都是正的. 于是对于大的 a 值，

$$a^2=y^2-x^2=uv \qquad (4.3.18)$$

和大的$|\phi|$值，

$$\phi=\operatorname{arctanh}\left[\frac{x}{y}\right]=\frac{1}{2}\ln\frac{v}{u}, \qquad (4.3.19)$$

作用量

$$I\approx c_{-3}a^3e^{3|\phi|}=c_{-3}(y+|x|)^3=$$
$$c_{-3}\max(u^3,v^3). \qquad (4.3.20)$$

式中 u 和 v 是小超空间零坐标：

$$u=y-x=ae^{-\phi},\ v=y+x=ae^{\phi}, \qquad (4.3.21)$$

它们均取非负值. 用这些零坐标，可将哈米顿-雅可比方程

(4.3.2)改写为

$$\frac{\partial I}{\partial u}\frac{\partial I}{\partial v}=\frac{1}{4}uv-\frac{1}{2}u^2v^2U\left[\frac{1}{2}\ln\frac{v}{u}\right],\tag{4.3.22}$$

在小超空间的一个零边界附近(如 $v=0$),作用量的近似式(4.3.20)也成立,只要另一个零坐标(如 u)取足够大的值(甚至当 $a^2=uv$ 为零).

为了粗略地想像整个小超空间上作用量的行为,需要有一个自然近似的清晰的表述.为此,我们用 $E=\frac{2}{9}m\sinh^2\frac{3}{2}\phi$ 代替(4.3.3)中的前两项,此式用来给出当 $u=\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 时式(4.3.8)的第一项.如果标量场的势为 $U=\frac{2}{9}m^2\sinh^2\frac{3}{2}\phi$,实际上这个 E 是(4.3.4)的解.因此,如果实际的势增长得稍快了些,使它显得太大了,但是对于大的 ϕ 值,E'^2 和 $9E^2$ 均将粗略地以 $9C_{-3}^2e^{6|\phi|}$ 的形式变化,并且如果势上升得不那么快,它们将比 $2U$ 项大得多.由(6.3.5)给出 $F=\cosh^{4/3}\frac{3}{2}\phi$,它确实与(4.3.9)的前两项符合,并且具有正确的近似式(4.3.17).此时这两个近似函数给出

$$I(a,\phi)\sim\frac{2}{9}ma^3\sinh^2\frac{3}{2}\phi+\frac{1}{2}a^2\cosh^{4/3}\frac{3}{2}\phi=$$
$$\frac{2}{9}m\left(\frac{1}{2}u^{3/2}-\frac{1}{2}v^{3/2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u^{3/2}+\frac{1}{2}v^{3/2}\right)^{4/3}.\tag{4.3.23}$$

一旦有了欧氏哈米顿-雅可比方程(4.3.2)或(4.3.22)的解,梯度矢量场 ∇I 的积分曲线便给出经典欧氏解的轨迹.指标的上升由小超空间度规

$$ds^2=-a\mathrm{d}a^2+a^3\mathrm{d}\phi^2=(y^2-x^2)^{1/2}(-\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}x^2)=$$
$$-u^{1/2}v^{1/2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\tag{4.3.24}$$

的逆给出.

沿每一条积分曲线的欧氏时间导数由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}=-\nabla I\cdot\nabla=a^{-1}\frac{\partial I}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}-a^{-3}\frac{\partial I}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}=,$$

$$2u^{-1/2}v^{-1/2}\left[\frac{\partial I}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}+\frac{\partial I}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\right] \tag{4.3.25}$$

给出，或者由 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\tau=a^{-3}(\dot{I}f-I'f')$给出.

按照对应于度规(4.3.24)的拉普拉斯，W-D 方程(4.3.1)对应于

$$\frac{1}{2}a^{-3}W\Psi=\left(-\frac{1}{2}\nabla^2+V\right)\Psi=0, \tag{4.3.26}$$

$$V(a,\ \phi)=-\frac{1}{2}a+a^3U(\phi), \tag{4.3.27}$$

并且哈米顿-雅可比方程具有形式

$$\frac{1}{2}(\nabla I)^2=V. \tag{4.3.28}$$

如果将 WKB 波函数写为

$$\Psi=C(a,\ \phi)\mathrm{e}^{-I}\equiv\mathrm{e}^{h-I}, \tag{4.3.29}$$

则采用式(4.3.25)，给出

$$h=\int\left[\frac{1}{2}\nabla^2 I-\frac{1}{2}(\nabla h)^2-\frac{1}{2}\nabla^2 h\right]\mathrm{d}\tau. \tag{4.3.30}$$

式中积分沿着每一条经典的轨迹. 在 I 比 h 变化更迅速的 WKB 极限情况下，由(4.3.30)右端含 h 的衰减项构成的一级 WKB 近似是足够精确的. 如果要求更高阶近似，可以把导出的左端放回到右端去做更高阶的 WKB 近似迭代.

对于 n 维小超空间中切于∇S 的$(n-1)$-参数轨迹簇中的每一个，(4.3.30)式有一个积分常数(此处 $n=2$). 把因子 C 具体化为维数是 1 的超曲面(在此为一曲线)上的缓变函数($c=\mathrm{e}^h$)，此超曲面与经典轨迹相交，可以得到所有以相同作用量为基础又依赖于这一$(n-1)$变量的函数 C 的 WKB 解簇. 对于小的 ϕ 值，势 $U(\phi)$ 变为$\frac{1}{2}m^2\phi^2$，作用量有好的行为，且处处为正(除了 $a=0$ 处，ϕ 有限，在此处为零). 对于大的 a 值，作用量随着 a^2 加上 a^3 乘以一非负单调递增函数 $E(\phi)$趋于无限大. 因此，如果 C 有好行为，并且保持有界或者在无限远处不像 e^I 一样快地发散，则 $\Psi=c\mathrm{e}^{-I}$将有好行为，到处有界，且在无限远为衰减的.

在反复试验之后，霍金发现一种方案，对于 $U=\frac{1}{2}m^2\phi^2$ 有效. 这一想法由

$$\Psi_{n0}=\phi^n e^{-L_n(a,\phi)} \tag{4.3.31}$$

开始，对每一非负整数 n，其中 L_n 是 a 和 ϕ 的正的解析函数，使得 Ψ_{n0} 尽可能满足 W-D 方程(4.3.1). 但这一形式不能严格地满足(4.3.1)，因为 $-\Psi''_{n0}$ 中含 $-n(n-1)\phi^{-2}\Psi_{n0}$. 如果 $\phi=0$ 处 L_n 是解析的，这一项不能消除(例如，此处不包含 $\ln\phi$ 项). 但是我们可以解方程

$$\begin{aligned} W\Psi_{n0}\equiv \ddot{\Psi}_{n0}-\Psi''_{n0}-a^4\Psi_{n0}+m^2a^6\phi^2\Psi_{n0}= \\ -n(n-1)\phi^{-2}\Psi_{n0}, \end{aligned} \tag{4.3.32}$$

它等效于

$$\dot{L}_n^2-L'^2_n-\ddot{L}_n+L''_n+2n\phi^{-1}L'_n-a^4+m^2a^6\phi^2=0, \tag{4.3.33}$$

此方程有一个渐近级数解，形式为

$$\begin{aligned} L_n = {} & \sum_{l=0}^{\infty}a^{3-l}L_{nl}(\phi)+c_n\ln a = \\ & a^3E(\phi)+\frac{1}{2}a^2F(\phi)+a\Big[G(\phi)- \\ & \left(n+\frac{1}{2}\right)mF^{1/2}(\phi)\Big]+\Big[\frac{1}{4}-\frac{3}{2}n- \\ & \frac{1}{8}(2n+1)^2m^2\Big]\ln a+\sum_{l=3}^{\infty}a^{3-l}L_{nl}(\phi)= \\ & \frac{1}{2}ma^3\phi^2\Big[1+\frac{3^2}{2^4}\phi^2+\frac{3^3}{2^7}\phi^4+\frac{3^5}{2^{13}}\phi^6+0\phi^8+ \\ & \frac{3^7}{2^{20}}\phi^{10}-\frac{3^9}{2^{23}7}\phi^{12}+O(\phi^{14})\Big]+\frac{1}{2}a^2\Big[1+\frac{3}{2}\phi^2+ \\ & \frac{3^25}{2^6}\phi^4+\frac{3^2}{2^8}\phi^6-\frac{3^313}{2^{16}}\phi^8+\frac{3^441}{2^{15}5}\phi^{10}- \\ & \frac{3^42603}{2^{21}5}\phi^{12}-\frac{3^5904417}{2^{24}7^2}\phi^{14}+O(\phi^{16})\Big]+ \\ & \frac{3}{2^4}m^{-1}a\phi^2\Big[1-\frac{3^2}{2^4}\phi^2+\frac{41}{2^8}\phi^4+\frac{345}{2^{15}}\phi^6- \end{aligned}$$

$$\frac{3698577}{2^{17}5^2}\phi^8 - \frac{20872989}{2^{21}5^2}\phi^{10} + O(\phi^{12})\Big] -$$

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)ma\Big[1 + \frac{3}{2^2}\phi^2 + \frac{3^2}{2^7}\phi^4 - \frac{3^2}{2^8}\phi^6 +$$

$$\frac{3^3 103}{2^{17}}\phi^8 + \frac{3^4 221}{2^{15}5}\phi^{10} - \frac{3^5 72463}{2^{24}5}\phi^{12} +$$

$$O(\phi^{14})\Big] - (\ln a)\Big[\frac{3}{2}n - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(2n+1)^2 m^2\Big] -$$

$$\Big[\frac{3}{2^4}m^{-2} + \frac{3^2}{2^4}n + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^5}(2n+1)^2 m^2\Big]\phi^2 -$$

$$\Big[\frac{3^2}{2^8}m^{-2} - \frac{3^4}{2^8}n - \frac{3^3 5}{2^9} - \frac{3^3}{2^{10}}(2n+1)^2 m^2\Big]\phi^4 -$$

$$\Big[\frac{43}{2^9}m^{-2} + \frac{3^3 37}{2^{12}}n + \frac{3^5 7}{2^{13}} + \frac{3^3}{2^{12}}(2n+1)^2 m^2\Big]\phi^6 +$$

$$\Big[\frac{3^3 26267}{2^{22}}m^{-2} + \frac{3^6 149}{2^{20}}n + \frac{3^7 79}{2^{21}} -$$

$$\frac{3^6}{2^{20}}(2n+1)^2 m^2\Big]\phi^8 - \Big[\frac{3^4 1377457}{2^{19}5^2}m^{-2} -$$

$$\frac{3^4 111481}{2^{21}5^2}n - \frac{3^4 119581}{2^{22}5^2} - \frac{3^9}{2^{21}5}(2n+1)^2 m^2\Big]\phi^{10} +$$

$$O(\phi^{12}) + O(a^{-1}). \tag{4.3.34}$$

于是对于每一非零整数 n，可以得到一个好行为的指数衰减的波函数的渐近级数形式

$$\Psi_n = \mathrm{e}^{-L_n}\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} f_{nk}(\phi). \tag{4.3.35}$$

式中 $f_{n0}=\phi^n$，有更高 k 值的 f_{nk} 是 ϕ 的解析函数，以使按照展开参数 a^{-1}，Ψ_n 满足 W-D 方程(4.3.1). 由不定积分，我们可以得到各个 f_{nk}：

$$f_{nk} = \phi^n F^{-k/2}\int \frac{\mathrm{d}\phi}{2E'}\phi^{-n}F^{k/2}\sum_{l=1}^{k}\{\delta_{l3}f''_{n(k-l)} - 2L'_{nl}f'_{n(k-l)} +$$

$$[2n\phi^{-1}L'_{nl} + 2(k-l)(l-3)L_{nl} - (k-l)(2c_n +$$

$$k-l)\delta_{l3}]f_{n(k-l)}\}. \tag{4.3.36}$$

在每一积分中，选择 f_{nk} 的积分常数，使得在接下来的积分 $f_{n(k+1)}$ 中不存在含有非解析因子 $\ln\phi$ 的项.

例如，计算式(4.3.36)，避免 $\ln\phi$ 项，得到

$$f_{n0}=\phi^n, \tag{4.3.37}$$

$$f_{n1}=0, \tag{4.3.38}$$

$$f_{n2}=\frac{9}{32}n(n-1)\phi^n F^{-1}=$$

$$\frac{9}{32}n(n-1)\phi^n\left(1-\frac{3}{2}\phi^2\right)+O(\phi^{n+4}), \tag{4.3.39}$$

$$f_{n3}=-\frac{n(n-1)}{4m}\phi^{n-2}\left\{1-\left[1+\frac{2n+1}{4}m^2\right\}\phi^2\right]+O(\phi^{n+2}), \tag{4.3.40}$$

$$f_{n4}=-\frac{3n(n-1)}{2048}[24m^{-2}+277n^2-233n+60-$$

$$12(2n+1)^2m^2]\phi^n+O(\phi^{n+2}), \tag{4.3.41}$$

$$f_{n5}=\frac{3n(n-1)}{128}[4m^{-3}+(n-1)(13n+8)m^{-1}]\phi^{n-2}+$$

$$O(\phi^n), \tag{4.3.42}$$

$$f_{n6}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{32m^2}\phi^{n-4}+O(\phi^{n-2}), \tag{4.3.43}$$

$$f_{n(3j)}=\frac{n!}{j!\,(n-2j)!}\left[\frac{-1}{4m}\right]^j\phi^{n-2j}+$$

$$O\left[\frac{n!}{(n-2j+2)!}\phi^{n-2j+2}\right], \tag{4.3.44}$$

$$f_{m(3j+1)}=O\left[\frac{n!}{(n-2j)!}\phi^{n-2j}\right], \tag{4.3.45}$$

$$f_{n(3j+2)}=O\left[\frac{n!}{(n-2j)!}\phi^{n-2j}\right]. \tag{4.3.46}$$

由(4.3.36)可看出，当被积函数中的勒让德展开式没有 ϕ^{-1} 项时(它将对非解析项 $\ln\phi$ 求积分)，每一个 $f_{nk}(\phi)$ 具有仅含 ϕ 的非负指数的洛仑兹展开式，所以它是 $\phi=0$ 附近 ϕ 的解析函数，只要函数 $L_{nl}(\phi)$ 是解析的，使得 ϕ 中的幂级数收敛. 显然，Ψ_n 关于 ϕ 是对称还是反对称取决于 n 为偶数还是奇数：

$$\Psi_n(a,\ -\phi)=(-1)^n\Psi_n(a,\ \phi).$$

由(4.3.44)～(4.3.46)可见，对于大的 a 值和小的 ϕ 值〔此时级数(4.3.35)可以有一个好的近似，用来求值〕，我们得到

$$\Psi_n = \phi^n e^{-L_n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \left[\frac{-1}{4ma^3\phi^2}\right]^k \times \left[1 + O\left(\frac{1}{a}\right) + O(\phi^2)\right]. \tag{4.3.47}$$

式中$[n/2]$表示小于等于$(n/2)$的最大整数. 对于 $4ma^3\phi^2 \gg n(n-1)$，$k=0$ 的项起决定性作用，于是得到

$$\Psi_n \approx \phi^n e^{-L_n}, \quad \frac{1}{4}n(n-1)m^{-1}a^{-3} \ll \phi^2 \ll (n+1)^{-1}, \tag{4.3.48}$$

但是对于 $4ma^3\phi^2 \ll (n+1)^{-1}$，$k=[n/2]$的项起决定性作用. 如果 n 为偶数，$n=2l$，则有

$$\Psi_{2l} \approx (2l-1)!!\, e^{-L_{2l}} (-2ma^3)^{-l},$$

$$\phi^2 \ll \frac{1}{4}(2l+1)^{-1}m^{-1}a^{-3} \ll (2l+1)^{-1}, \tag{4.3.49}$$

如果 n 为奇数，$n=2l+1$，则有

$$\Psi_{2l+1} \approx (2l+1)!!\, e^{-L_{2l+1}} (-2ma^3)^{-l}\phi,$$

$$\phi^2 \ll \frac{1}{8}(l+1)^{-1}m^{-1}a^{-3} \ll \frac{1}{2}(l+1)^{-1}. \tag{4.3.50}$$

对于$(n+1)^{-1} \lesssim 4ma^3\phi^2 \lesssim n(n-1)$，中间的一些项和式(4.3.47)将更复杂.

把很大的 n 对应的 Ψ_n 迭加起来，尝试构造洛仑兹 WKB 波包是很有趣的. 也许我们可以克服 Kiefer 遇到的困难(他试图按照 a 中转变点附近的经典轨迹来构造波包). 但是可能要求从 $a \gg m^{-1}+1+nm$ 区域向内延拓 L_n，这里渐近表达式(4.3.47)适用，因为此式给出随 a 增大而单调减小的 $\Psi_{2l}(a, \phi=0)$.

5 没有假真空的开暴胀

近几年的微波背景辐射观测结果倾向于支持低密度的开暴胀模型.

本章讨论 Hawking 和 Turok(1998)给出的没有假真空的开暴胀模型[28~29].

Hawtle-Hawking 认为，他们的"无边界"宇宙可以给出宇宙的开暴胀，对于暴胀势没有任何特殊要求. 在最简单的暴胀模型中，欧氏路径积分的半经典近似和人择条件给出密度参数 $\Omega_0 \approx 0.01$. 在具有多个场和额外维度的模型中，比这个数值要大一些.

§5.1 关于宇宙的暴胀

暴胀宇宙学的图像为人们提供的一个关于现在宇宙的线度、平直性、均匀性以及涨落起源机制的很有说服力的解释. 但是在一个给定的暴胀宇宙模型中，暴胀是否实际发生，很强地依赖于暴胀的初始条件. 关于这一初始条件的假定，常会遇到困难. H-H 认为他们提出的"无边界"的初始条件则可避免这个困难. 下面我们讨论，这一"无边界"条件加上最弱的人择原理，对于一般标量场，预言了开暴胀宇宙. 具有最弱人择原理的最简单暴胀势要求 $\Omega_0 \sim 0.01$. 对于包含附加场的一般情况则要求稍大一些的 Ω 值. 通常，各模型均要求暴胀势有一个亚稳的极小值——"假真空"，有一个慢滚动相，使之能够创生一个具有量子涨落的 de Sitter 空间. 这个场会通过量子隧道效应，产生众多泡泡. 在泡里，滚动会慢下来，直到真最小. Coleman 和 De luccia(1980)指出[5]，这样一个泡

的内部实际上是一个无限开放的宇宙.调整慢滚动的时间,人们可以建立一个宇宙模型,使现在空间曲率与哈勃半径相一致[4].

所有的暴胀模型都必须保证量子涨落足够小,这就要求势很平坦.但在开暴胀中,这必须要求势有一个假真空,而且有一个Coleman-De luccia 形式的泡解.如果假真空中的标量场质量太大,则这个泡只"内部适合"de Sitter 哈勃半径.总之,这些要求表明,开暴胀需要的标量势只是对单场模型设计的.二场模型已由A.D.Linde(1995)提出,该模型仍然要求一个假真空.

在H-H理论框架内,不再要求"假真空"暴胀过程,量子涨落是用延拓场和欧氏度规扰动来计算的.这一理论提出宇宙是由初始空间的微小涨落开始的.

§5.2 瞬　　子

设耦合标量场具有势 $V(\phi)$,考虑 Einstein 引力路径积分.设想势有个真最小 $V=0$.我们来寻找经典运动方程的解并延拓它们,用确定涨落大小的方法来逼近路径积分.首先从欧氏瞬子开始.如果 $V(\phi)$ 在一些非零值处有一个固定点,则存在 $O(5)$ 不变解,此时 ϕ 为常数,欧氏流形为一4维球.我们对一般的只具有 $O(4)$ 不变性的解感兴趣.这时度规形式为

$$ds^2=d\sigma^2+b^2(\sigma)d\Omega_3^2=d\sigma^2+b^2(\sigma)(d\psi^2+\sin^2\psi d\Omega_2^2). \tag{5.2.1}$$

式中 $b(\sigma)$ 是 S^4 的"纬线"S^3 的半径.对于 $O(5)$ 不变解,

$$b(\sigma)=H^{-1}\sin(H\sigma) \qquad H^2=8\pi GV/3,$$

但在一般情况下 $b(\sigma)$ 不一定是正弦函数.

把只具有 $O(4)$ 不变性的解自然地延拓到一个开宇宙(如图6-7).首先从欧氏空间延拓到洛仑兹空间,为了获得实的洛仑兹度规,必须在度规是固定的3维表面上延拓.设 Ψ 在欧氏区域,然后沿一个假想方向在洛仑兹区域从0到 $\frac{\pi}{2}$,

$$\Psi=\frac{\pi}{2}+i\tau,$$

我们得到 $ds^2=d\sigma^2+b^2(\sigma)(-d\tau^2+\cosh^2\tau d\Omega_2^2)$. (5.2.2)

这是一个空间不均匀的类 de Sitter 度规，描述解的区域 Ⅱ，即暴胀泡的外部. 半径 $b(\sigma)$ 在 σ 的两个值处为零. 第一个值(我们设为 $\sigma=0$)附近，$b(\sigma)$ 随着 σ 线性地变为零. 这个度规有一个唯一的延拓穿过零表面 $\sigma=0$.

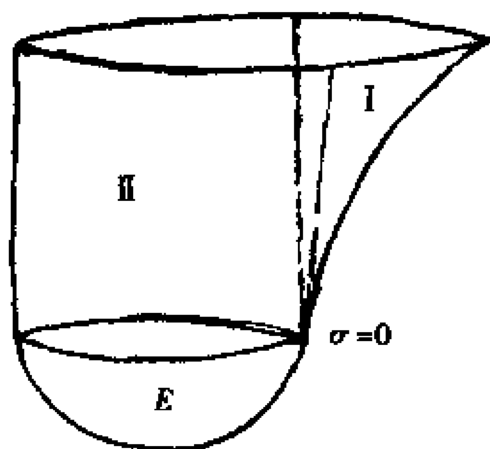


图 6-7

设 $\sigma=it$，$\tau=\frac{1}{2}i\pi+\chi$，

我们有 $ds^2=-dt^2+a^2(t)(d\chi^2+\sinh^2\chi d\Omega_2^2)$. (5.2.3)

式中 $a(t)=-ib(it)$. 这是描述区域 I 的膨胀开放宇宙.

可在假想方向上延拓坐标 σ，使之超过 σ_{max}. 这样，在欧氏区域 σ 从 0 到 σ_{max}，且在洛仑兹区域 $\sigma=\sigma_{max}+iT$. 后者是均匀的类 de Sitter 空间，但时间依赖于空间截面

$$ds^2=-dT^2+b^2(T)(d\psi^2+\sin^2\psi d\Omega_2^2). \quad (5.2.4)$$

稍后我们再来讨论这个解，它描述一个闭合的暴胀宇宙.

现在，我们更详细地讨论欧氏瞬子的特性. 场 ϕ 和半径 b 满足场方程

$$\phi''+3\frac{b'}{b}\phi'=V_{,\phi},$$

$$b''=-\frac{8\pi G}{3}b(\phi'^2+V), \quad (5.2.5)$$

式中的撇表示对 σ 求导数. 根据第一个方程，ϕ 沿着势 $-V$ 向下滚动. 设点 $\sigma=0$ 是非奇异的，这个流形在球坐标中局部地看起来像 R^4. 这要求在 σ 小的时候 $b(\sigma)\sim\sigma$. 当 $\sigma=0$ 时场取值 ϕ_0. 我们假定在 $\phi=\phi_0$ 处势有一个非零倾斜，$V_{,\phi}\neq0$. $O(4)$不变性和解析性要求 $\phi'(0)=0$. 跟随这个解，沿 σ 向前 $b(\sigma)$减速，且速度 $b'(\sigma)$变号.

此后，在点 σ_f，$b(\sigma)$降为零. 在另一边，场 ϕ 被强制项沿着势向上驱动，开始衰减；在 $b'(\sigma)$变号之后反衰减. 这个反衰减在接近 σ_f 时发散，$\phi'(\sigma)$趋向无限大. 当接近 σ_f 时，由第一个场方程得到 $\phi' \propto b^{-3}$，由第二个方程得到 $b \propto (\sigma_f - \sigma)^{1/3}$. 这样，当我们接近奇点时，$\phi' \propto (\sigma_f - \sigma)^{-1}$，按对数规律发散. 若存在另外的极点，驱动项 $V_{,\phi}$就可能变号，并且如果它足够大，能抵消反衰减项，便可停止 ϕ 的运动. Coleman-De luccia 瞬子仅在上述情况下才能得到[5]. 选择 ϕ_0 的值，使 ϕ'恰在 σ_f 变为零，就出现上述情况. 这时解的两端是非奇异的，且能够延拓至第三洛仑兹区域. 在过去的暴胀宇宙模型中多采用 C-D 瞬子，因为它是唯一非奇异的解，类似于闵可夫斯基的隧道解. 但是 de Sitter 空间和闵可夫斯基空间不同，哪一个瞬子解是容许的，这问题需要分别研究. 决定一个瞬子解是不是物理上容许的，主要准则是计算欧氏作用量 I. 系统的波函数在主级近似下正比于 e^{-I}. 所以不构成无限大的作用量. 欧氏作用量由下式给出：

$$I = \int d^4x \sqrt{-g}\left[-\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + V\right]. \qquad (5.2.6)$$

在 4 维情况下，爱因斯坦方程的迹可写为

$$R = 8\pi G[(\partial\phi)^2 + 4V(\phi)],$$

所以作用量为

$$I = -\int d^4x \sqrt{-g}V = -\pi^2\int d\sigma b^3(\sigma)V(\phi). \qquad (5.2.7)$$

式中积分沿 S^3 的一半，注意作用量是负的. 有趣的是，即使对于奇异瞬子（在奇点 V 按对数规律发散），$b^3(\sigma)$也随$(\sigma_f - \sigma)$线性地变为零；所以欧氏作用量仍然是收敛的. 仔细考察不难发现，作用量的标量场部分对数地发散（因为 ϕ'线性地发散），但是这一发散恰好被引力作用量中的一个相反的发散抵消了. 现在的计算和闵可夫斯基空间中隧道效应的计算存在两个根本的区别. 第一，瞬子在空间上是有限的，这就去掉了与场相联系的发散；第二，引力作用量不是正的，这样可以消掉标量场作用量中的发散. 这两点区别有个值得注意的结果，类似于闵可夫斯基空间的情况，能

够找到一个容许瞬子解的单参数族.

现在我们来考察在 σ_f 处的类时奇点. 存在类时奇点在半经典近似下不一定是致命的问题，这跟氢原子的情况类似，粒子轨道可避免奇点. 另外，量子涨落对于消除奇点可能已经足够了. H-H 认为，场和度规涨落可由欧氏区域的延拓来定义，奇性仅在此区域的边沿上的一点出现. 场涨落的模函数很容易用改变坐标(从 σ 到共形坐标 $X=\int_{\sigma}^{\sigma_f}\mathrm{d}\sigma/b(\sigma)$) 的方法来处理. 因为在 σ_f 处积分收敛，所以 X 不能小于零. 重新调整 $\phi=\chi/b$ 以后，便可满足具有势

$$U=b^{-1}\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}x^2}-V_{,\phi\phi}b^2\sim-\frac{1}{4}X^{-2}\quad(\text{当 } X\sim0)$$

的类薛定谔方程. 区域 Ⅱ 的因果结构在同样的共形坐标中很容易看出来. 靠近奇点，区域 Ⅱ 的空间度规与管 $R^+\times S^2$ 是共形的. 这个奇点是与管端相对应的世界线.

正如前面提到的，还能找到另外的瞬子，描述一个由 $\sigma_{\max}$沿虚方向延拓的闭合暴胀宇宙. 这个瞬子的作用量是(5.2.7)的两倍，但积分区间只取[0, $\sigma_{\max}$]. 函数 $b(\sigma)$和 $\phi(\sigma)$也稍为不同——$\phi'(0)$必须是零，所以速度 ϕ' 在对应面上是奇异的，这使得在 $\sigma=0$ 点关于 ϕ 的泰勒展开只含奇数项，于是 $\phi(T)$在洛仑兹区域是复的，而我们希望 ϕ 的解是实的. 虽然不可能严格操作，但总可以给 ϕ_0 加上一个小的虚部. 在这种方法中，ϕ 的虚部在暴胀期间衰减. 此后便可认为场和度规是实的了.

人们希望势是十分平坦的，以容许更大的暴胀 e 重数. H-T 对于各种标量势进行了数字计算，在这种框架中，e 重数的数目很大，结果很简单——对于 σ 的大部分范围，有很好的近似 $\phi(\sigma)\approx\phi_0$ 和 $b(\sigma)\approx H^{-1}\sin H\sigma$，式中 $H^2=8\pi GV(\phi_0)/3$. 在开和闭的两种情况下，欧氏作用量均为

$$I\approx-\frac{12\pi^2M_{pl}^4}{V(\phi_0)}.\qquad(5.2.8)$$

式中普朗克质量 $M_{pl}=(8\pi G)^{-1/2}$.

§5.3 Ω_0 的值

密度参数 Ω_0 的值由暴胀 e 重数确定. 在对应的面上，Ω 的值在开暴胀的情况下是零，在闭合的情况下是∞. 在暴胀期间，由于 $\Omega^{-1}-1\propto a^{-2}$，所以 Ω 趋近 1. 再加热之后，在辐射时期 $\Omega^{-1}-1\propto a^2$，在物质时期 $\Omega^{-1}-1\propto a$，所以 Ω 都偏离 1.

综上所述，且假设瞬间加热，我们得到

$$\Omega_0\approx\frac{1}{1\pm\mathscr{A}\exp[-2N(\phi_0)]},$$
$$\mathscr{A}\approx4\left(\frac{T_{\text{reheat}}}{T_{eq}}\right)^2\frac{T_{eq}}{T_0}. \tag{5.3.1}$$

式中正和负分别对于开放和闭合. 现在的温度是 T_0，在物质-辐射相等时为 T_{eq}. 我们假定 $T_{eq}>T_0$. 常数 $\mathscr{A}$ 依赖于再加热温度. 为了分别再加热到弱电和大统一标度，$\mathscr{A}$ 应在 10^{25}和 10^{50}之间.

在慢滚动期间，暴胀 e 重数由

$$N(\phi_0)\approx\int_{\phi_e}^{\phi_0}\mathrm{d}\phi\,\frac{V(\phi)}{V_{,\phi}(\phi)M_{pl}^2} \tag{5.3.2}$$

近似地给出，式中积分下限 ϕ_e 是刚离开慢滚动相时的 ϕ 值. 对于 2 次势，$N\sim(\phi_0/2M_{pl})^2$. 对应于很小的 ϕ_0，e 重数也很小. 在开的情况下 Ω_0 很小. 对于充分大的 N，Ω_0 接近于 1. 但是在$\frac{1}{2}\log\mathscr{A}\pm1$(即 30 ± 1 或者 60 ± 1)范围内的 N，为了再加热到弱电和大统一标度，我们有 $0.1<\Omega_0<0.9$. 这些都是 H-T 的数值计算结果.

式(5.3.1)包含 n 个未知参量，我们要选择其中一个保持固定. 爱因斯坦方程容许 3 个独立常数，如 H_0，Ω_0 和 T_0. 在物质-辐射相等时温度 T_{eq}是不独立的，因为它由现在的物质密度确定(由 Ω_0 和 H_0 确定)，而现在的辐射密度由 T_0 确定. 原则上 T_{eq}跟退耦时的温度一样由拉格朗日确定，但是不知道这一恰当的拉格朗日的具体形式. 于是只好由(5.3.1)确定 Ω_0，代入

$$T_{eq}=2.4\times10^4\Omega_0h^2T_0,$$

得到 $$\Omega_0 \approx 1 \mp \mathscr{A}' \exp[-2N(\phi_0)], \tag{5.3.3}$$

$$\mathscr{A}' \approx 4\left(\frac{T^2_{\text{reheat}}}{2.4\times 10^4 h^2 T_0^2}\right).$$

(对于开的情况，如果 $\Omega_0<(2.4\times10^4h^2)^{-1}$和 $T_0>T_{eq}$，应该将(5.3.1)中的 T_{eq}代之以 T_0.)由现在观测到的参数 T_0，H_0 和暴胀参数(即初始场 ϕ_0 和再加热温度 T_{reh})，代入式(5.3.3)，可以给出 Ω_0.

我们把前面的讨论小结一下.对任意的暴胀势，H-T 构造了描述开的和闭的暴胀宇宙的背景解簇.这些解解决了标准暴胀模型的困难，由指定哈勃体积中的初始数据便可获得均匀宇宙；还定义了用欧氏区域解析延拓获得的涨落谱.下面我们讨论这些解预言的扰动和 Ω_0 的几率分布.

§5.4 Ω_0 的估计

宇宙波函数在半经典近似下正比于 $\exp(-2I)$，由 Ω_0 值给出的宇宙原初扰动几率和这个波函数的平方成正比.按照我们选择的理论，再加热温度 T_{reh}由拉格朗日确定，而初始场 ϕ_0 仍然是一个自由参数.考虑一个从零开始增大的暴胀势.对于任意大的 ϕ_0，都存在闭的和开的解.所以至少对于适当平坦的势，原则上所有可能的 Ω_0 都是容许的.当然也存在 $\mathscr{A}e^{-2N}>1$ 的闭合解，其宇宙在加热到现在的温度 T_0 之前又重新坍缩.

欧氏作用量(5.2.8)是相当大的，在几率分布 $P(\Omega_0)$中很可能起决定性作用.人们偏爱的那些宇宙应该具有微小的初始场 ϕ_0——在开的情况下，它们在 T_0 应该是空的，而在闭的情况下比 T_0 早很多时就应重新坍缩.这些宇宙与我们所在的宇宙相当不同.似乎我们有理由抛弃这个理论.但是 H-T 认为，其他的暴胀模型在这个问题上都失败得更惨——他们根本没有关于这个问题的数学上的显式.比如，根据混沌暴胀模型，宇宙按指数规律膨胀的部分仍然在暴胀，我们生活的宇宙当然不是这样的.

H-T 提出，可以把人择条件自然地放人贝叶斯(Bayesian)框架，然后再计算导致星系形成的 Ω_0 的几率. 这样，我们有

$$P(\Omega_0|\mathrm{gal})\propto P(\mathrm{gal}|\Omega_0)P(\Omega_0)\propto \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_{gal}^2}-2I(\phi_0)\right]. \tag{5.4.1}$$

式中第一个因子表示对于给定的 Ω_0，我们附近星系质量区域经历过引力坍缩的几率;是在星系质量尺度上线性密度场的均方差;$\delta_c\approx1$，是发生引力坍缩要求的线性扰动幅的极限. 在(5.4.1)中，只包含主要的指数项，并假定最简单的暴胀模型预言的扰动是高斯扰动.

现在密度场中的均方根差等于哈勃半径处的扰动幅$\Delta(\phi_{gal})$乘以生长因子 $G(\Omega_0)$. 这个因子强烈地依赖于 Ω_0. 对于 $h=0.65$，我们有 $G(\Omega_0)\sim2.4\times10^4h^2\Omega_0^2\sim10^4\Omega_0^2$. 在慢滚动近似中，视界处的线性扰动幅为

$$\Delta^2(\phi)\equiv\frac{V^3}{M_{pl}^6V^2_{,\phi}}. \tag{5.4.2}$$

比较一下开暴胀和闭暴胀的延拓是很有趣的. 如果固定 ϕ_0，欧氏作用量和先前的几率是很相似的. 由(5.3.3)可见，对于固定的 H_0 和 T_0，一个具有密度参数 Ω_0 的开宇宙和一个具有密度参数$(2-\Omega_0)$的闭宇宙一样，很可能都是先验的. 当然，这两个宇宙很不相同. 第一个区别是，闭宇宙相当年轻. 对于 $h=0.65$，开宇宙年龄是 150 亿年，而闭宇宙只有 80 亿年;第二个(也是最重要的)区别是，开宇宙在空间上是无限的，而闭宇宙是有限的. 按照维林金和温伯格的观点，观测到的星系总数是决定因素，人们将推断，开暴胀是最可能的，因为它可以给出无限大的星系数. 霍金则采用贝叶斯统计的方法，他认为考虑在固定的 H_0 和 T_0 形成一个星系的几率比考虑星系总数要好[28].

在开的情况下，星系形成的几率在 Ω_0 之后有一个峰. 在很低的 Ω_0，生长因子是相当小的. 由(5.3.3)有

$$\frac{\mathrm{d}\Omega_0}{\mathrm{d}\phi_0}=\frac{2V}{M_{pl}^2V_{,\phi}}(1-\Omega_0), \tag{5.4.3}$$

由此可得 Ω_0 的最可能值

$$\Omega_0 \approx 0.01\left(\frac{\Delta^2(\phi_{gal})}{\Delta^2(\phi_0)}\right)^{1/5} \tag{5.4.4}$$

对于最简单的暴胀模型，后一因子接近 1，因此 $\Omega_0 \approx 0.01$. 这一结果很有趣，它接近原始核合成要求的重子密度，但与现在的观测比较则太低了.

根据以上分析，霍金认为，最可能的开宇宙应是这样的：其中物质-辐射相等发生在红移 100，相当于在退耦之后. 这时视界尺度 $\sim 2500h^{-1}M_{pc}$，并且对于纯重子宇宙，物质扰动能谱从这个尺度(降)到 Silk 阻尼尺度是不变的，数量级比较小.

在闭合的情况下，以前的几率分布支持温度达到 T_0 之前就重新坍缩的那些宇宙. 如果固定 T_0 和 H_0(即要求宇宙是膨胀的)，就要靠人择条件来产生 Ω_0 几率的峰，这个人择条件是，宇宙应该足够的老，容许生命的发展，比如 5 万亿年. 对于哈勃常数 $h=0.65$，上述条件要求 $\Omega_0<10$，后来几率的峰会在 $\Omega_0=10$ 处. 如果我们升高这个年龄到 10 万亿年，则最可能的 Ω_0 值将恰好大于 1. 在第一种情况下，闭宇宙比开宇宙存在的可能性更大，在第二种情况下则相反.

总之，霍金和他的学生们提出了一个关于暴胀宇宙的新框架，在这一框架中，对于一般暴胀势，允许密度参量 $\Omega_0\neq 1$，仍保持了曾经预言密度扰动的一个成功的暴胀模型. 这个框架的一般预言是一个很开的或者很闭的宇宙，若再含其他场和额外维度，则可能导致更可接受的接近 1 的 Ω_0 值.

6 Vilenkin 的量子宇宙学

确定宇宙的量子态有两种方法，第一种是由霍金和他的合作者们建立起来的. 他们用欧氏几何的路径积分来定义宇宙波函数；第二种是由维林金(Vilenkin)等人建立起来的. 这一方法认为，宇宙在 de Sitter 空间自发成核，然后沿暴胀线演化. 这个宇宙成核的数学描述与穿过一个势垒的量子隧道的计算十分相似. 这两个学派都说他们各自的波函数预言了暴胀，但这两个波函数无法直接进行比较，因为它们是对于不同的宇宙模型来计算的.

本章重点介绍维林金的隧道效应方法，并把它的宇宙学预言与霍金等人的方法对应的预言进行一些比较[51~59].

§6.1 基本体系

我们首先考虑由拉格朗日

$$\mathscr{L}=l_p^{-2}R+\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-V(\phi) \tag{6.1.1}$$

定义的模型，式中 $l_p=(16\pi G)^{1/2}$ 为普朗克长度，G 是牛顿常数，$\hbar=c=1$，R 是标曲率. 物质场由一个标量场描述. 这个模型的波函数定义在所有 3 维度规 $h_{ij}(\boldsymbol{x})$ 的空间和 3 维标量场 $\phi(\boldsymbol{x})$：

$$\psi(h_{ij}(\boldsymbol{x}),\ \phi(\boldsymbol{x})).$$

假设宇宙是闭合的，这个波函数满足方程

$$H^i(\boldsymbol{x})\psi=0, \tag{6.1.2}$$

$$H^0(\boldsymbol{x})\psi=0. \tag{6.1.3}$$

式中

$$H^i=2iD_j\frac{\delta}{\delta h_{ij}}-ih^{ij}\phi_{,j}\frac{\delta}{\delta\phi}, \tag{6.1.4}$$

$$H^0=-l_p^2\nabla^2+h^{1/2}\left[-l_p^{2(3)}R+\frac{1}{2}h^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j}+V(\phi)\right]=$$
$$-l_p^2(\nabla^2-U), \tag{6.1.5}$$
$$\nabla^2=G_{ijkl}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}\frac{\delta}{\delta 1h_{kl}}+r_{ij}\frac{\delta}{\delta h_{ij}}+\frac{1}{2}l_p^{-2}h^{-1/2}\frac{\delta^2}{\delta\phi^2}, \tag{6.1.6}$$
$h=\det(h_{ij})$，D_j 是关于度规 $h_{ij}(\boldsymbol{x})$的协变微分；G_{ijkl}为
$$G_{ijkl}=\frac{1}{2}h^{-1/2}(h_{ik}h_{jl}+h_{il}h_{jk}-h_{ij}h_{kl}).$$
式(6.1.6)第二项的系数 r_{ij}依赖于第一项因子次序的选择.正确的选择目前还不知道，也可能不存在，因为以爱因斯坦引力理论为基础的自洽的量子引力理论目前还没有完成.但是，利用(6.1.2)～(6.1.6)还是可以计算出半经典情况下的波函数 Ψ 的.因子次序不确定性以及高阶修正项和重整化问题仅在普朗克曲率 $R\gtrsim l_p^{-2}$ 时才很重要.我们将看到，在一些宇宙模型中，对于宇宙的整个历史，均可以做半经典的处理.

式(6.1.2)和(6.1.4)意味着 Ψ 与 3 维空间的坐标选择无关.这个事实通常表示为 Ψ 定义在所有 3 维几何空间和物质场构形(超空间)，在它们中，$\{h_{ij}(\boldsymbol{x}),\phi(\boldsymbol{x})\}$(只用坐标变换来区分)的所有组合都是等同的.

采用(6.1.5)和(6.1.6)中的记法，我们可以把 W-D 方程(6.1.3)写为与克莱因-高登方程类似的形式：
$$(\nabla^2-U)\psi=0. \tag{6.1.7}$$
像克莱因-高登的情况一样，我们可以构造一个守恒流
$$J=\frac{i}{2}(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*), \tag{6.1.8}$$
$$\nabla\cdot J=0. \tag{6.1.9}$$
式中的标积所用的度规是式(6.1.6)所定义的.这个流和超空间的几率流是一致的，但是和克莱因-高登情况一样，也将遇到负几率的问题.

§6.2 边界条件

在隧道效应方案中，宇宙的形成是非奇异的事件. 半经典地，势垒下的传播对应于虚时间里的演化，因此，量子隧道由一个欧氏场方程的规则解(一个瞬子)描述. 这个解在成核点与洛仑兹解相符合. 即使宇宙以一种非奇异的方式开始，在未来也会出现奇异性(例如黑洞或大挤压).

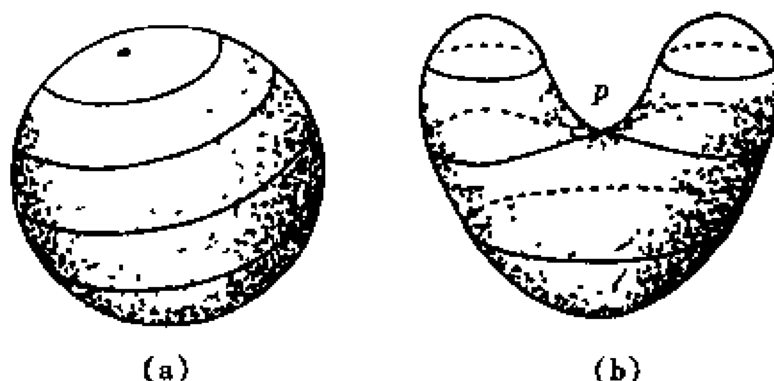


图 6-8

超空间的边界可以看作由奇异性构形组成，这些构形有一些点或区域具有无限大的 3 维曲率或无限大的 ϕ 或者无限大的 $(\partial_i\phi)^2$. 和无限大 3 维体积的构形. 需要指出的是，3 维几何奇异不一定表示 4 维几何奇异. 例如，像图中给出的那样切割一个 4 维球，得到一个没有半径的、在两极有无限大曲率的 3 维球，虽然这个 4 维几何是完全规则的. 更一般地，如果我们把 3 维度写为

$$\tilde{h}_{ij}=\Omega^2\tilde{h}_{ij},$$

当 $\Omega\rightarrow 0$，而 $\tilde{h}_{ij}$，ϕ 非奇异，这个构形也不一定是 4 维奇异的. 另一个例子如图中(b)所示，3 维空间在 P 点有奇异性. 这个构形对有拓扑改变的隧道跃迁是很重要的. 把所有的由切割规则 4 维几何产生的可能奇异性进行分类是很有趣的. 由于篇幅所限，这里不讨论，我们只简单地假定这是可以做到的，这样，我们可以把超空间分成两部分. 第一部分包括 3 维几何，这 3 维几何仅有切割规则 4 维几何产生的奇异性，我们称为超空间的非奇异性边

界. 第二部分包括边界的其余部分，称为超空间的奇异性边界. 波函数 ψ 的隧道边界条件可以表述为：

$$\text{在超空间的奇异边界}，\psi\text{仅包括出射模式} \tag{6.2.1}$$

这个边界条件与费曼传播子的因果边界条件形式上类似.

入射、出射模式的定义与正、负频率模式的定义类似，方向指向起"时间"方向作用的边界. 这些模式在一般情况下能否精确定义还不是很清楚，但在半经典表述中，这样的定义是可能的. 半经典波函数可以写为

$$\psi = \sum_n C_n e^{S_n}. \tag{6.2.2}$$

式中 S_n 是迅速变化的波函数，它满足超空间的哈米顿-雅可比方程

$$(\nabla S_n)^2 + U = 0. \tag{6.2.3}$$

(6.2.2)式第 n 项的流为

$$J_n = -|C_n|^2 \nabla S_n. \tag{6.2.4}$$

边界条件(6.2.1)要求矢量 $-\nabla S_n$ 在边界处由超空间向外. 每一个函数 S_n 都定义了一个超空间中的经典路径. 边界条件(6.2.1)还表明，这些路径可以在超空间的奇异性边界处终结，但不能从这里出发.

除了(6.2.1)以外，我们还加一个规则性条件：

$$|\psi| < \infty. \tag{6.2.5}$$

哈特-霍金的理论认为，对于一个确定的 3 维构形，波函数由一个路径积分定义：

$$\psi_H = \int [\mathrm{d}g_{\mu\nu}][\mathrm{d}\phi]\exp[-I_E(g_{\mu\nu}, \phi)]. \tag{6.2.6}$$

致密 4 维几何可以看作位于一点"无"(nothing)和一有限 3 维几何之间. 这样，(6.2.6)给出的理论与"从无到有"的量子隧道效应相似. 这个波函数 ψ_H 与由(6.2.1)定义的波函数 ψ_T 很不相同. 其中一个重要区别是 ψ_H 是实的，因此(6.1.8)式恒为零；而(6.2.1)定义的波函数 ψ_T 则必定是复的.

§ 6.3 小超空间波函数

1. de Sitter 空间

我们首先考虑一个简单的小超空间模型，

$$I = \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g}\,(l_p^{-2} R - \rho_v). \tag{6.3.1}$$

式中 ρ_v 是恒定真空能，假设宇宙是闭合、均匀和各向同性的：

$$\mathrm{d}s^2 = \sigma^2 [N^2(t)\mathrm{d}t^2 - a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2]. \tag{6.3.2}$$

式中 $N(t)$为任意的时移(Lapse)函数，$\mathrm{d}\Omega_3^2$ 为单位 3 维球上的度规，$\sigma^2 = 2G/3\pi$. 这个模型只有一个自由度，标度因子 a，因此 $\psi = \psi(a)$. 当 $N(t)=1$ 时，这个模型的经典解为 de Sitter 空间，

$$a(t) = H^{-1}\cosh(Ht). \tag{6.3.3}$$

式中
$$H = \frac{4}{3} G \rho_v^{1/2}. \tag{6.3.4}$$

关于 $\psi(a)$的 W-D 方程是

$$\left[a^{-p}\frac{\partial}{\partial a}a^{p}\frac{\partial}{\partial a} - U(a)\right]\psi = 0, \tag{6.3.5}$$

参数 p 表示因子次序的不确定性，

$$U(a) = a^2(1 - H^2 a^2). \tag{6.3.6}$$

方程(6.3.5)和坐标为 $a(t)$的单粒子一维薛定谔方程形式相同. 粒子能量为零，势为 $U(a)$. 经典区域为 $U(a)\leqslant 0$ 或 $a \geqslant H^{-1}$. 在这个区域中，方程(6.3.5)的 WKB 解(忽略指数前的因子)为

$$\psi_{\pm}^{(1)}(a) = \exp\left[\pm i\int_{H^{-1}}^{a} p(a')\mathrm{d}a' \mp \frac{i\pi}{4}\right], \tag{6.3.7}$$

在区域 $a < H^{-1}$，即势垒下，解为

$$\psi_{\pm}^{(2)}(a) = \exp\left[\pm \int_{a}^{H^{-1}} |p(a')|\mathrm{d}a'\right]. \tag{6.3.8}$$

式中 $p(a) \equiv [-U(a)]^{1/2}$. $\psi_{+}^{(1)}$描述一个正在收缩的宇宙，而 $\psi_{-}^{(1)}$描述一个正在膨胀的宇宙. 穿过势垒的隧道对应于 $a > H^{-1}$的出射波

$$\psi_T(a > H^{-1}) = \psi_{-}^{(1)}(a). \tag{6.3.9}$$

由 WKB 的连接公式可以得到形式为

$$\psi_T(a<H^{-1})=\psi_-^{(2)}(a)-\frac{i}{2}\psi^{(2)}(a) \tag{6.3.10}$$

的势垒下波函数. 不考虑 $a=H^{-1}$ 的邻近区域，(6.3.10)的第二项可以忽略. 因此 $\psi_T\approx\psi_-^{(2)}(a)$. 波函数按指数规律增大，直到 $a=0$. "隧道幅"与下式成正比：

$$\psi_T(H^{-1})/\psi_T(0)=\exp\left[-\int_0^{H^{-1}}|p(a')|\mathrm{d}a'\right]=\exp\left[-\frac{3}{16G^2\rho_v}\right]. \tag{6.3.11}$$

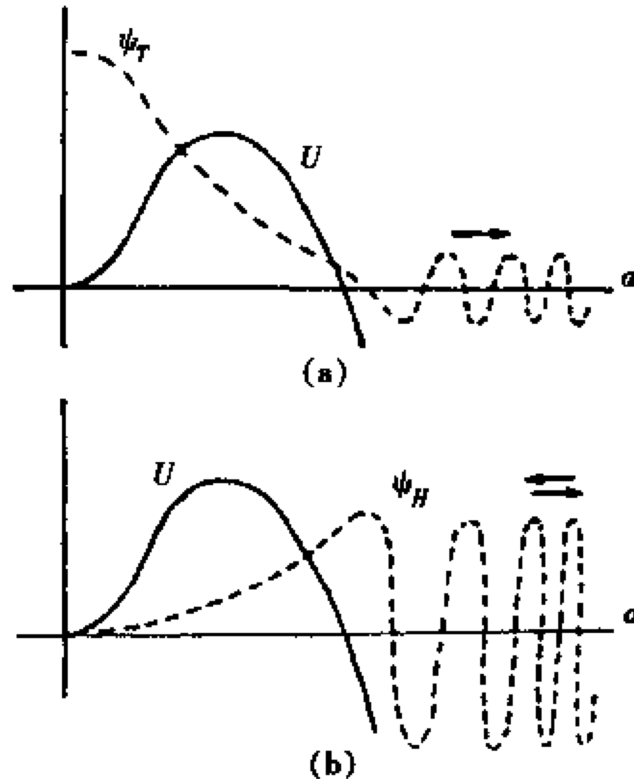


图 6-9

由哈特-霍金理论可以得到

$$\psi_H(a<H^{-1})=\psi_-^{(2)}(a), \tag{6.3.12}$$

$$\psi_H(a>H^{-1})=\psi_-^{(1)}(a)+\psi_-^{(1)}(a). \tag{6.3.13}$$

这个波函数描述了一个收缩的和再次膨胀的宇宙. 势垒下波函数 $\psi_H(a)$按指数规律减小(图 6-9 中(b)).

2. 标量场模型

现在我们考虑一个更真实的模型，由作用量

$$I=\int \mathrm{d}^4x\ \sqrt{-g}\left[l_p^{-2}R+\frac{1}{2}(\partial_\mu\tilde{\phi})^2-V(\tilde{\phi})\right] \quad (6.3.14)$$

确定. 这里假设标量场是均匀、各向同性的，度规为(6.3.2)式. 引入量

$$\phi=(4\pi G/3)^{1/2}\tilde{\phi},\ V=(4G/3)^2\tilde{V}. \quad (6.3.15)$$

W-D 方程具有形式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{p}{a}\frac{\partial}{\partial a}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}-U(a,\phi)\right]\psi=0. \quad (6.3.16)$$

式中 $\quad U(a,\phi)=a^6[1-a^2V(\phi)]. \quad (6.3.17)$

这个模型的小超空间是一个 2 维流形，$0<a<\infty$，$-\infty<\phi<\infty$. 它的非奇异性边界是线 $a=0$，$|\phi|<\infty$. 在奇异边界，两个变量中至少有一个是无限大. 引入一新变量 $\alpha=\ln a$，我们通过一个共形图可以表示出小超空间和它的边界(如图 6-10). 这个图与 α 为时间坐标、ϕ 为空间坐标的闵可夫斯基空间图相同. 非奇异性边界由过去类时无限大处的单(奇)点 i^- 表示.

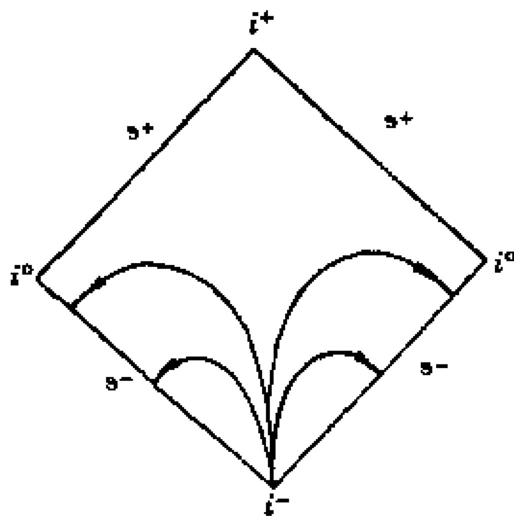


图 6-10

在 WKB 近似下，波函数表示为(6.2.2)的形式，哈米顿-雅可比方程(6.2.3)取

$$\left[\frac{\partial S_n}{\partial a}\right]^2-\left[\frac{\partial S_n}{\partial\phi}\right]^2+U=0 \quad (6.3.18)$$

的形式. 当 a 很小($a\rightarrow-\infty$)时，势 $U(a,\phi)$ 趋于零，ψ 是形如

$$\psi_k=\mathrm{e}^{ik(a\mp\phi)} \quad (6.3.19)$$

的项的迭加. $k>0$ 的项描述向奇点坍缩的宇宙. 相应的无质量自由标量场的爱因斯坦方程的经典解为

$$a\propto(t_0-t)^{1/3},\ |\phi|\approx\frac{1}{3}\ln(t_0-t),$$

t_0 是任意的. 在共形图上，表示这些解的路径在过去零无限大处与边界相交，$k<0$ 的项描述由奇点向外膨胀的宇宙. 隧道边界条件(6.2.1)要求现在的模型是正 k 的. 在非奇异性边界 ι^-，波函数接近一个常数(对应于 $k=0$ 的模型)：

$$\psi(a=0,\ \phi)=\text{const}. \tag{6.3.20}$$

我们对 ι^- 的邻域内 ψ 的行为感兴趣. 这个区域对应于宇宙的极早期(成核和膨胀的开始)，在这个时期量子宇宙效应才是重要的.

假设 $V(\phi)$ 是 ϕ 的缓变函数：

$$|V^{-1}\mathrm{d}V/\mathrm{d}\phi|\ll 1. \tag{6.3.21}$$

还假设 $V(\phi)$ 远小于普朗克尺度：

$$|V|\ll 1. \tag{6.3.22}$$

当这个条件不满足时，半经典近似就不能使用. 此时量子引力的高阶项变得很重要. 式(6.3.20)和(6.3.21)表明，对于足够小的 a，波函数 ψ 也是 ϕ 的缓变函数. 因此，我们可以忽略对 ϕ 的导数. (6.3.16)变为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}+\frac{p}{a}\frac{\partial}{\partial a}-U(a,\ \phi)\right]\psi=0. \tag{6.3.23}$$

现在 ϕ 仅仅是一个参数，问题归结为前面讨论过的一维小超空间模型. 这个小超空间 $(a,\ \phi)$ 可以分为 $U>0$ 和 $U<0$ 两个区域. 只要式(6.3.23)是正确的，这种分法就是把小超空间分为经典禁区(ψ 呈指数形式)和经典允许区(ψ 呈振荡形式). 这两个区域之间的区域是 $U=0$，或

$$a^2=1/V(\phi). \tag{6.3.24}$$

为了找到(6.3.23)的解，我们注意到(Ⅰ)参数 p 不影响半经典几率，(Ⅱ)取 $p=-1$，(6.3.23)可以精确地解出，引入一个新的变量

$$z=-(2V)^{-2/3}(1-a^2V), \tag{6.3.25}$$

取 $p=-1$，我们有

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+z\right]\psi=0.$$

这个方程的一般解是 Airy 函数 $\mathrm{Ai}(-z)$ 和 $\mathrm{Bi}(-z)$ 的线性组合.

Airy 函数的系数是 ϕ 的任意函数. 为了读者的方便，这里我们给出大 z 值($z\to+\infty$)Airy 函数的渐近形式：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Ai}(z)\sim\frac{1}{2\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\mathrm{e}^{-\zeta},\\
&\mathrm{Bi}(z)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\mathrm{e}^{\zeta},\\
&\mathrm{Ai}(-z)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\sin\left[\zeta+\frac{\pi}{4}\right],\\
&\mathrm{Bi}(-z)\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}}z^{-1/4}\cos\left[\zeta+\frac{\pi}{4}\right].
\end{aligned}
\tag{6.3.26}
$$

式中 $\zeta=\frac{2}{3}z^{3/2}$.

由出射波只应出现在经典允许区域(对于 $a^2>V^{-1}$，$i\psi^{-1}\partial\psi/\partial a>0$)的要求，维林金找到了隧道波函数 ψ_T. 由式(6.3.26)和条件(6.3.21)得到

$$
\psi_T=\frac{\mathrm{Ai}(-z)+i\mathrm{Bi}(-z)}{\mathrm{Ai}(-z_0)+i\mathrm{Bi}(-z_0)}.
\tag{6.3.27}
$$

式中 $z_0=z(a=0)=-(2V)^{-2/3}$. 当 $V(\phi)$为负时，z 和 z_0 是复的. 令

$$
\begin{aligned}
&V(\phi)=\mathrm{e}^{-i\pi}|V(\phi)|,\quad -z=\mathrm{e}^{2\pi i/3}|z|,\\
&-z_0=\mathrm{e}^{2\pi i/3}|z_0|.
\end{aligned}
$$

我们得到与(6.3.27)式[在 $V(\phi)=+0$]相对应的解析延拓.

采用关系式

$$
\mathrm{Ai}(\mathrm{e}^{2\pi i/3}z)+i\mathrm{Bi}(\mathrm{e}^{2\pi i/3}z)=2\mathrm{e}^{\pi i/3}\mathrm{Ai}(z),
\tag{6.3.28}
$$

可以把 $V(\phi)<0$ 时的波函数写为

$$
\psi_T=\frac{\mathrm{Ai}(|z|)}{\mathrm{Ai}(|z_0|)}[V(\phi)<0].
\tag{6.3.29}
$$

我们注意到，在这个区域内波函数是实的.

在经典容许区域，$a^2V>1$，且不太接近势垒时，z 取大值且为正，z_0 取大值且为负[见(6.3.22)]. 于是采用渐近式(6.3.26)得到

$$
\psi_T=\mathrm{e}^{i\pi/4}(a^2V-1)^{-1/4}\exp\left[-\frac{1+i(a^2V-1)^{3/2}}{3V}\right]
$$

$$(a^2V>1).\tag{6.3.30}$$

类似地，在经典禁区，我们找到

$$\psi_T=(1-a^2V)^{-1/4}\exp\left[\frac{(1-a^2V)^{3/2}-1}{3V}\right]$$

$$(a^2V<1).\tag{6.3.31}$$

应该指出，最后一个表达式在 $V=0$ 是非奇异的，对于 $V(\phi)$ 为正和为负两种情况都适用. 采用式(6.3.30)和(6.3.31)，很容易验证，如果满足条件

$$\left|\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\phi}\right|\ll\max\{|V|,\ 1/a^2\},\tag{6.3.32}$$

则在(6.3.16)中略去对 ϕ 的导数项是恰当的. 这是关于 $V(\phi)$ 的条件的最终形式，它代替形式(6.3.21).

现在我们来寻找对于这一模型的 H-H 波函数 ψ_H[54]. 它在经典禁区应该是 a 的指数函数. 由(6.3.20)，我们有

$$\psi_H=\frac{\mathrm{Ai}(-z)}{\mathrm{Ai}(-z_0)}.\tag{6.3.33}$$

采用渐近式(6.3.26)，得到经典容许区内 ψ_H 的 WKB 近似式

$$\psi_H=2(a^2V-1)^{-1/4}\exp\left[\frac{1}{3V}\right]\cos\left[\frac{(a^2V-1)^{3/2}}{3V}-\frac{\pi}{4}\right]$$

$$(a^2V>1),\tag{6.3.34}$$

在禁区有

$$\psi_H=(1-a^2V)^{-1/4}\exp\left[\frac{1-(1-a^2V)^{3/2}}{3V}\right]$$

$$(a^2V<1).\tag{6.3.35}$$

有趣的是，由(6.3.33)给出的 ψ_H 可以由(6.3.27)的 ψ_T 经过解析延拓得到. 这由式(6.3.28)可以看出. 如果把 a 代之以 $e^{i\pi/2}a$，$V(\phi)$ 代之以 $e^{-i\pi}V(\phi)$，则 $z\to e^{2\pi i/3}z$，$z_0\to e^{2\pi i/3}z_0$，ψ_T 就变成了 ψ_H：

$$\psi_H=\psi_T(V\to e^{-i\pi}V,\ a\to e^{i\pi/2}a).\tag{6.3.36}$$

这导致一种有趣的可能性：在一般情况下，ψ_T 和 ψ_H 也应该可以通过一个解析延拓联系起来. 我们建议把上述变换推广为

$$h_{ij}\to e^{i\pi}h_{ij},\ V(\phi)\to e^{-i\pi}V(\phi).\tag{6.3.37}$$

很容易证明，这个变换不改变 W-D 方程(6.1.7).

§6.4 ψ_T 和 ψ_H 的宇宙学预言

在宇宙成核之后不久，宇宙的演化已成为经典的了，波函数(6.3.30)和(6.3.34)描述了全部经典宇宙.量子宇宙学的任务是确定宇宙初态的几率分布.在我们的简单的模型中，初态由标量场 ϕ 表征[a 的初始值由 $a^2=1/V(\phi)$得到，$\dot{a}$和 $\dot{\phi}$的初始值均为零].

在维林金的量子隧道方案中，由守恒方程(6.1.8)可以得到 ϕ 的几率分布.在小超空间模型(6.3.16)中，物质流有两部分：

$$j^a=\frac{i}{2}a^p(\psi^*\partial_a\psi-\psi\partial_a\psi^*), \tag{6.4.1}$$

$$j^\phi=-\frac{i}{2}a^{p-2}(\psi^*\partial_\phi\psi-\psi\partial_\phi\psi^*), \tag{6.4.2}$$

连续性方程为

$$\partial_a j^a+\partial_\phi j^\phi=0. \tag{6.4.3}$$

j^a 可以看作 a 处 ϕ 的几率密度.关系式

$$\partial_a\int j^a\mathrm{d}\phi=0 \tag{6.4.4}$$

表明几率守恒.由波函数(6.3.30)给出的经典解仅包含膨胀宇宙：

$$a\approx V^{-1/2}\cosh(V^{1/2}t),\ \phi\approx\mathrm{const}, \tag{6.4.5}$$

而且这里不存在负几率问题(换句话说，标度因子 a 对于上述模型是一个好的时间变量).

几率密度 $\rho(a,\phi)$是这样定义的：当标度因子为 a 时，$\rho(a,\phi)$ $\mathrm{d}\phi$ 表示标量场处于 ϕ 到 $\phi+\mathrm{d}\phi$ 间的几率.把(6.3.30)代入(6.4.1)，且令 $p=-1$，我们可以得到对应于 ψ_T 的 $\rho(a,\phi)$：

$$\rho_T(a,\phi)=C_T\exp\left[-\frac{2}{3V(\phi)}\right]. \tag{6.4.6}$$

由上式可见，ρ_T 与 a 无关.这是因为 $V(\phi)$是缓变函数，于是在经典轨道上 ϕ 近似为常数.式(6.4.6)仅适用于 $V(\phi)>0$ 的区域.当 $V(\phi)<0$ 时，ψ_T 是实的，且 $\rho_T=0$.归一化常数 C_T 由式

$$C_T^{-1} = \int_{[V(\phi)>0]} d\phi \exp\left[-\frac{2}{3V(\phi)}\right] \tag{6.4.7}$$

确定. 当 $\phi \to \pm\infty$ 时, $V(\phi)<0$, 或者 $V(\phi)$ 比 $\frac{2}{3}\ln|\phi|$ 更快地趋近于零, 则此积分是收敛的. 如果 ϕ 是定义在有限区域 $0<\phi<\phi_0$ 内的周期变量, 这个积分也是收敛的. 如果这些条件都不满足, (6.4.6)就是不可归一化的. 其他的方案也应该要求(6.4.7)是收敛的, 并把它作为粒子物理模型的一个约束条件来考虑.

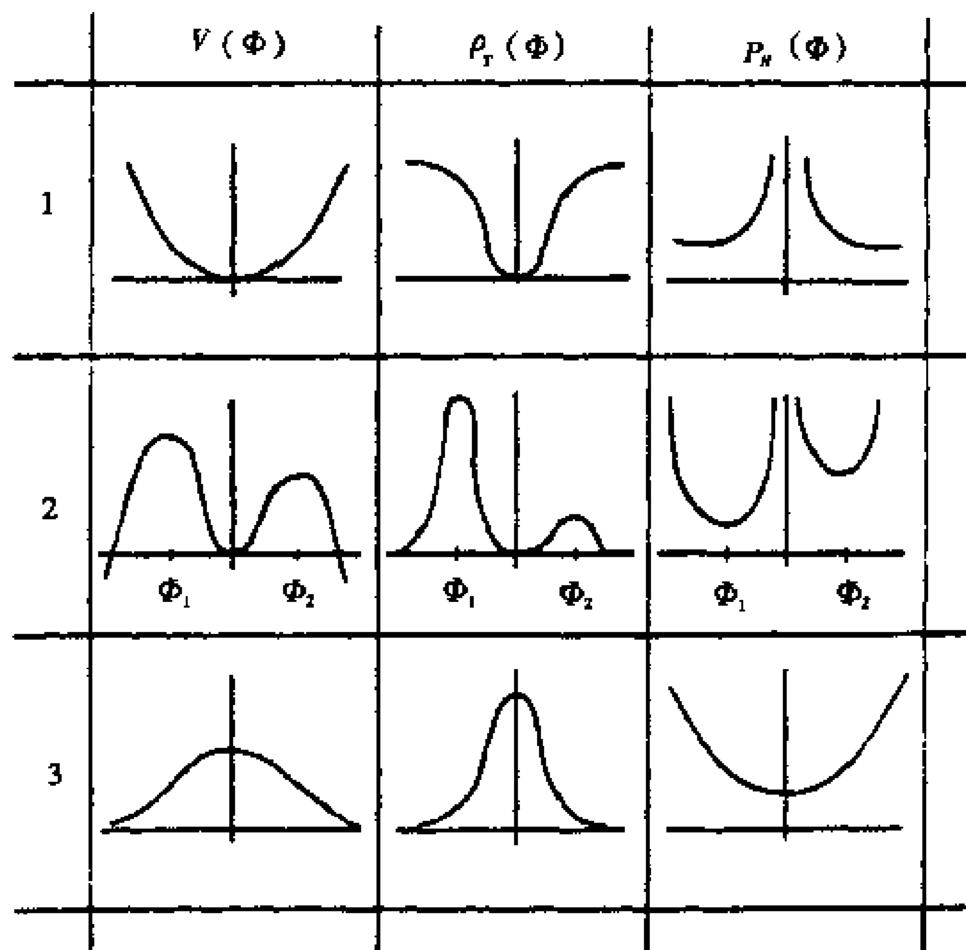


图 6-11

图 6-11 中给出了不同类型 $V(\phi)$ 的几率分布 $\rho_T(\phi)$. 在第一个例子中, 当 $|\phi|\to\infty$ 时, $V(\phi)\to\infty$, $\rho_T(\phi)\to$const. $\rho_T(\phi)$ 的最大值对应于势 $V(\phi)>1$. 虽然半经典方法在这个区域并不可靠, 但是 $V(\phi)<1$ 时 ρ_T 的行为暗示了在这类模型中 $V(\phi)>1$ 时宇宙极有可能成核. 如果在大 ϕ 处势的增大足够缓慢, 则这个初态就会导致混

沌暴胀. 在第二个例子中，势 $V(\phi)$没有下限. 我们认为，只要在 $\phi=0$ 时亚稳态的寿命比目前的宇宙年龄还要大，$V(\phi)$没有下限就不成问题. $V(\phi)$最大时宇宙成核几率也最大. 这种初始条件已纳入新的暴胀模型之中. 例 3 表明，在大$|\phi|$值，$V(\phi)\to 0$ 时，可以得到一个类似的几率分布. 如果 $\max[V(\phi)]\ll 1$，则宇宙的初始密度就远小于普朗克值，便可以用半经典的方法来处理宇宙的全部演化过程.

§6.5 扰动超空间

本节讨论小超空间的线性扰动. 这个扰动理论和 de Sitter 空间的量子场论是等效的，并且宇宙波函数的边界条件确定了引力场和标量场的量子态. 霍金等人用 H-H 方法讨论了这个问题，得到结论：量子的初态是 de Sitter 恒定真空态. 本节用维林金的量子隧道方法得到同样的结果.

假设标量场的势有上限. 由小超空间模型的分析可知，隧道波函数 ψ_T 在最大 $V(\phi)$值附近达到峰值. 在最大值附近有

$$V(\phi)=H^2-\mu^2\phi^2+O(\phi^3). \tag{6.5.1}$$

假设 $\mu\ll H$，以使最大值对于暴胀是足够平坦的. 在 $\phi=0$ 附近标量场的小扰动可以用球谐函数展开：

$$\phi(x) = (2\pi^2)^{1/2}\sum_{n\ l,m} f_{nlm}(t)Q_{lm}^n(x'). \tag{6.5.2}$$

式中 $n=1, 2, 3, \cdots, l=0, 1, \cdots, n-1; m=-l, -l+1, \cdots, l$，因子$(2\pi^2)^{1/2}$是为了 Q_{lm}^n能归一化. 为了简化，指标$\{n, l, m\}$就用 n 表示. 通过选择一个适当的规范，引力扰动形式上等效于一对最小耦合无质量标量场，这对于只考虑这个标量场来说是足够了.

考虑这标量场的所有模式，波函数 ψ 就变成了一个有无限多个变量的波函数 $\psi(a, f_1, f_2, \cdots)$，W-D 方程具有形式

$$\left\{a^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}+pa\frac{\partial}{\partial a}-a^4(1-H^2a^2)-\right.$$

$$\sum_n \left[\frac{\partial^2}{\partial f_n^2} - (n^2-1)a^4 f_n^2 + \mu^2 a^6 f_n^2\right]\Bigg\}\psi = 0 . \qquad (6.5.3)$$

把波函数表述为

$$\psi = e^{iS}. \qquad (6.5.4)$$

式中 $$S(a, \{f_n\}) = S_0(a) + \frac{1}{2}\sum_n S_n(a) f_n^2 + O(f_n^3), \qquad (6.5.5)$$

把标度因子 a 看作半经典变量，并忽略 f_n 中 4 阶以上的高阶项. 这样，可以得到关于 S_0 和 S_n 的方程：

$$S'^2_0 + a^2(1-H^2a^2)=0, \qquad (6.5.6)$$

$$a^2 S'_0 S'_n - S_n^2 - (n^2-1)a^4 + \mu^2 a^6 = 0. \qquad (6.5.7)$$

式中小撇代表对 a 的导数. 式(6.5.6)是描述 de Sitter 空间一维小超空间模型的半经典方程. 在经典容许区域，$a > H^{-1}$，它的解为

$$S_0(a) = -\frac{1}{3H^2}(H^2a^2-1)^{3/2}. \qquad (6.5.8)$$

式中选择的符号对应于一个膨胀的宇宙(出射波).

由于 $\mu \ll H^{-1}$，且量子隧道问题的特征尺度为 $a \sim H^{-1}$，所以与 $(n^2-1)a^4$ 比较起来，(6.5.7)式中的 $\mu^2 a^6$ 项可以忽略. 唯一例外的情况是 $n=1$ 的均匀模式. 均匀模式 f_1 的波函数已经在 2 维小超空间模型中研究过了. 把 $V(\phi)=H^2-\mu^2 f_1^2$ 代入(6.3.30)，并按 f_1^2 的幂展开，可以得到 $S_1(a)$：

$$S_1(a) = \frac{2i\mu^2}{3H^4} + \frac{\mu^2}{3H^4}(H^2a^2-1)^{1/2}(H^2a^2+2). \qquad (6.5.9)$$

由上式中第一项，使得波函数 ψ_T 是 f_1 的按指数规律减小的函数. 它集中在 $f_1=0$ 附近宽度为 $\Delta f_1 \sim H^2/\mu$ 的管中. 下面我们讨论 $n>1$ 的非均匀模式，并忽略(6.5.7)中的最后一项.

这里，我们可以通过关系式

$$S'_0 = -\frac{a\,\dot{a}}{N(a)},$$

引入时间变量 t，其中 $\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$，$N(a)$为时移函数. 按照 Wada 的方

法，我们选择 $N(a)=a$，对应于“共形时间”，此时有

$$a=(H\cos t)^{-1}. \tag{6.5.10}$$

我们用 t 代替 a，看作一个独立变量.

式(6.5.7)是一个 Riccatti 方程，可以用代换

$$S_n(t)=a^2\dot{\nu}_n/\nu_n \tag{6.5.11}$$

线性化，式中 a 满足(6.5.10)式. 所得到的 ν_n 的方程为

$$\ddot{\nu}_n+2(\dot{a}/a)\dot{\nu}_n+(n^2-1)\nu_n=0. \tag{6.5.12}$$

它与 de Sitter 空间中标量模式函数的方程是一致的. 因此，$\nu_n(t)$ 起了标量场 ϕ 模式函数的作用. 方程(6.5.12)的一般解为

$$\nu_n(t)=\nu_n^{(1)}(-i\tan t)+B_n\nu_n^{(2)}(-i\tan t). \tag{6.5.13}$$

式中

$$\nu_n^{(1)}(y)=(y-1)^{(n-1)/2}(y+1)^{-(n+1)/2}(1+y/n), \tag{6.5.14a}$$

$$\nu_n^{(2)}(y)=(y+1)^{(n-1)/2}(y-1)^{-(n+1)/2}(1-y/n), \tag{6.5.14b}$$

由于在(6.5.11)中 $\nu_n(t)$ 互相抵消，所以它们的归一化问题并不重要. 系数 B_n 的选择决定场 ϕ 的量子态.

在经典禁区，$a<H^{-1}$，未受扰动的波函数是与

$$S_0(a)=\pm\frac{i}{3}(1-H^2a^2)^{3/2} \tag{6.5.15}$$

对应的两项的迭加[见(6.3.10)]. 在(6.5.13)和(6.5.14)中，把 t 换成 $\pm iu$，可以得到相应的模式函数. 波函数的三个分支分别是：按指数规律增大的 ψ_{I}，按指数规律减小的 ψ_{II} 和出射波 ψ_{III}，如图 6-12 所示. 在成核点($a=H^{-1}$)附近，ψ_{I} 和 ψ_{II} 有可以比较的量级，而 ψ_{II} 控制了禁区的大部分.

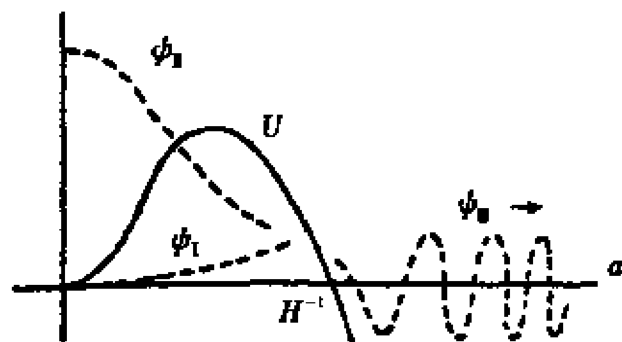


图 6-12

系数 B_n 的选择，应该对于所有的 a 值都有

$$\mathrm{Im}S_n(a)\geqslant 0. \tag{6.5.16}$$

否则 ψ 将是 f_n 的按指数规律增大的函数，限制条件(6.2.5)将被破坏. 采用模式函数的表显形式(6.5.14)很容易看出，当 $|B_n|<1$ 时，ψ_T 和 ψ_H 满足条件(6.5.16)，而对 ψ_L 唯一可能的选择是 $B_n=0$.

为了找到波函数不同分支中 B_n 之间的关系，我们考虑成核点 $a=H^{-1}$ 的邻近区域. 这里半经典近似方法不适用. 这个问题需要细致分析，在量子隧道方法和 H-H 方法中都会遇到. 我们假设波函数的三个分支是互为解析延拓的，使 B_n 在 ψ_L，ψ_T 和 ψ_H 中具有相同的值. 这样，在三个分支中都有 $B_n=0$.

对于引力子来说，模式函数(6.5.14a)的选择对应于 de Sitter 恒定真空态. 具有势(6.5.1)的标量场是不稳定的，不具有 de Sitter 恒定态. 对于最小耦合无质量标量场也是一样的. 有质量标量场具有 de Sitter 恒定态，相应的模式波函数在零质量极限时又回到函数(6.5.14a). 在这种情况下，各量子宇宙模型预言的量子态都与这里得到的 de Sitter 真空态非常接近. 在量子隧道方法中预言的量子态与 H-H 方法得到的量子态也是相似的，它们仅仅在均匀模型中有一些不同.

人们常说，闭的宇宙必然要重新收缩. 如果真是这样，那么 ψ_T 和 ψ_H 描述的所有暴胀宇宙都将热化，并在有限长时间内到达一个大挤压状态. 但是如果考虑到标量场的量子涨落，这个结论就会改变. 维林金认为，宇宙有一个开端，但没有终点. 我们生活在一个 10^{10} 年以前就已热化的区域，但是宇宙本身可能比这还要古老.

§6.6　开暴胀和人择原理

多年来，人们对开宇宙不太感兴趣，因为暴胀预言的是一个平直的宇宙. 近几年情况有了变化. 因为观测结果倾向于低的物质密度值，所以人们相继提出了一些开暴胀的宇宙模型，与观测结果相符合. 在第 5 章中，我们介绍了 Turok-Hawking(1998)的

工作，下面我们讨论维林金(1998)关于开暴胀方面的工作.

维林金认为，人们对人择原理怀有偏见(坏印象)是不应该的. 因为如果我们真的生活在开宇宙中，不用人择原理就很难解释 Ω 的观测值. 同样道理也适用于具有非零宇宙常数的宇宙.

1. 开暴胀

(1) 单场模型

开暴胀的最简单模型是考虑一个标量场 ϕ 和具有相当特殊形式的势 $V(\phi)$. 这个势有一个亚稳的假真空，经过一个势垒和一段平坦的慢滚动区域到真真空. 暴胀的第一阶段发生在场 ϕ 陷入假真空时. ϕ 不时地隧道贯穿势垒而形成泡. 接着 ϕ 缓慢地滚向势的真最小，导致泡内暴胀的第二阶段. 泡的成核过程由一个紧致的 $O(4)$ 不变的瞬子描述，这瞬子是欧氏场方程的一个解. 成核几率为 $P\sim e^{-I_E}$，式中 I_E 是瞬子的欧氏作用量. 成核后泡的演化由把瞬子解析延拓到洛仑兹号差而得到. 可以证明，泡的内部与开的 Robertson-Walker 宇宙同构. 泡的均匀和各向同性由瞬子的高度对称性保证. 因此，视界问题的解决不是因为大量的暴胀，而是因为泡成核过程的对称性.

对于泡之间的空间，扩散速率相当高，且泡之间的碰撞非常少. 因此，泡可视为孤立的开宇宙. 所有这些宇宙都具有相同的 Ω 值，而此值由慢滚动暴胀的 e 重数 N 决定. 对于观测到的 Ω 值，应有 $N\approx 60$.

这个最简单的模型证明，暴胀确实可以与低密度宇宙相符合，但需要大量的微调. 势 $V(\phi)$ 要有一个尖锐的垒和平坦的慢滚动区域相连，而这是一种相当不自然的拼合.

2. 双场模型

Linde 和 Mezhlumian 引入了一个更自然的模型，其中有两个场 σ 和 ϕ，σ 用于隧道贯穿，而 ϕ 用于慢滚动. 势的形式为

$$V(\sigma,\ \phi)=V_0(\sigma)+\frac{1}{2}g\sigma^2\phi^2, \tag{6.6.1}$$

式中 $V_0(\sigma)$ 在 $\sigma=0$ 处有亚稳的假真空，而在 $\sigma=\sigma_0$ 处有真真空.

当 σ 处于假真空时 ϕ 是无质量的，但在真真空中它的质量为

$$m=g^{1/2}\sigma_0. \tag{6.6.2}$$

暴胀宇宙中的无质量标量场受制于量子涨落，而后者可描述为沿 ϕ 轴的随机移动. 过一会儿，ϕ 的所有值都变得同样可能.

在这一模型中，泡可以在不同的 ϕ 值处成核，其成核几率为

$$P\sim e^{-S_E(\phi)} \tag{6.6.3}$$

泡内慢滚动暴胀的 e 重数也是与 ϕ 有关的：

$$N(\phi)\approx 2\pi G\phi^2. \tag{6.6.4}$$

因此，可以期望得到具有不同 Ω 值的泡分布.

然而，最近 García-Bellido，Garriga 和 Montes 给出的分析表明，这种图像过于简单了. 场 ϕ 在泡中不是均匀的. 其原因是泡扩展到涨落的场 ϕ 的区域中去，而涨落又渗透了泡壁. 数学上，这可以由所谓超曲率模式描述. 令 t_σ 表示场 σ 停顿于 σ_0 处的真最小时所用的时间(这里 t 是泡内的 R-W 时间). 则在时间为常数的曲面上($t\sim t_\sigma$)，ϕ 具有高斯分布

$$P(\phi)\propto\exp(-\phi^2/2\langle\phi^2\rangle), \tag{6.6.5}$$

其中弥散

$$\langle\phi^2\rangle\sim m^{-2}R_0^{-4}. \tag{6.6.6}$$

这里 R_0 为泡成核时刻的半径. 分布(6.6.5)实际上与(6.6.3)中的分布相同，但意义完全不同. 式(6.6.3)给出的是 ϕ 值给定时泡成核的几率，而(6.6.5)则给出单个泡中 ϕ 的几率分布.

只有 ϕ 大于普朗克质量 m_p 的区域才暴胀，而且由(6.6.4)可知，暴胀量对于各个区域都不相同. 因此，每个泡都包含着无数多个具有不同 Ω 值的区域. G-B 等人称这一图像为“准开暴胀”.

$t\sim t_\sigma$ 时刻泡内 ϕ 的关联长度为 $\zeta\sim R_c/H_F^2m^2R_0^4$，式中 H_F 为假真空的膨胀率，而 R_c 是超曲面 $t\sim t_\sigma$ 的曲率半径. 这个关联长度决定了 Ω 变化的长度标度，且必须比现在可观测宇宙的共动尺寸大得多(因子至少是 10^7，这是为了使微波背景辐射的各向异性不致于大得不可接受). 为了做到这一点，可以在势(6.6.1)中选择适当的参数.

显然，在这类模型中，不可能肯定地预言 Ω 值，只能确定 Ω 的几率分布.

3. 平凡原理

每个泡上都可能寄居无限多个文明世界，而每个文明世界测量的 Ω 值一般不相同. 在某些区域，Ω 会很低而不能形成任何星系. 于是，测量此 Ω 值的几率为零，因为那里没有文明世界观测它们. 人们所谈到的人择原理一般就是指这类约束条件. 但是，这里我们要讨论的是另一表述——由维林金提出的一种更加定量化的表述.

维林金提议，Ω 在区间 $\mathrm{d}\Omega$ 内的几率 $P(\Omega)\mathrm{d}\Omega$ 应正比于在此区间中测量 Ω 的文明世界个数. 假设我们是典型的文明世界，我们可以期望观测到的 Ω 值在 $P(\Omega)$的最大值附近. 这种人择原理表述称为平凡原理，是哥白尼原理的推广. 哥白尼原理认为我们在宇宙中的位置不是特殊的，而平凡原理则认为我们要测量的宇宙参数的值也不是特殊的. [Carter，Leslie 和 Gott 用类似的方法来估算我们人类的期望寿命，Gott 又将其用于估算各种政治、经济结构的寿命，包括他发表文章的"自然"杂志.]

基于平凡原理的计算见文[58]. 当时，人们还未发现 L-M 模型(6.6.1)的准开性质. 下面我们介绍维林金和 Garriga，Tanaka 的工作(1997). 他们首先运用了准开宇宙的图像，大大简化了计算. 其次，他们更注意了星系形成的天体物理学方面的讨论.

平凡原理也用于其他的宇宙参数的计算，例如宇宙常数和密度涨落幅[57~59].

4. $P(\Omega)$的计算

准开图像使计算可以大大简化，这是因为在泡内 Ω 可以取所有可能值. 由于所有泡在统计上是平权的，所以对单个泡计算 $P(\Omega)$就足够了.

分布 $P(\Omega)$可以表示为

$$P(\Omega)\propto P(\phi)\mathrm{e}^{3N(\phi)}\nu(\Omega)\left|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\Omega}\right|. \tag{6.6.7}$$

这里，$P(\Omega)$是ϕ的几率分布(6.6.5)，后面一个因子的出现是因为初始ϕ值不同的区域暴胀量不一样；$e^{3N(\phi)}$是体积膨胀因子."人择因子"$\nu(\Omega)$正比于单位体积内星系形成的个数. 更准确地说，它是星系尺度的体积中最终坍缩形成星系的那部分所占的分数(我们假定文明世界的个数正比于星系数). 最后一个因子是从ϕ变换到Ω的雅可比因子，其变换关系为[58]

$$H_*^2 e^{2N(\phi)} \approx \frac{T_*^2}{T_{eq} T_{\rm CMB}} \cdot \frac{\Omega}{1-\Omega}. \tag{6.6.8}$$

式中H_*和T_*分别表示暴胀结束时的膨胀率和温度，T_{eq}是物质和辐射密度相等时的温度，$T_{\rm CMB}$是Ω值给定时的温度.

高斯分布$P(\phi)$在$\phi=0$处取峰值，这对应于$\Omega=0$，而体积因子支持大的ϕ值，并促使Ω增至$\Omega=1$. 对于$\nu(\Omega)$的效应的理解，我们应注意到，开宇宙中的密度涨落在红移满足$1+z\sim\Omega^{-1}$处不再增大. 如果Ω太低，星系就形成不了. 因此，当$\Omega\to0$，$\nu(\Omega)\to0$.

一个有趣的情况是$P(\phi)$比体积因子大很多. 此时人择因子$\nu(\Omega)$使分布的峰值由$\Omega=0$处移至Ω的非零值处.

为了计算$\nu(\Omega)$，要对宇宙密度涨落的性质做一些假设. 我们采用高斯涨落，由再复合时刻在随动星系尺度上的弥散$\sigma_{\rm rec}$表征. 这里，参考时间的选择是不重要的，只要比曲率为主的时刻早得多即可，所以可以假定$\sigma_{\rm rec}$与Ω无关. 关于星系尺度，我们现在取随动尺度为1Mpc.

在$t_{\rm rec}$时刻，具有密度参量$\Omega_{\rm rec}$的开宇宙中，渐近未来密度涨落的弥散σ_∞只比$\sigma_{\rm rec}$大一个有限因子：

$$\frac{\sigma_\infty}{\sigma_{\rm rec}} = \frac{5}{2}\frac{\Omega_{\rm rec}}{1-\Omega_{\rm rec}} = \frac{5}{2}\frac{T_{\rm rec}}{T_{\rm CMB}}\frac{\Omega}{1-\Omega}. \tag{6.6.9}$$

式中最后一步采用了物质时期满足的关系式

$$T(1-\Omega)/\Omega = {\rm const}. \tag{6.6.10}$$

现在可以用Press-Schechter格式来确定$\nu(\Omega)$了. 只有在线性化密度差δ大于临界值$\delta_c\approx1.7$的区域中星系才能形成. 因此，$\nu(\Omega)$由高斯分布对$\delta>\delta_c$的积分即误差函数给出：

$$\nu(\Omega)=\operatorname{erfc}\left(\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\,\sigma_\infty}\right)=\operatorname{erfc}\left(\kappa\frac{1-\Omega}{\Omega}\right). \tag{6.6.11}$$

式中
$$\kappa=\frac{2}{5}\frac{T_{\text{CMB}}}{T_{\text{rec}}}\frac{\delta_c}{\sqrt{2}\,\sigma_{\text{rec}}}. \tag{6.6.12}$$

原则上，σ_{rec}值可以由密度涨落的基本理论中得到. 但是实际上还没有这种理论，在实际操作中我们可以令 σ_{rec}符合 CMB 观测. 但是这样做又有局限性，因为由观测得到的σ_{rec}值依赖于宇宙中我们所占据的这一部分的哈勃常数 H_0 和密度参数 Ω_0，而这恰恰是未完全确定的. 由于这种不确定性，

$$\kappa=0.1\pm0.05. \tag{6.6.13}$$

由方程(6.6.5)～(6.6.8)和(6.6.11)，可以得到对于 Ω 的几率分布的最终形式，

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\ln y}\propto y^{3\left(\mu-\frac{1}{2}\right)}\operatorname{erfc}(y). \tag{6.6.14}$$

式中
$$y=\kappa\frac{1-\Omega}{\Omega}, \tag{6.6.15}$$

$$\mu=\frac{m_p^2}{24\pi\langle\phi^2\rangle}\sim m_p^2 m^2 R_0^4. \tag{6.6.16}$$

注意，由(6.6.10)，变量 y 并不依赖于测量 Ω 时的温度 T_{CMB}.

对于 $y>1$，误差函数可近似为

$$\operatorname{erfc}(y)\approx\frac{1}{\sqrt{2}\,y}\mathrm{e}^{-y^2}, \tag{6.6.17}$$

且分布(6.6.14)峰值处的 Ω 值可以解析得到：

$$\kappa\left(\frac{1-\Omega}{\Omega}\right)_{\text{peak}}\approx\left(\frac{3}{2}\mu-\frac{5}{4}\right)^{1/2}. \tag{6.6.18}$$

这个峰相当宽，宽度为

$$\Delta\left(\frac{1-\Omega}{\Omega}\right)\sim5. \tag{6.6.19}$$

Ω_{peak}的一些有兴趣的值，既不靠近 0 也不接近 1，由一些 $\mu\sim1$ 的模型中得到(这些模型很容易构造). 进一步的详细计算见[59].

以上分析的意义在于，给出一个粒子物理模型，对于 Ω 的几率分布就可以由基本原理进行明确的计算.

5. 宇宙的年龄

对于 $\Omega<1$ 模型的反对意见通常是它很难解释为什么我们恰好生活在曲率为主的时代，即为什么有

$$t_0 \sim t_c. \tag{6.6.20}$$

式中 t_0 是现在的时刻，t_c 是曲率为主的时刻. 在 $t \ll t_c$ 的时刻，观测者会发现 $\Omega \approx 1$，而当 $t \gg t_c$ 时，$\Omega \ll 1$. 人们似乎应该为生活在 Ω 与零和 1 都相差很远的时代而感到幸运. 其实，一致关系(6.6.20)并非那么令人惊奇.

由前一节的分析可知

$$t_c \sim t_G. \tag{6.6.21}$$

式中 t_G 是星系形成的时刻. 不存在人择因子 $\nu(\Omega)$ 时，Ω 的几率分布在 $\Omega>0$ 处取峰值，这对应于 $t_c \to 0$. $\nu(\Omega)$的作用是移动峰值的位置，使得星系一旦形成曲率就占主导地位，故有 $t_c \sim t_G$.

Dicke 的观测结果表明，现在的时间 t_0 和典型主序星的寿命差不多，$t_0 \sim t_* \sim 10^{10}$年. 而且从观测上看，大星系出现的宇宙结构形成年代满足 $Z_G \sim 1 \sim 3$，或者 $t_G \sim 10^9 \sim 10^{10}$年. 故有 $t_G \sim t_* \sim t_0$，由(6.6.21)有 $t_c \sim t_0$. 以上论述基于与观测相符合的关系

$$t_G \sim t_*, \tag{6.6.22}$$

而这关系不能在我们的模型中得到解释. 星系形成的时间 t_G 依赖于宇宙密度涨落的幅度，而恒星寿命 t_* 由基本常数决定. 在我们的模型中，唯一可变的量是 t_c，而 t_G 和 t_* 都是固定的. 可以设想，关系(6.6.22)可以在更一般的模型中找到某种人择解释，在这种模型中其他一些"常数"也可变.

6. 开宇宙的量子创生问题

在上一章中我们介绍了霍金和 Turok 提出的宇宙创生模型：开宇宙可以自发地从无到有地创生，他们提出用 Coleman-de Luccia 瞬子描述这一过程. 维林金指出，Linde 曾用同一个瞬子描述具有泡的闭合宇宙成核过程. 此瞬子的解析延拓给出一个具有膨胀泡的闭合暴胀宇宙，泡的内部同构于开 R-W 空间. 在接下来的演化过程中还有不止一个泡成核. 霍金也认为，他们的工

作预言了一个很开的或很闭的宇宙．霍金和 Turok 的工作还认为，开宇宙在具有最简单的势的模型中也可以创生，它没有假真空．对于这一点，维林金曾提出质疑．他认为，比如 $V(\phi)=\frac{1}{2}m\phi^2$，这种模型没有规则的瞬子解，H-T 瞬子是奇异的．从几何上看，它像是具有刺的球，而刺的顶点正是奇点，此处曲率和标量场为无限大．后来霍金和 Turok 又指出，此奇异性是可积的，而且瞬子作用量是有限的．这一瞬子的解析延拓给出闭的奇异宇宙，此时空的一部分同构于开 R-W 宇宙．这一奇异性具有膨胀着的奇异泡的形式，但决不会让宇宙的 R-W 部分的观测者遇上，所以霍金-Turok 认为此奇异性不是一个问题．他们的瞬子有一个自由参数，对应于奇异性的强度．当此参数变化时，开宇宙的密度参数 Ω 也变化．H-T 运用一种人择方案找到了 Ω 的最可几值．他们的人择方案与维林金的不同(不是平凡原理)．H－T 令人择因子 $\nu(\Omega)$ 正比于空间密度，而维林金令其正比于观测者的个数．

维林金认为，瞬子应该作为欧氏作用量的驻点，能给出对欧氏路径积分的主要贡献．而在奇异瞬子中，场方程在奇点处不能被满足，所以这类瞬子不是作用量的驻点．因此他认为，所有的奇异瞬子都值得怀疑，除非能够证明此奇异性并非真的．

另外，对于同一个模型[$V(\phi)=\frac{1}{2}m^2\phi^2$]，维林金也构造了一个渐近平直的奇异瞬子．从几何上看，它像是具有刺的平面．场在奇点附近的行为与 H-T 瞬子相同，且作用量也是有限的．维林金认为这一瞬子会导致与观测相矛盾的结果．所以他认为，他得到的奇异瞬子和 H-T 奇异瞬子都不太可取．

一个有趣的新进展是 Garriga 的工作(1998)，他证明，H-T 瞬子可以由非奇异的 5 维的 Kaluza-Klein 瞬子退化到 4 维而得到．而且他还发现，维林金的渐近平直瞬子也有 5 维的对应物．结果，H-T 瞬子和维林金瞬子都没有自由参数了．

Garriga 发现，对于紧致维的足够大半径，平直空间衰减几

率小到可以忽略．看来，Garriga 的瞬子描述宇宙创生还是可以的．但是正如他本人已注意到的，由于他的瞬子没有自由参量，故所得到的 Ω 值是固定的．前面关于人择原理的讨论不适用于此模型，而且还需要用一定量的微调来得到现在的非平凡 Ω 值．这种允许 Ω 在一连续范围内取值的模型至今尚没构造出来．



其他量子宇宙学模型

前面我们讨论了 Hartle-Hawking 的量子宇宙学，其中物质场只限于共形耦合标量场. 下面我们讨论几种其他的情况.

§7.1 有质量标量场模型

Hawking[25]和 Wu[66]考虑了包含有质量标量场的更实际的模型. 在这种情况下，采用代换

$$x = a\,\mathrm{sh}\phi,\quad y = a\,\mathrm{ch}\phi, \tag{7.1.1}$$

W-D 方程可写为

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+V(x,\ y)\right]\Psi(x,\ y)=0, \tag{7.1.2}$$

其中势 V 为

$$V(x,\ y)=x^2-y^2+m^2(x^2-y^2)^2\mathrm{arcth}^2(x/y). \tag{7.1.3}$$

方程(7.1.2)的边界条件由半经典近似波函数给出. 注意到在 x-y 空间中的光锥 $y=|x|$ 上经典作用量的值很小，因而边界条件可取为

$$\Psi=1 \quad 当\ y=|x|, \qquad a\geqslant 0.$$

方程(7.1.2)在上述边界条件下的数值积分已由 Hawking 和 Wu 给出. 结果表明，在 $V<0$ 区域，Ψ 是指数增长的；在 $V>0$ 区域，Ψ 具有振荡形式. 这正是 Hawking 所预言的结果. 他指出，经典区域的半经典波函数具有形式

$$\Psi(a,\ \phi)\approx N\ \exp\left(\frac{1}{3m^2\phi^2}\right)\cos\left[(m^2\phi^2a^2-\right.$$

$$1)^{3/2}/3m^2\phi^2-\frac{\pi}{4}\Big]. \tag{7.1.4}$$

这波函数具有快速振荡的性质，故可用 WKB 近似.在 WKB 近似下，波函数可写为

$$\Psi\approx C\exp(iS). \tag{7.1.5}$$

式中 S 是快速变化的相因子，满足 a-ϕ 平面中的经典哈密顿-雅可比方程;C 是缓变系数，由 W-D 方程给出.

为了得到快速振荡的经典波函数，并有足够长的暴胀期，模型中包含这种有质量标量场是必不可少的.

Hawking 和 Luttvell 定义了新的变量[21]，将作用量写成

$$I=-\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-g}\left[R-aC^{\mu\nu\rho\sigma}C_{\mu\nu\rho\sigma}+\beta R^2\right]-$$
$$\frac{1}{8\pi}\int d^3x\sqrt{h}\left[K(1+2\beta R)-4aK_{,i}C^{\mu\nu ij}n_\mu n_\nu\right]$$
$$(a,\ \beta=\text{const.}) \tag{7.1.6}$$

式中 $C_{\mu\nu\rho\sigma}$是 Weyl 张量.这里 R 是一个独立变量.作代换

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}=(1+2\beta R)g_{\mu\nu},\ \phi=\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2}\beta R, \tag{7.1.7}$$

可以证明 ϕ 满足方程

$$\left[1+4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\phi\right]\Box\phi-4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\phi_{,\nu}\phi_{,\mu}\widetilde{g}^{\mu\nu}-\frac{1}{6\beta}\phi=0. \tag{7.1.8}$$

这一方程和与引力耦合的质量为 $m=\left(\frac{1}{6\beta}\right)^{1/2}$的标量场满足的方程形式相同.用(7.1.7)引入的变量 $\widetilde{g}_{\mu\nu}$和 ϕ，可将作用量(7.1.6)改写为

$$I=-\frac{1}{16\pi}\int d^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\widetilde{R}+\int d^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\Big[\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\widetilde{g}^{\mu\nu}+$$
$$\frac{1}{6\beta}\phi^2\Big]\left[1+4\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1/2}\phi\right]^{-2}. \tag{7.1.9}$$

这种情况下和前面讨论的有质量标量场情况下的波函数的性质相似，数值积分的结果也说明了这一点.

§7.2 含暴胀标量场的模型

Moss 和 Wright 讨论了具有共形不变标量势的模型[44]，取势具有形式

$$V(\phi)=\frac{1}{2}\alpha^2\phi^4\left(\ln\frac{\phi^2}{\phi_0^2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\alpha^2\phi_0^4, \tag{7.2.1}$$

$(\alpha,\ \phi_0=\text{const.})$

在 $\phi=\phi_0$ 处 V 有极小值.

波函数也可在两个不同区域加以讨论. 如果宇宙远离势的极小点，则波函数关于 a 的形式与 Hawking 给出的形式相同，并且 H 的值由标量场给出：

$$H^2=2\pi\alpha^2\phi_0^4/3m_p^2.$$

波函数关于$\tilde{\phi}=\phi/\alpha$ 的形式可写为

$$\Psi(\tilde{\phi})\approx\exp\left\{-\frac{2}{3\lambda}\left[\left(1-\frac{1}{2}\lambda\tilde{\phi}^2\right)-1\right]\right\}, \tag{7.2.2}$$

$$\lambda=2\alpha^2\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{\phi_0^2}{H^2}\right).$$

此波函数具有指数衰减的形式，这表明宇宙最有可能处于较小$\tilde{\phi}$值的状态. 这样，如果宇宙开始就具有较小的$\tilde{\phi}$值，则它将会较长时间保持在这个状态. 在这段时间内，宇宙按指数规律膨胀. 这正是暴胀的性质. 如果宇宙在平面$\tilde{\phi}-a$ 中 P 点，且靠近极小线$\tilde{\phi}=a\phi_c$，那么宇宙将围绕这极小线振荡. 在这种情况下，对所有跨过极小线的宇宙平均所得的平均几率为

$$|\Psi|^2_{Av}\approx\frac{3C_3^3}{11}(Ha_p)^{-1/3}n_1, \tag{7.2.3}$$

式中 C_3 为常数，n_1 给出宇宙第一次通过势极小点的时间，a_P 是 P 点的标度因子. 因为宇宙在第一次通过势极小点之前是按指数规律膨胀的，而经典方程给出 $a_n\propto n^3$，因此膨胀将使宇宙的标度增加 n_1^3 倍. 由(7.2.3)给出的几率函数是相当平坦的，这表明只要 ϕ 和 a 不很小，宇宙取各种 ϕ 和 a 值的几率几乎相同；取小 ϕ 值的几

率比较小.

Carow 和 Watamura 讨论了具有最小耦合标量场的情况. 此时势的形式为

$$V(a,\phi)=\frac{a^4\lambda}{M^4}(\phi^2-M^2)^2, \tag{7.2.4}$$

λ, $M=\text{const}$.

对相应的 W-D 方程作数值积分发现，适当选择某些参数，波函数的局部极小附近有一个明显的峰. 这表明，对于这些参数范围，宇宙更可能处在假真空状态. 波函数的另一个特点是，在欧氏区域中波函数的指数增长区间有所收缩. 这可以解释为，在反转点 $\dot{a}=0$ 标量场有一个非零的速度 $\dot{\phi}=0$.

在上述两种情况下，宇宙处在假真空状态的几率是已知的，因此在选取了“内禀时间”之后，这种假真空的存在寿命便可以得到，从而不难给出暴胀的平均时间.

§7.3 整体转动模型

宇宙的整体转动在一定程度上可以说包含在现在的观测中，确切地说，现在的观测结果不能排除宇宙存在一个较小转动的可能性. 因此人们应该解释宇宙为什么会有这样一个较小的转动，或者根本没有这种整体转动. 由高维空间投影到 4 维空间的热弦理论[69]可以给出这种解释.

我们考虑一个具有 R-W 几何和无源辐射场以及有源物质场的模型. 按一般方式定义转动参量：

$$\Omega^\alpha=(-g)^{-1/2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}W_{\beta\gamma\delta},$$

$$W_{\beta\gamma\delta}=\frac{1}{3\,!}V_{[\beta}V_{\gamma\ \delta]}.$$

可以发现，半经典近似波函数对转动矢量模长 $\bar{\Omega}$ 的依赖关系为

$$\Psi(\bar{\Omega})=\exp\left\{-\frac{\tilde{F}^2}{48}\left[(R_0^2\bar{\Omega}^2+4R_0\bar{\Omega}+1)^{1/2}+R_0\bar{\Omega}-1\right]\right\}. \tag{7.3.1}$$

式中 $\widetilde{F}^2 = 8\pi^2\sigma^2 R_?^3 f^2 a\cos^2 \frac{2}{R}(\bar{t} - \bar{t}_0) =$

$$F^2\cos^2 \frac{2}{R_0}(\bar{t} - \bar{t}_0),$$

$$\frac{\mathrm{d}\bar{t}}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{R_0}{R}},$$

$R_0 = \text{const}$. f^2 以及以下的 b^2 分别表示流场及辐射场的能量密度参量. 对 $R_0\overline{\Omega} \gg 1$(对应于下面的 $\epsilon = 3/2$)及 $\overline{R}_0\Omega \ll 1$(对应于下面的 $\epsilon = 1$), 波函数(7.3.1)简化为

$$\Psi = \exp\left(-\frac{\widetilde{F}^2}{16\epsilon}R_0\overline{\Omega}\right). \tag{7.3.2}$$

这个结果和由 W-D 方程

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial a}\left(a^p\frac{\partial}{\partial a}\right) - a^2 + H^2a^4 - \frac{\partial^2}{\partial B^2} + 4B^2 + F^2a\right]\Psi(a, B) = 0 \tag{7.3.3}$$

$$B = \sqrt{2}\,\pi\sigma R_0 A$$

的解所给出的结果相同.

波函数对转动参量 Ω 的依赖关系总的说来是按指数规律衰减的, 但是指数中的系数是依赖于时间的. 在大爆炸开始时, 因子 $\widetilde{F} \sim 0$, 因此波函数很弱地依赖于 $\overline{\Omega}$. 这表明, 此时宇宙可以具有任何大小的角速度,这是量子涨落为主时期的特征. 如果相对于流体的能量密度而言, 宇宙中辐射场的能量密度是占主导地位的, 这就可能形成宇宙的较大的转动角速度. 由于宇宙更有可能处在 a 很大的状态, 因此 $\widetilde{F}^2$ 将更有可能具有非零值, 具有较大转动角速度参量的几率很小.

角速度的上限值 $\overline{\Omega}_m$ 取决于辐射场能量密度与流体能量密度之比 R_0b^2/af^2, 因此 $\overline{\Omega}$ 的平均值为

$$\langle\overline{\Omega}\rangle = \frac{1}{q}\left[1 - (q\overline{\Omega}_m + 1)\mathrm{e}^{-q\overline{\Omega}_m}\right]. \tag{7.3.4}$$

式中

$$q = \widetilde{F}^2 R_0/\delta\epsilon.$$

在宇宙常数起主导作用的情况下, 总有 $q\overline{\Omega}_m \ll 1$, 此时可得

$$\langle\overline{\Omega}\rangle \approx \frac{1}{2} q \overline{\Omega}_m^2, \tag{7.3.5}$$

即

$$\langle\overline{\Omega}\rangle \ll \overline{\Omega}_m \sim b^2/af^2. \tag{7.3.6}$$

结果(7.3.5)给出宇宙角速度演化的初始条件，因此由它给出的宇宙现在的角速度应该可以与观测结果进行比较.

§7.4 高维模型

通过增加维度的方法，可以把 Harttle-Hawking 的基态理论用于高维情况. 最简单的模型是具有正宇宙常数的 Kaluza-Klein 宇宙模型. 其度规形式为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Omega_i^2 - b^2(t)d\Omega_j^2. \tag{7.4.1}$$

所有经典洛仑兹和欧氏解都是已知的，但只有欧氏解

$$ds^2 = d\tau^2 + \frac{6}{\Lambda}\sin^2\left[\left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{1/2}\tau\right]d\Omega_3^2 + C_3^2\cos^2\left[\left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{1/2}\tau\right]d\Omega_4^2,$$

$$C_3 = \text{const}. \tag{7.4.2}$$

在南极才是紧致的.

在半经典近似下，路径积分形式的波函数可写为

$$\Psi = N_0 \sum_i A_i \exp(-B_i). \tag{7.4.3}$$

在所讨论的情况下，波函数具有形式

$$\Psi(a, b) = N_0 \exp\left[\frac{1}{4}a^2 b(1 - H^2 a^2)^{1/2}\right]. \tag{7.4.4}$$

式中 $a < \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{-1/2}$，$N_0$ 为常数，$H^{-1} \equiv \left(\frac{\Lambda}{6}\right)^{-1/2}$. 当 $a > H^{-1}$时，波函数具有形式

$$\Psi(a, b) = N'_0 \cos\left[\frac{1}{4}a^2 b(H^2 a^2 - 1)^{1/2} + \delta\right]. \tag{7.4.5}$$

式中 N' 和 δ 为常数. 把(7.4.5)代入经典波包满足的方程

$$\nabla_i S = P_i, \tag{7.4.6}$$

可以得到波包的经典轨迹：

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{6}{\Lambda}\cosh^2\sqrt{N6}t\,d\Omega_3^2 +$$
$$C_3^2\sinh^2\sqrt{\Lambda/6}t\,d\Omega_4^2. \tag{7.4.7a}$$

式中 C_3 为常数. 上式表明第 5 维的圆扩张为 3 维球，且不再自动压缩.

简单的 5 维 Kaluza-Klein 模型并不引起自动压缩. 下面我们考虑一个具有正宇宙常数的模型. 度规形式可写为

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Omega_3^2 + b^2(t)d\Omega_n^2, \tag{7.4.7b}$$

其引力作用量为

$$I = \int dt R^{n+3}\left\{(n+2)(n+3)\left[\frac{-\dot{R}^2}{R} + \frac{3n\dot{r}^2}{(n+2)r^2}\right] + \frac{1}{R^2}[6r^{-2n} + (n-1)nr^6] - 2\Lambda\right\}. \tag{7.4.8}$$

式中我们给出参数

$$a = Rr^n, \quad b = Rr^{-6}, \tag{7.4.9}$$

一般以比例参数 R 作为一个时间坐标. W-D 方程可写为

$$\left\{-\frac{1}{R^p}\frac{\partial}{\partial R}R^p\frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{R^2\partial\rho^2} + \frac{R^{2n-2}}{(n+2)(n+3)}\cdot\right.$$
$$[6e^{-2n\rho[(n+2)/3n]^{1/2}} + n(n-1)e^{6\rho[(n+2)/3n]^{1/2}} -$$
$$\left.2\Lambda R^2]\right\}\Psi(R, \rho) = 0, \tag{7.4.10}$$

$$\rho \equiv \left[\frac{3n}{n+2}\right]^{1/2}\ln r.$$

式中 p 代表路径积分中的一些值，但不是所有的值. 令 $p=1$，采用坐标变换

$$x = R\sinh\rho, \quad y = R\cosh\rho, \tag{7.4.11}$$

我们得到两个明显的欧氏解：

(1) $S_4 \times S_n$

$$a = \left[\frac{3(n+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2}\cos\left[\left(\frac{2\Lambda}{3(n+2)}\right)^{1/2}r\right],$$
$$b = b_0 = \left[\frac{(n+2)(n-1)}{2\Lambda}\right]^{1/2}, \tag{7.4.12}$$

(2) $S_3 \times S_{n+1}$

$$a = a_0 = \left(\frac{n+2}{\Lambda}\right)^{1/2},$$

$$b = \left[\frac{n(n+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2} \cos\left[\left(\frac{2\Lambda}{n(n+2)}\right)^{1/2} r\right]. \qquad (7.4.13)$$

我们选择 $\rho=1$，这与 $\Psi=1$ 的边界条件一致，且其偏导数为零. 在 $x=y$ 处，条件 $\Psi=1$ 来自欧氏度规. 此时在欧氏度规南极有

$$b=0, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\tau}=1, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}=0;$$

在 $x=-y$ 处，上述条件为

$$a=0, \quad \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\tau}=1, \quad \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\tau}=0.$$

在 R 到达零势面

$$\frac{b}{a^2} + \frac{n(n-1)}{b^2} - 2\Lambda = 0 \qquad (7.4.14)$$

之前，波函数有一个典型行为，它在

$$\frac{3n-(3n^2+6n)^{1/2}}{6} < \left[\frac{b}{a}\right]^2 < \frac{3n+(3n^2+6n)^{1/2}}{6} \qquad (7.4.15)$$

处开始震荡. 因此，所有的经典演化都得从这里开始，且初始速度为零. 这一条件来自爱因斯坦约束关系和 W-D 方程的经典计算部分. 在所有这些轨迹中，两个明显的精确轨迹是(7.4.12)和(7.4.13)中的洛仑兹部分：

$$(1)\ a = \left[\frac{3(\Lambda+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2} \cosh\left[\left(\frac{2\Lambda}{3(n+2)}\right)^{1/2} t\right],\ b=b_0 \qquad (7.4.16)$$

$$(2)\ b = \left[\frac{n(n+2)}{2\Lambda}\right]^{1/2} \cosh\left[\left(\frac{2\Lambda}{n(n+2)}\right)^{1/2} t\right],\ a=a_0 \qquad (7.4.17)$$

它们有一个固定标度 a_0，b_0 的内部空间 S_3 或 S_n. 如果 S_3 的初始标度小于 a_0，它将坍缩，而外部的 S_n 将无限膨胀. 如果 b 的初始标度小于 b_0，则它们的行为将反过来. 如果初始标度都大于对应的常数标度，则 S_3 和 S_n 都将无限地膨胀.

可以想见，在内部空间即将坍缩时，量子引力效应起着重要作用. 实际上半经典近似在这里已失效. 不仅表达式(7.4.3)不能给出一个稳定的波函数，而且不能通过简单地丢掉高阶项把 W-

D 方程变为 Hamılton-Jacobı 方程；相反地，必须把这些高阶修正项放在方程的右边，在坍缩附近，我们希望从波函数的数值计算中看到演化的细节.

我们把零势面从欧氏区域到洛仑兹区域的转变看作量子隧道的一种形式. 一个量子隧道在零势面通过 (a, b) 构形的相对几率可以用一个路径积分表示出来：

$$\Psi^{*}\Psi=\int_{C+C^{*}}\delta[g_{\mu\nu}]\delta[\phi]\exp(-\bar{I}[g_{\mu\nu},\phi]). \quad (7.4.18)$$

爱因斯坦场方程的瞬子解决定了路径积分. 例如，如果 $C+C^{*}$ 是一个瞬子，则几率就取一个极值. 在一般情况下，在瞬子北极的正则条件与南极的一样强. 因此，它也显示出了最可能的演化途径.

必须强调的是拓扑 S_3 和 S_n 对这个模型不是必不可少的，但其中的曲率项很重要. 如果缺少这些项，质量演化就相当困难(即使在经典条件下).

前面讨论的模型作为真实的理论模型有一定困难，因为维度和宇宙常数都是任意给定的. 人们通常把 11 维超引力作为更真实的理论，下面我们就来讨论这一理论.

11 维时空可能是真实的. 通过自动收缩，那额外的 7 维可以被压缩在普朗克尺度范围内. 这个尺度范围表明了粒子物理的内部对称性. 超对称性要求引入一个 3 阶反对称张量 A_{MNP}. 这样，场方程可写为

$$R_{MN}-\frac{1}{2}g_{MN}R=\frac{1}{48}(8F_{MPQR}F_{N}^{PQR}-g_{MN}F_{SPQR}F^{SPQR}), \quad (7.4.19)$$

$$F^{MNPQ}{}_{;M}=\left[\frac{-\sqrt{2}}{2(4!)}\right]\eta^{M_1\cdots M_8NPQ}F_{M_1\cdots M_4}F_{M_5\cdots M_8} \quad (7.4.20)$$

$$(0\leqslant M, N, P, Q, S, R, \cdots\leqslant 10).$$

式中 $F_{MNPQ}=4!\ \partial_{[M}A_{NPQ]}$,

$\eta^{A\cdots N}=|g|^{-1/2}\epsilon^{A\cdots N}$.

下面我们将使用有限自由度的小超空间模型. 假设时空为爱因斯

坦形式 $M_K \times M_{11-K}$，不为零的场分量为

$$g_{mn}(x),\ g_{\mu\nu}(y) \quad (m,\ n,\ p,\ q=0,\ \cdots,\ k-1),$$

$$F_{mnpq}(x),\ F_{\mu\nu\rho\sigma}(y) \quad (\mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma=k,\ \cdots,\ 10).$$

现在我们尝试寻找基态波函数，把 M_k 看作 $R\times S_{k-1}$，把 M_{11-k}看作 S_{11-k}；这里 R 代表时间，S_{k-1}和 S_{11-k}分别代表外部和内部空间. W-D 方程中标度 ω 的几何平均值作为类时坐标. 在构型空间，ω 足够小，欧氏度规的作用量也很小. 波函数的具体形式依赖于 W-D 方程中算符的次序. 人们希望一达到零势面的内空部分波函数就开始振荡，宇宙就开始经典演化. 但是不幸的是零势面处处类时，没有洛仑兹区域. 这与在这个 ansatz 下没有任何经典洛仑兹解相一致.

如果我们假设 $M_k=R\times H_{k-1}(k\geqslant 4)$，$M_{11-k}=S_{11-k}$，$M_k=R\times S_{k-1}(k=2,\ 3)$，$M_{11-k}=H_{11-k}$则情况就完全不同了. 我们可以找到拓扑 $R\times S_{k-1}\times S_{11-k}$的经典解. 度规符号为$(\underbrace{--\cdots-}_{k}\underbrace{++\cdots+}_{11-k})$和$(\underbrace{++\cdots+}_{k}\underbrace{--\cdots-}_{11-k})$，这些解决定了基态的路径积分. 到达 H_{k-1}或 H_{11-k}时波函数开始振荡，表示基态的经典洛仑兹轨道. $k=2,\ 3,\ \cdots,\ 9$ 时可能存在轨道，这意味着可能得到 2，3，…，9 维的宏观时空，考虑维度，我们希望最可能的宇宙演化是 $k=4$，事实确实如此.

为了得到最可能的演化，我们必须找到瞬子解. 现在我们寻找拓扑空间 $S_k\times S_{11-k}$的瞬子. 如果 $k=1,\ 2,\ 3$，我们有 $F_{mnpq}=0$，由方程(7.4.20)得到

$$F^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{;\sigma}=0, \tag{7.4.21}$$

或者 $$\mathrm{d}^{*}F=0. \tag{7.4.22}$$

考虑到 F 是势 A 的度规场，所以 F 必定是空间 S_{11-k}中的 4 维形式. 由于 $H^4(S_{11-k})$是零维的，我们得到

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=0. \tag{7.4.23}$$

当 $k=5$ 时，$H^4(S_5)$为零事实和方程(7.4.20)决定了 F_{mnpq}的分量为零. 用同样的方法，可得(7.4.23). 值得注意的是，在 S_5 北极的

正则条件是很重要的，如果缺少这个条件，S_5 的非紧致部分将有一个非零的 F_{mnpq}.

显然，所有这些讨论也适用于 $k=6$，8，9，10 的情况. 但是我们可以得出结论:只有 $S_4\times S_7$ 的情况才能得到瞬子解.

由于 $H^4(S_4)=1$，所以对于 $S_4\times S_7$，F_{mnpq}必须采用下面的形式：

$$F_{mnpq}=f\eta_{mnpq},\ f=\text{const}. \tag{7.4.24}$$

如果令

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=0, \tag{7.4.25}$$

则由爱因斯坦方程可知，洛仑兹部分必须是一个 Freund-Rubin 空间，此空间是反 de Sitter 空间，圆的 S_7 空间，[SO(3，2)/SO(3，1)]×SO(8)/SO(7)空间，或者是一个 Duff-Pope 空间. 前面的解给出了一个具有 SO(8)不变性和 $N=8$ 超对称性的 4 维模型，而后面的解只给出了 SO(5)×SO(2)不变性和 $N=1.0$ 超对称性. 外部和内部空间的有效引力常数分别为 $-4f^2/3$ 和 $2f^2/3$. 瞬子的度规符号为(－－－－＋＋＋＋＋＋＋).

如果 $F_{\mu\nu\rho\sigma}$不为零，则有

$$F_{\mu\nu\rho\sigma}=\frac{4}{f}S_{[\mu\nu\rho,\sigma]}. \tag{7.4.26}$$

对于 S_7，Engler[Phys. Lett. 119 B. 339(1982)]发现，如果 $S_{\mu\nu\rho}$是满足

$$R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}(\Gamma^{\pi}_{\tau\omega}+S^{\pi}_{\tau\omega})=0 \tag{7.4.27}$$

的全反对称张量 $S_{\pm\mu\nu\rho}$中的一个，则条件(7.4.26)可解出场方程(7.4.20)的 S_7 部分，

$$F^{\mu\nu\rho\sigma}{}_{;\mu}=\frac{\sqrt{2}}{4!}f\eta^{\nu\rho\sigma\pi\tau\omega\delta}F_{\pi\tau\omega\delta}. \tag{7.4.28}$$

对于收缩的 S_7，Englert，Rooman，Spindel[Phys. Lett. 127B，47(1983)]找到了具有扭量 $S_{\pm\mu\nu\rho}$的解，$S_{\pm\mu\nu\rho}$使 S_7 变为 Ricci 平的，

$$R_{\mu\nu}(\Gamma^{\pi}_{\tau\omega}+S^{\pi}_{\tau\omega})=0. \tag{7.4.29}$$

形如(7.4.25)和(7.4.26)的规范场导致了一个各向异性的宇宙常

数$(-5f^2/2, 3f^2/2)$，这两个场均无超对称性.

我们可以证明，所有(7.4.28)的解都具有(7.4.26)的形式. 对于(7.4.28)的任意一个解，定义

$$T_{\mu\nu\rho}=K\eta_{\mu\nu\rho\sigma\tau\kappa\delta}F^{\sigma\tau\kappa\delta} \qquad (K=\text{const.}) \tag{7.4.30}$$

具有扭量$T_{\mu\nu\rho}$的 Ricci 张量满足

$$R_{\sigma\delta}(\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}+T^{\mu}_{\nu\rho})=R_{\sigma\delta}(\Gamma^{\mu}_{\nu\rho})-T_{\tau\sigma\omega}T^{\omega\tau}{}_{\delta} \tag{7.4.31}$$

我们总可以选择适当的常数 K，使 $R_{\sigma\delta}(\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}+T^{\mu}_{\nu\rho})=0$ 成立. 对于 Englert, Rooman, Spindel 的解，我们有 $K=1/\sqrt{2}\,4!$. 由(7.4.28)和(7.4.30)可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^*F(y)\propto F(y),\\ &T(y)\propto {}^*F(y), \end{aligned} \tag{7.4.32}$$

由此可得

$$F(y)\propto \mathrm{d}T(y). \tag{7.4.33}$$

我们已经给出了所有已知的 $S_4\times S_7$ 的解. Freund-Rubin 解的重要意义在于通过假定的寄生规范场，得出 S_7 是自发收缩的. 在量子宇宙学中，只有瞬子解是重要的，这是由理论本身决定的. 开始人们对引人 S_7 中规范场获得 Englert 解感到很惊奇. 现在人们意识到了，所有的解都必须与 S_7 有关. 然而人们还不知道场方程的瞬子解是否已全部找到了.

总之，本节指出了在 Hartle-Hawking 基态理论框架内，瞬子解决定量子跃迁几率，给出最可能的宇宙演化途径. 我们证明了，在 11 维超引力空间和小超空间 $S_k\times S_{11-k}$条件下，瞬子解只能取 $S_4\times S_7$ 的形式. 对于真实的洛仑兹时空，这意味着，在 11 维超引力空间中的自发收缩把我们的时空限制在 4 维或者 7 维，并且只有一个时间坐标.

§7.5 一个无奇点的宇宙解

在物理学中，任何内禀奇异性都是令人厌恶的. 按照奇异性边界理论，奇异性是一切非类空短程线不可延拓的边界. 宇宙奇

点应表示宇宙演化的起点或终点，在那里不存在任何因果联系，或者说一切因果联系在那里均被割断了．这在物理学中显然是难以接受的．许殿彦和刘辽指出，若考虑到早期宇宙物质场真空的量子单圈效应对经典爱因斯坦方程的修正，宇宙奇点是可以避免的，他们提出了一个无奇点的振荡式反弹宇宙解[67].

含有奇点的佛里德曼度，对于 $K>0$，$K=0$ 和 $K<0$ 三种情况，分别具有形式

$$
\begin{aligned}
& ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-d\chi^2-\sin^2\chi d\theta^2-\sin^2\chi\sin^2\theta d\phi^2),\\
& ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-dx^2-dy^2-dz^2),\\
& ds^2=a^2(\eta)(d\eta^2-d\chi^2-\sinh^2\chi d\theta^2-\sinh^2\chi\sin^2\theta d\phi^2).
\end{aligned}
\tag{7.5.1}
$$

由此式可以得到 Ricci 张量的分量和标曲率：

$$
R^1_1=R^2_2=R^3_3=-\frac{1}{a^4}(aa+a^2+2a^2k),
$$

$$
R=-\frac{6}{a^3}(a+a\theta),\ C_{\mu\nu\lambda\tau}=0. \tag{7.5.2}
$$

式中 $C_{\mu\sigma\tau\lambda}$ 是外尔张量，$k=+1,\ 0,\ -1$ 分别对应于 $K>0$，$K=0$ 和 $K<0$.

共形不变物质场的能动张量 $T_{\mu\nu}$ 的真空平均值的反常迹为：

$$
T=\alpha\Box R+\beta\left(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}-\frac{1}{3}R^2\right)+\gamma C_{\mu\nu\lambda\tau}C^{\mu\nu\lambda\tau}, \tag{7.5.3}
$$

式中 α, β, γ 为无量纲常数．满足关系

$$
3\alpha-\beta-2\gamma=0, \tag{7.5.4}
$$

对于标量场、中微子场和电磁场依次为：

$$
\begin{array}{cccl}
 & \alpha & \beta & \\
\frac{1}{2880\pi^2}\left\{\begin{array}{l}1\\6\\12\end{array}\right. & \begin{array}{c}\\ \\ \\\end{array} & \begin{array}{c}1\\11\\62\end{array} & \begin{array}{l}\text{标量场}\\\text{中微子场}\\\text{电磁场}\end{array}
\end{array}
\tag{7.5.5}
$$

将(7.5.2)式代入(7.5.3)式，可得 Friedmann 时空的反常迹

$$
T=-\frac{6\alpha}{a^6}\left[aa^{(4)}-4aa^{(3)}+\frac{6}{a}a^2a-3\dot{a}^2+(2a^2-2aa)k\right]-
$$

$$\frac{12\beta}{a^6}\left[\frac{1}{a}\dot{a}^2\ddot{a}-\frac{1}{a^2}\dot{a}^4+(\dot{a}^2-a\ddot{a})k\right]. \qquad (7.5.6)$$

设宇宙中充满着共形不变的辐射场，对于辐射场能量密度 $\rho_r=\bar{\rho}_r/a^4$，其中 $\bar{\rho}_r$ 是一个常数. 辐射场的作用量为：

$$-\int\rho_r\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x=-\int(\bar{\rho}_r a^{-4})\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x=-V\int\bar{\rho}_r\mathrm{d}\eta. \qquad (7.5.7)$$

对于 $K>0$ 的 Friedmann 时空，

$$V=\int_0^\pi\mathrm{d}\chi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\sin\theta\sin^2\chi=2\pi^2. \qquad (7.5.8)$$

总的经典作用量为：

$$I_0=\frac{1}{l^2}\int R\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x-\int\rho_r\sqrt{-g}\mathrm{d}^4x=$$
$$-V\int\mathrm{d}\eta\left[\frac{6}{l^2}(\dot{a}^2-a^2k)+\bar{\rho}_r\right]. \qquad (7.5.9)$$

式中 l 是 Planck 长度，$l=\left(\frac{16\pi\hbar G}{C^3}\right)^{1/2}=1.2\times10^{-32}\mathrm{cm}$.

考虑了单圈项的贡献以后，总的有效作用量可表示为：

$$I(g)=I_0(g)+\Gamma_1(g). \qquad (7.5.10)$$

式中 $\Gamma_1(g)$为单圈项对作用量的贡献，它与反常迹的关系可以表示为

$$T=\frac{2}{\sqrt{-g}}g_{\mu\nu}\frac{\delta\Gamma_1}{\delta g_{\mu\nu}}. \qquad (7.5.11)$$

由(7.5.6)和(7.5.11)，可以解出 I_1：

$$I_1(a)=V\int\mathrm{d}\eta\left[-3\alpha\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2-\right.$$
$$\left.6\alpha\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k+\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4-6\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k\right]. \qquad (7.5.12)$$

把(7.5.9) 和(7.5.12) 代入(7.5.10)，得到

$$I(a)=V\int\mathrm{d}\eta\left[-\frac{6}{l^2}(\dot{a}^2-a^2k)-\bar{\rho}_r-3\alpha\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2-\right.$$
$$\left.6\alpha\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k+\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4-6\beta\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2k\right]. \qquad (7.5.13)$$

在 CGS 单位制中 $\bar{\rho}_r$ 应改写为$\frac{1}{c\hbar}\bar{\rho}_r$，$I(a)$是一个无量纲的量.

令 $$a=lb,\tag{7.5.14}$$

l 是 Planck 长度，b 是一个无量纲的实参数，则(7.5.13)式可以改写为：

$$I(b)=V\int \mathrm{d}\eta\mathscr{L}(b,\dot{b},\ddot{b}),\tag{7.5.15}$$

其中 $$\dot{b}=\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\eta},\ \ddot{b}=\frac{\mathrm{d}^2b}{\mathrm{d}\eta^2},$$

等等，

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(b,\dot{b},\ddot{b})=&-6(\dot{b}^2-b_\varepsilon^2)-\bar{\rho}_r-\\&3\alpha\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2-6\alpha\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2k+\\&\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^4-6\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2k.\end{aligned}\tag{7.5.16}$$

经典几何应满足

$$\frac{\delta I}{\delta b}=0.\tag{7.5.17}$$

由于 $\mathscr{L}(b,\dot{b},\ddot{b})$和 η 无关，一次积分后可得：

$$E=-\dot{b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\ddot{b}}\right)+\ddot{b}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\ddot{b}}+\dot{b}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{b}}-\mathscr{L},\tag{7.5.18}$$

E 是积分常数. 将(7.5.16)式代入(7.5.18)式可得：

$$\begin{aligned}E=&-6\dot{b}^2-6b^2k+\bar{\rho}_r+6\alpha\frac{\dot{b}b^{(3)}}{b^2}-12\alpha\frac{\dot{b}^2\ddot{b}}{b^3}-\\&3\alpha\left(\frac{\ddot{b}}{b}\right)^2-6\alpha\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2k+3\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^4-6\beta\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2k.\end{aligned}\tag{7.5.19}$$

这是一个单圈量子修正后的爱因斯坦引力场方程. 下面讨论此方程在 $\varepsilon=+1$ 情况下的解.

在所考虑的情况下，经典佛里德曼宇宙由奇点膨胀，到某一极大线度后又收缩，直至奇点. 下面讨论(7.5.19)的一个具有极小尺度(无奇点)的解的存在问题. 极小尺度(或称反弹点)的边界条件可写为

$$b(0)=b_0>0,\ b(0)=0,\ b(0)>0. \tag{7.5.20a}$$

式中 b_0 表示宇宙的极小(最小)尺度.

在 b_0 附近，可将 $b(\eta)$展开为

$$b(\eta)=b_0+b(0)\eta+\frac{1}{2}b(0)\eta^2+\frac{1}{3\,!}b^{(3)}(0)\eta^3+\cdots.$$

假设宇宙关于时间是对称的，则有

$$b^{(3)}(0)=0. \tag{7.5.20b}$$

极大尺度对应的边界条件可以表示为

$$b(\eta_m)=b_m,\ b(\eta_m)=0,\ b(\eta_m)<0; \tag{7.5.21}$$

此时量子单圈效应可以不考虑，(7.5.19)简化为

$$E-\bar{\rho}_r=-6b^2-6b^2k. \tag{7.5.22}$$

将上式与文献[46]中的经典佛里德曼时空的爱因斯坦引力场方程比较，可得 $E=0$，显然，当宇宙尺度较大或极大时，即当 η 很大时，(7.5.19)的解趋近于经典佛里德曼度规.

由式(7.5.20)，可将爱因斯坦引力场方程(7.5.19)简化为

$$3\alpha\left(\frac{b}{b}\right)^2+6b^2k-\bar{\rho}_r=0. \tag{7.5.23}$$

当 $k=+1$，上式化为

$$3\alpha b^2-\bar{\rho}_r b^2+6b^4=0. \tag{7.5.24}$$

进一步取近似，得到

$$b-\left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2}b\left(1-\frac{3b^2}{\bar{\rho}_r}\right)=0. \tag{7.5.25}$$

此方程的近似解为

$$b=b_0\cosh(p+\eta), \tag{7.5.26}$$

其中
$$p_+=\left(\frac{\rho_r}{3\alpha}\right)^{1/4}\left(1-\frac{3b_0^2}{\bar{\rho}_r}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.5.27}$$

当 $k=0$ 时，方程(7.5.23)具有形式

$$b-\left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2}b=0. \tag{7.5.28}$$

解之，得

$$b=b_0\cosh(p_0\eta). \tag{7.5.29}$$

式中 $p_0=\left(\dfrac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/4}$. (7.5.30)

在 CGS 单位制中，$p_0=\left(\dfrac{\bar{\rho}_r}{3\alpha c\hbar}\right)^{1/4}$. 由 $\eta=0$，b 为极小值知：b_0 不能为负，更不能为零，因而只能大于零. 这就避免了当 $\eta=0$ 时的奇点解.

当 $k<0$ 时，方程(7.5.23)具有形式

$$3\alpha b-\bar{\rho}_r b^2-6b^4=c. \tag{7.5.31}$$

进一步取近似，上式变为：

$$b-\left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/2}b\left(1+\frac{3b^2}{\bar{\rho}_r}\right)=0. \tag{7.5.32}$$

上式的近似解为：

$$b=b_0\cosh(p-\eta), \tag{7.5.33}$$

其中

$$p_-=\left(\frac{\bar{\rho}_r}{3\alpha}\right)^{1/4}\left(1+\frac{3b_0^2}{\bar{\rho}_r}\right)^{1/2}. \tag{7.5.34}$$

由上面的讨论可知，当计入单圈量子修正以后，可以避免宇宙的奇点.

§7.6 宇宙的拓扑结构

关于普朗克时期宇宙的时空拓扑结构问题，已有诸多学者进行了有意义的探讨. 似乎在这一宇宙演化的极早期形成单连通宇宙和多连通宇宙的可能性都存在[67].

宇宙基态由 H-H 波函数描述：

$$\psi(h_{ij})=N\int_c \mathrm{d}[g_{\mu\nu}]\exp(-\bar{I}[g_{\mu\nu}]). \tag{7.6.1}$$

我们取 Planck 时期宇宙时空拓扑结构为

$$R^1\otimes S^d\otimes T^D, \tag{7.6.2}$$

这里 R^1 表示时间维，S^d 表示 d 维球，T^D 表示 D 维环，此时度规为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\Omega_d^2+b^2(t)\mathrm{d}\Omega_D^2. \tag{7.6.3}$$

由上式经计算可得作用量为

$$I=-\int \mathrm{d}ta^{d}b^{D}\left[\frac{\mathrm{d}(d-1)a^{2}}{a^{2}}+\frac{2D\mathrm{d}ab}{a^{b}}+\right.$$
$$\left.\frac{D(D-1)b^{2}}{b^{2}}-\frac{2\mathrm{d}k_{d}}{a^{2}}-\frac{2Dk_{D}}{b^{2}}+2\Lambda\right],\qquad(7.6.4)$$

此处 k_d 是 S^d 子空间的曲率常数，k_D 是 T^D 子空间的曲率常数.

令 $t=\imath\tau$.

对于三维球 S^3，$d=3$，$D=0$，我们可求得波函数为

$$\psi(a)\approx N_1\exp\left\{\frac{1}{\Lambda}\left(1-\left(1-\frac{\Lambda a^2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right\},\ a<\sqrt{\frac{3}{\Lambda}},\quad(7.6.5)$$

$$\psi(a)\approx N_1'\exp\left(\frac{1}{\Lambda}\right)\cos\left(\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\Lambda a^2}{3}-1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{\pi}{4}\right),\ a>\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}.$$
$$(7.6.6)$$

对于三维环 T^3，$d=0$，$D=3$，且 $k_D=0$(考虑到环空间上覆盖不重叠)，我们有波函数

$$\psi(b)\approx N_2b^{\frac{1}{2}}Z_{\frac{1}{6}}\left\{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}b^3\right\},\qquad(7.6.7)$$

这里 $Z_{\frac{1}{6}}$为柱函数.

又我们知道 a，b 的经典解分别为

$$a=\sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\mathrm{ch}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t,\qquad(7.6.8)$$

$$b=A_0\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t},\qquad(7.6.9)$$

A_0 为常数.

又因为在 Planck 时期，因此

$t\sim10^{-44}(\mathrm{s})$，而 $\Lambda\sim10^{66}(\mathrm{cm}^{-2})$.

把式(7.6.8)和(7.6.9)分别代入式(7.6.5～7)，展开，得到

$$\psi(a)\approx N_1\left(1+\frac{3}{2}\Lambda^{-1}\right),\ a<\sqrt{\frac{3}{\Lambda}},\qquad(7.6.10)$$

$$\psi(a)\approx\frac{N_1'}{\sqrt{2}}(1+\Lambda^{-1}),\ a>\sqrt{\frac{3}{\Lambda}},\qquad(7.6.11)$$

$$\psi(b) \approx N_2 \left[c_0 + c_1 \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right], \tag{7.6.12}$$

此处 c_0，c_1 为常数. 在本文中为讨论简单起见，我们不妨取 c_0，c_1 为同级常数.

（Ⅰ）当 $a < \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ 时，

若 $|c_0| \ll 1$，且 $|N_2 c_0| \ll |N_1|$，则波函数 $\psi(b)$ 只有很低的峰，相比之下 $\psi(a)$ 显得有很高的峰，且此时有

$$|\psi(b)|^2 \ll |\psi(a)|^2. \tag{7.6.13}$$

若 $|c_0| \gg 1$，且 $|N_2 c_0| \gg |N_1|$，则波函数 $\psi(b)$ 有很高的峰，且此时有

$$|\psi(b)|^2 \gg |\psi(a)|^2. \tag{7.6.14}$$

若 $|N_2 c_0| = |N_1|$，则此时有

$$|\psi(b)|^2 \approx |\psi(a)|^2. \tag{7.6.15}$$

（Ⅱ）当 $a > \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}$ 时.

若 $|c_0| \ll 1$，且 $|N_2 c_0| \ll \left| \frac{N_1'}{\sqrt{2}} \right|$，则波函数 $\psi(b)$ 只有很低的峰，相比之下 $\psi(a)$ 显得有很高的峰. 且此时有

$$|\psi(b)|^2 \ll |\psi(a)|^2. \tag{7.6.16}$$

若 $|c_0| \gg 1$，且 $|N_2 c_0| \gg \left| \frac{N_1'}{\sqrt{2}} \right|$，则波函数 $\psi(b)$ 有很高的峰，且此时有

$$|\psi(b)|^2 \gg |\psi(a)|^2. \tag{7.6.17}$$

若 $|N_2 c_0| = |N_1|$，则此时有

$$|\psi(b)|^2 \approx |\psi(a)|^2. \tag{7.6.18}$$

根据波函数的几率解释，由（Ⅰ）和（Ⅱ）得到在宇宙 Planck 时期，产生球拓扑与环拓扑几率都存在的结论，从而在理论上说明了形成单连通宇宙与形成多连通宇宙可能性都存在. 在标准宇宙模型中通常假定时空是单连通的，不过，这个假定没有理论上

或观测上的根据. 宇宙学原理并不要求时空是单连通的, Einstein 方程亦不要求时空是单连通的, 观测上也并不表明时空一定是单连通的.

§7.7 时空泡沫结构和虫洞

惠勒曾经指出, 在普朗克尺度附近, 由于物质场的量子涨落, 将使得时空在小尺度上具有多连通的泡沫结构[63]. 刘辽提出, 时空的泡沫结构在 QED 中产生新的顶角恰好可以抵消 QED 中三种最低阶的原始发散[41].

设母宇宙中原来的拉氏量为 $\mathscr{L}_M(\phi)$, 当出现虫洞和半虫洞以及子宇宙时, 应代之以有效拉氏量:

$$\mathscr{L}_{eff}(\phi)=\mathscr{L}_M(\phi)+\sum_i \mathscr{L}_i(\phi)(a_i^+ + a_i). \qquad (7.7.1)$$

式中 a_i 和 a_i^+ 分别为第 i 个虫洞、半虫洞和子宇宙的湮灭算符和产生算符, $\mathscr{L}_i(\phi)$是虫洞与场 ϕ 相互作用的拉格朗日, 对所有可能出现的虫洞、半虫洞和子宇宙求和.

不难看出, 当半虫洞和子宇宙不存在时, (7.7.1)式仍然成立. 这时它表示 M 中任意多的虫洞对拉格朗日的贡献, 也可以认为, 这就是由虫洞组成的时空泡沫结构对场的影响.

容易发现,

$$[(a^+ + a),\ a^+ a]\neq 0, \qquad (7.7.2)$$

这表示算符 $Q=a^+ + a$ 和粒子数算符 $N=a^+ a$ 不可能有共同的本征态, 设

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \qquad (7.7.3)$$

则有

$$Q|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle + \sqrt{n}\,|n-1\rangle. \qquad (7.7.4)$$

对于大 n, 我们有

$$Q|n\rangle \approx 2\sqrt{n}\,|n\rangle. \qquad (7.7.5)$$

这表明, 仅当虫洞足够多时, 算符 Q 才在其福克空间中近似具有本征态, 本征值为发散量 $2\sqrt{n}$. 于是得到

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(\phi) = \mathscr{L}_M(\phi) + \sum_i \mathscr{L}_i(\phi) \cdot 2\sqrt{n}. \qquad (7.7.6)$$

设虫洞种类仅一种，或

$$\mathscr{L}_i(\phi) = \mathscr{L}_1(\phi) \qquad \forall\ i,$$

并认为时空泡沫中，微虫洞的 4 体积为 L_P^4（L_P 即普朗克长度），则单位 4 体积中微虫洞的数目约为

$$\frac{1(\mathrm{cm}^4)}{L_P^4(\mathrm{cm}^4)} \equiv \delta. \qquad (7.7.7)$$

最后有 $$\sum_i \mathscr{L}_i(\phi)(a_i^* + a_i) = \alpha \mathscr{L}_1(\phi). \qquad (7.7.8)$$

式中 $\alpha \equiv 2\sqrt{n} \cdot \delta$ 为无量纲量.

式(7.7.6)可以改写为

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}}(\phi) = \mathscr{L}_M(\phi) + \alpha \mathscr{L}_1(\phi). \qquad (7.7.9)$$

式中 $\mathscr{L}_1(\phi)$是 ϕ 场与一个虫洞的相互作用拉格朗日量，α 是一个无量纲的发散量.

下面我们确定 QED 中 $\mathscr{L}_1(\phi)$的具体形式. 设 M 为平直流形.

由于虫洞的出现只是一种时空流形的拓扑分岔，在母流形中并未出现新的物质场. 所以它对母流形中场论的影响应只表现为出现各种新的自作用项(或顶角)，已知 QED 中的费恩曼图由三种基本元素组成，即

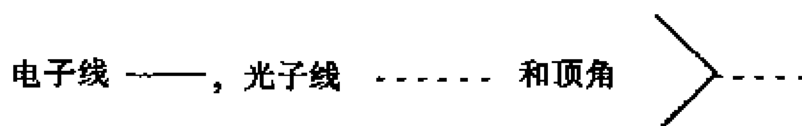


图 6-13

因而由虫洞(泡沫结构)诱生新的自作用顶角只能是

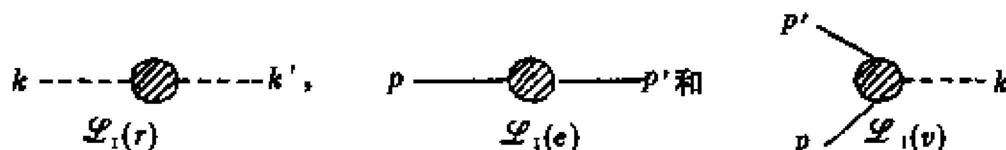


图 6-14

否则，我们所观测到的电动力学就不是 Maxwell-Lorentz 电动力

学.

由洛伦兹协变性要求及量纲要求. 可唯一确定最低阶的 $\mathscr{L}_{\mathrm{I}}$(QED)应为下述新的顶角项的线性组合：

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\gamma)=\beta_{\gamma}\left(-\frac{1}{4}F_{ab}F_{ab}\right),\quad [\beta_{\gamma}]=M^{0},\tag{7.7.10}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\mathrm{e})=&\beta_{\mathrm{e}}[-\overline{\Psi}(\gamma_{a}\partial_{a}+m')\Psi]=\\&\beta_{\mathrm{e}}[-\overline{\Psi}(\gamma_{a}\partial_{a}+m)\Psi]+\beta_{\mathrm{e}}\delta m\overline{\Psi}\Psi,\end{aligned}\tag{7.7.11}$$

$$[\beta_{\mathrm{e}}]=M^{0},\ [m']=M^{1},$$

$$\delta m\equiv m-m',\quad [\delta m]=M^{1},$$

其中 m' 为任一量纲为 M^{1} 的实常数，m 为电子静质量.

$$\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(v)=\beta_{v}(\mathrm{ie}\overline{\Psi}\gamma_{a}\Psi A_{a})\quad [\beta_{v}]=M^{0}.\tag{7.7.12}$$

上述公式中的 β_{γ}，β_{e}，β_{v} 和 m' 均系由虫洞或泡沫所诱生的不可观测的实耦合常数，它们对(7.7.9)式右边第二项的贡献为出现下述新顶角：

$$\alpha\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\gamma)\equiv 2C_{0}\left[-\frac{1}{4}F_{ab}F_{ab}\right],\quad 2C_{0}=\alpha\beta_{\gamma},\tag{7.7.13}$$

$$\begin{aligned}&\alpha\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\mathrm{e})\equiv J_{1}[-\overline{\Psi}(\gamma_{a}\partial_{a}+m)\Psi]+J_{0}\overline{\Psi}\Psi\\&J_{1}\equiv\alpha\beta_{\mathrm{e}},\ J_{0}\equiv\alpha\beta_{\mathrm{e}}\delta m,\end{aligned}\tag{7.7.14}$$

$$\alpha\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(v)\equiv\mathrm{ie}\Lambda\overline{\Psi}\gamma_{a}\Psi A_{a},\quad \Lambda=\alpha\beta_{v},$$

而

$$\alpha\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\mathrm{QED})=\alpha(\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\gamma)+\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(\mathrm{e})+\mathscr{L}_{\mathrm{I}}(v)).\tag{7.7.15}$$

式中 C_{0}，J_{0}，J_{1} 和 Λ 乃 QED 的背景对空中的泡沫结构所诱生的新顶角中的 4 个不可观测的发散实耦合常数.

在动量表象中，上述新顶角的贡献分别为

$$+C_{0}(2\pi)^{4}\delta(k-k')(k^{2}\delta_{ab}-k_{a}k_{b}),\tag{7.7.16}$$

$$-J_{1}(2\pi)^{4}\delta(p-p')(\mathrm{i}\hat{p}+m)-J_{0}(2\pi)^{4}\delta(p-p'),\tag{7.7.17}$$

$$+e\Lambda(2\pi)^{4}\gamma_{a}\delta(p-p'-k).\tag{7.7.18}$$

注意到 QED 中三种最低阶的原始发散项为

$$-C_{0}(2\pi)^{4}\delta(k-k')(k^{2}\delta_{ab}-k_{a}k_{b}),\tag{7.7.19}$$

$$+J_{1}(2\pi)^{4}\delta(p-p')(\mathrm{i}\hat{p}+m)+J_{0}(2\pi)^{4}\delta(p-p'),\tag{7.7.20}$$

$$-e\Lambda(2\pi)^4\gamma_a\delta(p-p'-k). \quad (7.7.21)$$

不难发现，若令(7.7.16～18)中的不可观测的发散量 C_0，J_1，J_0 和 Λ 分别是(7.7.19～21)中对应的发散积分，则 QED 中三种最低阶的原始发散项恰好被新顶角抵消.

§7.8 一个闭合宇宙模型

本节讨论在 Brans-Dicke 理论框架中的一个宇宙解[3]. 共形不变标量场真空涨落的有效作用量可以写为

$$I_v^{\text{eff}} = V\int d\eta\left[3\alpha\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 6\alpha\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \beta\left(\frac{a}{a}\right)^4 + 6\beta\left(\frac{a}{a}\right)^2\right]. \quad (7.8.1)$$

式 a 为 R-W 度规中的标度因子，$\alpha=-\beta$；圆点表示对共形时间求导数. 度规具有形式

$$ds^2=a^2(\eta)[d\eta^2-d\chi^2-\sin^2\chi d\Omega_2^2], \quad (7.8.2)$$

无宇宙项的 B-D 作用量为

$$I_{\text{BD}} = \int(R\varphi-\omega\varphi^{-1}g^{\mu\nu}\varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu})\sqrt{-g}d^4\chi, \quad (7.8.3)$$

于是可以得到真空涨落的半经典 B-D 有效作用量的表示式：

$$\begin{aligned}I^{\text{eff}} &= I_V^{\text{eff}} + I_{\text{BD}} = \\ &V\int d\eta[6a(a+a)\varphi-\omega\varphi^{-1}a^2\varphi^2 + \\ &3\alpha(a/a)^2-\alpha(\dot{a}/a)^4],\end{aligned} \quad (7.8.4)$$

其中 $$V=\int_0^\pi d\chi\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}d\phi\sin^2\chi\sin\theta = 2\pi^2. \quad (7.8.5)$$

由上式可写出半经典 Brans-Dicke 理论的有效拉氏量为

$$L=6a(a+a)\varphi-\omega\varphi^{-1}a^2\varphi^2+3\alpha\left(\frac{a}{a}\right)^2-\alpha\left(\frac{a}{a}\right)^4. \quad (7.8.6)$$

由于 a，φ 仅是共形时间 η 的函数，对 a 的拉氏方程为

$$\frac{\partial L}{\partial a}-\frac{d}{d\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}}+\frac{d^2}{d\eta^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{a}}=0, \quad (7.8.7)$$

对 φ 的拉氏方程为

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}=0. \tag{7.8.8}$$

将(7.8.5)式代入(7.8.6)和(7.8.7)式，可分别得 a-方程

$$\alpha\varphi a^3\ddddot{a}-4\alpha\varphi a^2\dddot{a}\dot{a}+8\alpha\varphi a\ddot{a}\dot{a}^2-3\alpha\varphi a^2\ddot{a}^2-2\alpha\varphi\dot{a}^4-$$

$$2a^5\varphi^2\ddot{a}+a^6\varphi\ddot{\varphi}+2a^5\varphi\dot{a}\dot{\varphi}-\frac{1}{3}\omega a^6\dot{\varphi}^2+2a^6\varphi^2=0, \tag{7.8.9}$$

和 φ-方程

$$\omega a\varphi\ddot{\varphi}-\frac{1}{2}\omega a\dot{\varphi}^2+2\omega\varphi\dot{a}\dot{\varphi}+3\varphi^2\ddot{a}+3a\varphi^2=0.$$

它们分别是四阶和二阶非线性常微分方程，求解是很困难的，为此对拉氏量 L 进行如下变换，令

$$\xi=a\tau,\ \tau=\varphi^{\frac{1}{2}}, \tag{7.8.10}$$

则有

$$L=6\xi^2+6\xi^2\frac{\ddot{\xi}}{\xi}-12\xi^2\left[\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}\right)\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)-\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\ddot{\tau}}{\tau}\right]-$$

$$4\omega\xi^2\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2-3\alpha\left[\frac{\ddot{\xi}}{\xi}-2\frac{\dot{\xi}}{\xi}\frac{\dot{\tau}}{\tau}+2\left(\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^2-\frac{\ddot{\tau}}{\tau}\right]-$$

$$\alpha\left(\frac{\dot{\xi}}{\xi}-\frac{\dot{\tau}}{\tau}\right)^4, \tag{7.8.11}$$

再令 $$u=\ln|\xi|,\ v=\ln|\tau|, \tag{7.8.12}$$

则得

$$L=6\mathrm{e}^{2u}+3(2\mathrm{e}^{2u}-\alpha)(\ddot{u}+\dot{u}^2-2\dot{u}\dot{v}-\ddot{v})+$$

$$3(2\rho^2\mathrm{e}^{2u}-\alpha)\dot{v}^2-\alpha(\dot{u}-\dot{v})^4, \tag{7.8.13}$$

其中

$$\rho^2=\frac{3-2\omega}{3}. \tag{7.8.14}$$

由拉氏量(7.8.13)式可得 u-方程

$$12\mathrm{e}^{2u}+(12\mathrm{e}^{2u}+6\alpha)\ddot{u}+12\mathrm{e}^{2u}\dot{u}^2+6\alpha\ddot{v}+$$

$$12\mathrm{e}^{2u}\rho^2\dot{v}^2+12\alpha(\dot{u}-\dot{v})^2(\ddot{u}-\ddot{v})=0, \tag{7.8.15}$$

和 v-方程

$$6(2\rho^2\mathrm{e}^{2u}-\alpha)\ddot{v}+6\alpha\ddot{u}+12\alpha(\dot{u}-\dot{v})^2(\ddot{u}-\ddot{v})+$$

$$24\rho^2 e^{2u} u - v = 0. \tag{7.8.16}$$

它们都是二阶非线性微分方程.下面讨论 a 值小时的宇宙解.

a 取小值意味着 u 取大的负值,即 $e^{2u} \approx 0$,于是方程组(7.8.15)和(7.8.16)分别简化为

$$[1+2(u-v)^2]u + [1-2(u-v)^2]v = 0; \tag{7.8.17}$$

$$[1+2(u-v)^2]u - [1-(u-v)^2]v = 0. \tag{7.8.18}$$

两式相加、相减后分别得

$$u = 0 \quad 或 \quad 1 \perp 2(u-v)^2 = 0, \tag{7.8.19}$$

$$v = 0 \quad 或 \quad 1 - 2(u-v)^2 = 0. \tag{7.8.20}$$

此方程组的合理通解为

$$u = A + B\eta, v = C + D\eta. \tag{7.8.21}$$

于是 $\quad \xi = e^{A+B\eta}, \tau = e^{C+D\eta}$.

由此可得 $a = \dfrac{\xi}{\tau} = e^{(A-C)-(B-D)\eta} = e^{d+b\eta}$, $\qquad$ (7.8.22)

其中 $d = A - C, b = B - D$.

由于 $\quad a(\eta) d\eta = dt$, $\qquad$ (7.8.23)

将(7.8.22)式代入(7.8.23)式积分得

$$a(t) = b(t+E), \tag{7.8.24}$$

$$\eta = \frac{1}{b}\{\ln[b(t+E)] - d\}, \tag{7.8.25}$$

$$\varphi(t) = \exp\left\{2C + \frac{2D}{b}[\ln b(t+E) - d]\right\} =$$

$$\exp\left(2C - \frac{2Dd}{b} + \frac{2D}{b}\ln a\right) = Ha^{\frac{2D}{b}},$$

$$H = \exp\left(2C - \frac{2Dd}{b}\right). \tag{7.8.26}$$

这里所得到的半经典 B-D 解与半经典爱因斯坦解不同,它描述一个自奇点开始膨胀的闭宇宙.

§ 7.9 一个具有耦合标量场的模型

熟知,$k=1$ 的 Robertson-Walker 度规为

$$dS^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\Omega_3^2, \tag{7.9.1}$$

这里 $a(t)$ 是宇宙的标度因子，c 为光速，而

$$d\Omega_3^2 = \frac{dr^2}{1-r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{7.9.2}$$

由(7.9.1)，(7.9.2)式求得时空的曲率标量为

$$R = 6\left(\frac{a}{c^4 a} + \frac{a}{c^4 a^2} + \frac{1}{a^2}\right), \tag{7.9.3}$$

这里 $$a = \frac{da}{dt}, a = \frac{d^2 a}{dt^2}. \tag{7.9.4}$$

令 $$d\tau = \frac{dt}{t}, \tag{7.9.5}$$

则(7.9.4)式为

$$R = 6\left(-\frac{a}{c^4 a} - \frac{a^2}{c^4 a^2} - \frac{1}{a^2}\right), \tag{7.9.6}$$

这里 $$a = \frac{da}{d\tau}, a = \frac{d^2 a}{d\tau^2}. \tag{7.9.7}$$

我们选取如下作用量[47]：

$$I = \frac{c^3}{16\pi G}\int d^4 x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \int d^4 x \sqrt{-g}\, \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{6}R\phi^2\right), \tag{7.9.8}$$

其中 c 是光速，G 是引力常数，R 是曲率标量，$\phi^2 = \phi_\kappa\phi_\kappa = \sum_{j=1}^{8N+1}\phi_j^2$，$\phi_j$ 为标量场，Λ 为宇宙常数.

令 $$d\eta = \frac{dt}{a}, x_j = a\phi_j, j = 1, 2, \cdots, 8N+1. \tag{7.9.9}$$

为简单起见，令 $\Lambda = 0$.

此时欧氏作用量为

$$\bar{I} = \pi^2\alpha^2 c^2 \int d\eta\left(-\frac{a'^2}{c^4} - a^2 + \frac{1}{\alpha^2 c^4}\sum_{j=1}^{8N+1} x_j'^2 + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{j=1}^{8N+1} x_j^2\right), \tag{7.9.10}$$

这里 $\alpha^2 = \frac{3c^3}{4\pi G}, a' = \frac{da}{d\eta}, x'_j = \frac{dx_j}{d_\eta}$.

由(7.9.10)式求得与 a，x_j 共轭的动量为

$$P_a = -\frac{2\pi^2\alpha^2}{c^4}a',$$

$$P_{x_j}=\frac{2\pi^2}{c^2}x_j',\ j=1,2,\cdots,8N+1. \tag{7.9.11}$$

由(7.9.10)和(7.9.11)两式得体系的 Hamilton 为

$$H=-\frac{c^2}{4\pi^2\alpha^2}P_a^2+\pi^2\alpha^2c^2a^2+\frac{c^2}{4\pi^2}\sum_{j=1}^{8N+1}P_{x_j}^2-\pi^2c^2\sum_{j=1}^{8N+1}x_j^2. \tag{7.9.12}$$

在量子引力理论中，对应于 Schrodinger 方程的是 Wheeler-De Witt 方程：

$$\left[-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}}+h^{\frac{1}{2}}(-3R(h)+2\Lambda+8\pi T_{nn}\left(i\frac{\delta}{\delta\phi},\phi\right)\right]\psi(h_{ij},\phi)=0, \tag{7.9.13}$$

其中${}^3R(h)$为三维面的标量曲率，T_{nn}为能量密度算符，G_{ijkl}(超空间的度规)由所有 h_{ij}构成：

$$G_{ijkl}=\frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}(h_{ik}h_{jl}+h_{il}h_{ik}-h_{ij}h_{kl}).$$

由(7.9.12)式，通过正则量子化，可得宇宙波函数 $\psi(a,x_1,x_2,\cdots,x_{8N+1})$所满足的 Wheeler-De Witt 方程：

$$\left(\frac{\hbar^2}{4\pi^4\alpha^2}\frac{1}{a^p}\frac{\partial}{\partial_a}a^p\frac{\partial}{\partial a}-\alpha^2a^2-\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\sum_{j=1}^{8N+1}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\sum_{j=0}^{8N+1}x_i^2\right)\cdot\psi(a,x_1,x_2,\cdots,x_{8N+1})=0, \tag{7.9.14}$$

其中参数 p 代表量子引力中某些算符次序的模型，它对以下讨论没有多大影响，不失一般性可取 $p=0$.

下面用分离变量法来求解方程(7.9.14).

令 $\psi(a,x_1,\cdots x_{8N+1})=u(a)V_1(x_1)\cdots V_{8N+1}(x_{8N+1})$, (7.9.15)

则(7.9.14)式化为

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^2\alpha^2}\frac{d^2u}{da^2}+(\lambda-\alpha^2a^2)u=0, \tag{7.9.16}$$

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\frac{d^2V_1}{dx_1^2}+(\lambda_1-x_1^2)V_1=0,$$

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\frac{d^2V_2}{dx_2^2}+(\lambda_2-x_2^2)V_2=0,$$

....

$$\frac{\hbar^2}{4\pi^4}\frac{\mathrm{d}^2 V_{8N+1}}{\mathrm{d}x_{8N+1}^2}+(\lambda_{8N+1}-x_{8N+1}^2)V_{8N+1}=0, \qquad (7.9.17)$$

这里 $$\lambda=\sum_{j=1}^{8N+1}\lambda_j. \qquad (7.9.18)$$

(7.9.17)式是标准的谐振子方程,其解为

$$\lambda_j=\frac{\hbar}{2\pi^2}(2n_j+1),n_j=0,1,2,\cdots, \qquad (7.9.19)$$

$$V_{j(n_j)}(x_j)=N'_{j(n_j)}\mathrm{e}^{\frac{\pi^{\hbar}}{\hbar^2}x_j^2}H_{n_j}\left\{\sqrt{\frac{2\pi^2}{\hbar}}x_j\right\}, \qquad (7.9.20)$$

$$j=1,2,\cdots,8N+1,$$

其中 H_{n_j}是 Hermit 多项式.

令 $$n=n_1+n_2+\cdots+n_{8N+1},n_j=0,1,2,\cdots,$$

$$j=1,2,\cdots,8N+1, \qquad (7.9.21)$$

于是(7.9.15)式可改为

$$\psi(a,x_1,\cdots,x_{8N+1})=\sum_n u_n(a)V_{1(n_1)}(x_1)\cdots V_{8N+1(n_{8N+1})}(x_{8N+1}), \qquad (7.9.22)$$

而 $$\lambda=\frac{\hbar}{2\pi^2}(2n+8N+1),n=0,1,2,\cdots, \qquad (7.9.23)$$

则 u_n 满足以下方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}u_n+\left[\frac{2\pi^2\alpha^2}{\hbar}(2n+8N+1)-\frac{4\pi^4\alpha^4}{\hbar^2}a^2\right]u_n=0. \qquad (7.9.24)$$

令 $$l_p=\sqrt{\frac{\hbar}{\alpha^2}}=\left(\frac{4\pi G\hbar}{3c^3}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$a^2=y,\quad u_n=R_n y^{-\frac{1}{4}},$$

则(7.9.24)式可写为

$$\frac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}y^2}+\left[\frac{3}{16y^2}+\frac{\pi^2}{2l_p^2}(2n+8N+1)\frac{1}{y}-\frac{\pi^4}{l_p^2}\right]R_n=0. \qquad (7.9.25)$$

当 $y=a^2\rightarrow\infty$时,(7.9.25)式的渐近解为

$$R_n \approx e^{-\frac{\pi^2}{l_p^2} y}, \tag{7.9.26}$$

则(7.9.25)式的解可写为

$$R_n = e^{-\frac{\pi^2}{l_p^2} y} f_n(y). \tag{7.9.27}$$

将(7.9.27)式代入(7.9.25)式可得

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2} - \frac{2\pi^2}{l_p^2}\frac{df_n}{dy} + \left[\frac{3}{16y^2} + \frac{\pi^2(2n+8N+1)}{2l_p^2 y}\right] f_n = 0. \tag{7.9.28}$$

我们用幂级数方法求解(7.9.28)式，设

$$f_n(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu y^{\nu+s}, \tag{7.9.29}$$

其中 $b_0 \neq 0$. 为了保证解在 $y=a^2=0$ 处有限，$s \geqslant \frac{1}{4}$. 将(7.9.29)式代入(7.9.28)式，由 $y^{\nu+s-1}$ 项的系数为零，得到 b_ν 应满足关系式：

$$b_{\nu+1} = \frac{\frac{2\pi^2}{l_p^2}(\nu+s) - \frac{\pi^2}{2l_p^2}(2n+8N+1)}{(\nu+s+1)(\nu+s)+\frac{3}{16}} b_\nu \tag{7.9.30}$$

当 $\nu \to \infty$ 时，有

$$\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \frac{2\pi^2}{l_p^2} \Big/ \nu. \tag{7.9.31}$$

所以级数(7.9.29)式在 $y\to\infty$ 时的行为与 $e^{\frac{2\pi^2}{l_p^2} y}$ 相同，因而

$$u_n = y^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\pi^2}{l_p^2} y} f_n(y),$$

在 $y\to\infty$ 时，u_n 趋于无限大，这与波函数的有限性相抵触. 由此得到结论：级数(7.9.29)式只能包含有限项. 令这级数在 $\nu = n_r$ 时中断，则由系数 $b_{n_r+1}=0$ 可得到

$$2(n_r+s) = n + \frac{8N+1}{2}. \tag{7.9.32}$$

另一方面，级数(7.9.29)式是从 $\nu=0$ 开始的，所以 b_{-1} 要等于零.

以 $\nu=-1$ 代入(7.9.30)式,得

$$s(s-1)+\frac{3}{16}=0.$$

由此有 $s=\frac{1}{4}$ 或 $s=\frac{3}{4}$.

当 $s=\frac{1}{4}$ 时,

$$n_r=\frac{n}{2}+2N. \tag{7.9.33}$$

为了使 n_r 为整数,则取 $n=0,2,4,\cdots$.

于是得到方程(7.9.24)的解:

$$u_n=u_n'\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_p^2}a^2}\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-2N}b_\nu a^{2\nu}, n=0,2,4,\cdots, \tag{7.9.34}$$

其中 N_n' 为归一化常数.

下面我们考虑在 $a\to a+\mathrm{d}a$ 球壳的几率. 对于任何 n,有

$$W_n=6\pi^2u_na^2, \tag{7.9.35}$$

则 $W_n\xrightarrow[a\to 0]{}0.$ (7.9.36)

这可解释为,对于任意 n 的量子态,在奇点 $a=0$ 附近宇宙存在的几率为零.

对于基态($n=0$),有

$$W_0=6\pi^2N_0'\mathrm{e}^{-\frac{2\pi^2}{l_p^2}a^2}\left(\sum_{\nu=0}^{2N}b_\nu a^{2\nu}\right)^2a^2, \tag{7.9.37}$$

这个几率极大值的位置为

$$\frac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}a}=0, \tag{7.9.38}$$

即
$$b_0+\sum_{\nu=0}^{2N}[(2\nu+1)b_\nu-b_{\nu-1}]a^{2\nu}-b_{2N}a^{4N+2}=0. \tag{7.9.39}$$

由(7.9.39)式,不失一般性可假设 $b_0>0$,从而由(7.9.30)式可推知:

$$b_{2k-1}<0, b_{2k}>0, k=1,2,\cdots,N. \tag{7.9.40}$$

作变换，令$\frac{\pi^2}{l_p^2}a^2=Z$， (7.9.41)

则(40)式可化为

$$1+c_1Z+c_2Z^2+\cdots+c_{2N+1}Z^{2N+1}=0, \tag{7.9.42}$$

其中 $c_i(i=1,2,\cdots,2N+1)$为与 N 有关的实常系数，且 $c_{2k+1}<0$，$c_{2k}>0,k=0,1,2,\cdots,N.$ (7.9.43)

由代数学中有关定理可推知(7.9.42)式至少存在有一个正实根 Z_0(若不至有一个实根，我们可取一个最小正实根)，从而由(4.9.41)可推知

$$a=\frac{\sqrt{Z_0}}{\pi}l_p. \tag{7.9.44}$$

这表明，对有限的 N，宇宙的最可几半径(亦即最小半径)为 Planck 尺度 l_p.

由(7.9.22)式知

$$\psi(a,x_1,\cdots,x_{8N+1})\sim\sum_n\left[N'_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_p^2}a^2}\left(\sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}+2N}b_\nu a^{2\nu}\right)\right]\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{\hbar}\sum_{j=1}^{8N+1}x_j^2}\prod_{j=1}^{8N+1}N'_{j(n_j)}H_{n_j}\left(\sqrt{\frac{2\pi^2}{\hbar}}x_j\right). \tag{7.9.45}$$

由概率论中有关定理可知，多个标量场的几率密度小于只有一个标量场的几率密度. 当 $s=\frac{3}{4}$时，

$$n_r=\frac{n-1}{2}+2N. \tag{7.9.46}$$

为了使 n_r 为整数，则取 $n=1,3,5,\cdots$.

于是得到方程(7.9.24)的解：

$$u_n=N'_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi^2}{l_p^2}a^2}\sum_{\nu=0}^{\frac{n-1}{2}+2N}b_\nu a^{2\nu-1},n=1,3,5,\cdots. \tag{7.9.47}$$

类似(7.9.35)～(7.9.45)诸式讨论，我们可推知 $s=\frac{3}{4}$时有 $s=\frac{1}{4}$时的相同结果.

§7.10 含有旋量场的模型[47]

我们知道 Roberston-Walker 度规具有形式

$$ds^2=dt^2-\frac{a^2(t)}{\left(1+\frac{\kappa}{4}r^2\right)^2}[dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2], \tag{7.10.1}$$

考虑闭合宇宙，取 $k=1$.

其拉氏量为

$$\mathscr{L}_g=\frac{1}{2}\left[\frac{a}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}\right], \tag{7.10.2}$$

这里 $a=\frac{da}{dt}$，Λ 为宇宙常数.

Dirac 场的拉氏量为

$$\mathscr{L}_m=\frac{i}{2}[\bar{\phi}\gamma^\mu\nabla_\mu\phi-(\nabla_\mu\bar{\phi})\gamma^\mu\phi]-m\bar{\phi}\phi \tag{7.10.3}$$

这里 m 为 Dirac 粒子质量，γ^μ 为弯曲空间的 Dirac 矩阵，ϕ 为旋量场波函数，且 $\phi=\phi(t)$，$\bar{\phi}=\phi^+\tilde{\gamma}_0$，而 $\tilde{\gamma}_0$ 为平空间的 Dirac 矩阵，ϕ^+ 为 ϕ 的共轭转置，$\nabla_\mu=\partial_\mu+\Gamma_\mu$，$\partial_\mu$ 为普通微分，$\Gamma_\mu=-\frac{1}{4}\gamma^\nu\gamma_{\mu\nu}$.

平空间 Dirac 矩阵满足关系：

$$\tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j+\tilde{\gamma}_j\tilde{\gamma}_i=2\eta_{ij} \tag{7.10.4}$$

其中 $\eta_{ij}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

我们有 $$\tilde{\gamma}_0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{7.10.5}$$

$$\tilde{\gamma}_j=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, j=1,2,3 \tag{7.10.6}$$

这里 I 为 2×2 单位矩阵，σ_j 为 Pauli 矩阵.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

弯曲空间的 Dirac 矩阵满足关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \tag{7.10.7}$$

我们有

$$\gamma^0=\tilde{\gamma}_0,\gamma^1=-\frac{1+\frac{1}{4}r^2}{a(t)}\tilde{\gamma}_1,$$

$$\gamma^2=-\frac{1+\frac{1}{4}r^2}{a(t)r}\tilde{\gamma}_2,\quad \gamma^3=-\frac{1+\frac{1}{4}r^2}{a(t)r\sin\theta}\tilde{\gamma}_3. \tag{7.10.8}$$

$$\gamma_0=\tilde{\gamma}_0,\gamma_1=\frac{a(t)}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_1,$$

$$\gamma_2=\frac{a(t)r}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_2,\gamma_3=\frac{a(t)r\sin\theta}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_3. \tag{7.10.9}$$

经过繁复冗长计算，我们有

$$\Gamma_0=0,$$

$$\Gamma_1=\frac{1}{2}\frac{a(t)}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1,$$

$$\Gamma_2=\frac{1}{2}\left[\frac{a(t)r}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_2-\frac{1-\frac{1}{4}r^2}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\right],$$

$$\Gamma_3=\frac{1}{2}\left[\frac{a(t)r\sin\theta}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_2-\frac{1-\frac{1}{4}r^2}{1+\frac{1}{4}r^2}\sin\theta\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_3-\cos\theta\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_3\right]. \tag{7.10.10}$$

从而我们得到

$$\mathscr{L}_m=\frac{i}{2}\left[\phi^-\partial_t\phi-\partial_t\phi^+\cdot\phi+\frac{2}{ar}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi+\frac{1}{ar}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\cot\theta\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_2\phi\right]-m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi. \tag{7.10.11}$$

令 $\mathrm{d}t=i\mathrm{d}\tau$,

则(7.9.2)、(7.9.11)化为

$$\mathscr{L}_g=\frac{1}{2}\left[-\frac{\dot{a}^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{\Lambda}{3}\right], \tag{7.10.12}$$

$$\mathscr{L}_m=\frac{1}{2}\left[\phi^+\dot{\phi}-\dot{\phi}^+\phi+\frac{2i}{ar}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi+\right.$$

$$\left.\frac{i}{ar}\left(1+\frac{r^2}{4}\right)\cot\theta\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_2\phi\right]-m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi, \tag{7.10.13}$$

这里“·”表示对 τ 求导.

欧氏作用量为

$$\bar{I}=\int\mathrm{d}\tau\iiint\sqrt{-g}(\mathscr{L}_g+\mathscr{L}_m)\mathrm{d}V, \tag{7.10.14}$$

这里

$$\sqrt{-g}=\frac{a^3(\tau)r^2}{\left(1+\frac{r^2}{4}\right)^3}\sin\theta. \tag{7.10.15}$$

令

$$\mathrm{d}\eta=\frac{\mathrm{d}\tau}{a}, \tag{7.10.16}$$

则有

$$\bar{I}=\frac{1}{2}\int\left[-a'^2-a^2+\frac{\Lambda}{3}a^4+(\phi^+\phi'-\phi'^+\phi)a^3+\right.$$

$$\left.ik_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_r\phi a^3-2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi a^4\right]\mathrm{d}\eta, \tag{7.10.17}$$

这里 k_0 为常数,“$'$”表示对 η 求导.下面求基态波函数.

我们知道,在量子引力理论中,对应于 Schrodinger 方程的是 Wheeler-De Witt 方程

$$\left[-G_{ijkl}\frac{\delta^2}{\delta h_{ij}\delta h_{kl}}+h^{\frac{1}{2}}\left(-{}^3R(h)+2\Lambda+\right.\right.$$

$$\left.\left.8\pi T_{nn}\left(i\frac{\delta}{\delta\phi},\phi\right)\right)\right]\psi(h_{ij},\phi)=0, \tag{7.10.18}$$

其中 ${}^3R(h)$ 为三维面的标量曲率,T_{nn} 为能量密度算符,G_{ijkl}(超空间的度规)由所有三维度规 h_{ij} 构成,

$$G_{ijkl}=\frac{1}{2}h^{\frac{1}{2}}(h_{ik}h_{jl}+h_{il}h_{jk}-h_{ij}h_{kl}). \tag{7.10.19}$$

对应于(7.10.18)的 Wheeler-De Witt 方程为

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}-a^2+\frac{\Lambda}{3}a^4-2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi a^4+ik_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a^3\right]\psi=0. \tag{7.10.20}$$

我们用 WKB 方法来计算.

令 $A=a^2+\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^4,$

$$B=-k_0\phi^-\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a^3,$$

$$A+Bi=R(a)e^{i\Theta(a)},$$

$$R^2(a)=\left[1+\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2\right]^2a^4+k_0^2(\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi)^2a^6,$$

$$\tan\Theta(a)=\frac{-k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a}{1+\left(2m\phi^++\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2}, \tag{7.10.21}$$

我们得到波函数

$$\psi\sim N\frac{e^{-\frac{i}{4}\Theta(a)}}{\sqrt[4]{R(a)}}\exp\left[\pm\int_0^a\sqrt{R(a)}e^{\frac{i}{2}\Theta(a)}da\right]. \tag{7.10.22}$$

为了便于讨论，我们给出(7.10.22)式当 $a\to0$(足够小)时和 $a\to\infty$(足够大)时的渐近解.

当 $a\to0$ 时，分两种情况来讨论.

Ⅰ）若 $\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2\ll1$，此时(7.10.21)式可简化为

$$R(a)\sim a^2, \Theta(a)\sim-k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi a=c_1a, \tag{7.10.23}$$

此处 $c_1=-k_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi.$

这时由(7.10.22)式可得

$$\psi\sim N\frac{e^{i\frac{c_1}{4}a}}{\sqrt{a}}\exp\left[\pm\int_0^a ae^{-\frac{c_1}{2}a}da\right]\sim$$

$$N\frac{e^{\pm\frac{a^2}{2}}}{\sqrt{a}}e^{-ik_0\phi^+\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi\cdot\frac{a}{4}}. \tag{7.10.24}$$

而当 $a\to0$ 时，通常的标量均解为 $\frac{1}{\sqrt{a}}e^{\pm\frac{a^2}{2}}$，因此考虑旋量场后，宇宙波函数将移动一个相因子 $e^{i\frac{c_1}{4}a}$(这里 a 为一次幂，可以看出旋量场的贡献很强)，当旋量场不存在时，这个修正自然消失. 当然附加的相因子并不影响"测量"结果.

Ⅱ）若 $\left(2m\phi^+\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^2\gg1$，此时(7.10.21)式可简化为

$$R(a)\sim c_1a_3,$$

$$\tan\Theta(a)\sim\frac{1}{a},\Theta(a)\to\frac{\pi}{2}.$$

这时由(7.10.22)式可得

$$\psi\sim\frac{1}{\sqrt[4]{c_1 a^3}}e^{\pm\frac{2}{5}\sqrt{c_1}a^{\frac{3}{2}}}. \tag{7.10.25}$$

与通常的标量场解相比,可以看出旋量场的贡献很大.

当 $a\to\infty$ 时,可得

$$R(a)\sim\left(2m\phi^{-}\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}\right)a^4=\alpha a^4,$$

$$\Theta(a)\sim-\frac{k_0\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi}{2m\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}}\cdot\frac{1}{a}=\frac{c_1}{\alpha a}, \tag{7.10.26}$$

这里 $\alpha=2m\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\phi-\frac{\Lambda}{3}$.

这时波函数为

$$\psi\sim N\frac{e^{i\frac{c_1}{4\alpha a}}}{\sqrt[4]{\alpha}\,a}\exp\left[\pm\int_0^a\sqrt{\alpha}\,e^{i\frac{c_1}{2\alpha a}}da\right]\sim$$

$$N\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}\,a}e^{\pm\sqrt{\alpha}\frac{a^3}{3}}e^{\pm i\frac{c_1}{4\sqrt{\alpha}}a^2}. \tag{7.10.27}$$

由此可以看出旋量场对波函数的贡献有两部分,一部分是旋量场的能量密度 $m\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\phi$,其对波函数的影响和通常标量场一样;另一部分是类似于(7.10.24)式中相移因子的贡献,此贡献是旋量场所特有的.但这时 α 为二次幂,旋量场的影响已经减小.

初始时,旋量场能量密度很高.若 $2m\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\phi>\frac{\Lambda}{3}$,则

$$\psi\sim N\frac{1}{\sqrt[4]{\alpha}}\frac{1}{a}e^{\pm\frac{\sqrt{\alpha}}{3}a^3}e^{\pm i\frac{c_1}{4}\frac{a^2}{\sqrt{\alpha}}}. \tag{7.10.28}$$

当能量密度下降到 $2m\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\phi<\frac{\Lambda}{3}$ 时,

$$\psi\sim N'\frac{1}{\sqrt[4]{-\alpha}}\frac{1}{a}e^{\pm i\frac{\sqrt{-\alpha}}{3}a^3}e^{\pm\frac{c_1}{4}\frac{a^2}{\sqrt{-\alpha}}}. \tag{7.10.29}$$

由于 $c_1\sim\phi^{+}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1\phi\sim a^{\ 3}$,故当 a 很大时,

$$e^{\pm\frac{c_1}{\sqrt{-\alpha}}\frac{a^4}{4}}\sim e^{\pm(2a^{-1})}\sim1, \tag{7.10.30}$$

此处 c_2 近似为一常数．当 a 很大时，旋量场的行为和通常标量场行为完全一样．

因此可以看出旋量场在宇宙“创生”初期影响很大，使宇宙波函数改变了一个相因子，而随着宇宙的膨胀，旋量场的影响越来越小，当宇宙进入 Lorentz 区域 $\left(2m\phi-\tilde{\gamma}_0\phi<\frac{\Lambda}{3}\right)$ 后，旋量场的影响趋于消失，这时旋量场的行为和通常的标量场行为一样，仅仅能量密度在起作用．

8 诱导引力和宇宙模型

本章讨论含对称性自发破缺的引力理论及建立在这一理论基础上的量子宇宙模型. 对称性自发破缺概念在物理学的许多领域都是很有成效的. 在弱电统一理论中已经知道，费米弱耦合常数 G_F 是由真空自发破缺决定的，即 $G_F \sim 1/v^2$，其中 v 表示希格斯场的真空期望值. 爱因斯坦引力理论中也含有一个耦合常数 G_N，他具有与 G_F 完全相同的量纲 M^{-2}. 这一类似性使 Zee 把对称性自发破缺引入到引力理论中，提出了著名的诱导引力理论[69].

§8.1 诱导引力理论

爱因斯坦引力理论和费米弱相互作用理论有一个共同的特征：与电动力学和强相互作用的现代理论相比，他们都含有一个量纲为 M^{-2} 的耦合常数. 这些耦合常数都很小，其中费米耦合常数 $G_F \sim (300m_N)^{-2}$，牛顿耦合常数 $G_N \sim (10^{19}m_N)^{-2}$. 人们早就提出 G_F 很小，这是因为中介玻色子有质量，$G_F \sim e^2/M_w^2$. 电磁与弱相互作用统一的成功，使这一思想精确化. 统一方案的核心是对称性自发破缺的概念，它使某些标量场有真空期望值 v，从而产生中介玻色子的质量：

$$G_F \sim e^2/M_w^2 \sim 1/v^2. \tag{8.1.1}$$

对称性自发破缺的概念在许多物理学领域硕果累累，因此值得尝试把它和引力结合起来. 显然，引力物理与弱作用物理大不相同，因为引力是长程力，其中介引力子是无质量的. 然而我们宁愿希望有一个类似于(8.1.1)的关系式，并把牛顿引力常数 G_N

很小的原因归结为某种粒子有质量．由这一点出发，把爱因斯坦引力作用量写为下面的形式：

$$I=\int d^4x\sqrt{g}\left[\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2R+\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi-V(\varphi)+\mathscr{L}_m\right]. \tag{8.1.2}$$

这里 φ 为标量，ε 为一无量纲耦合常数，其量级取为 $\lesssim 1$，$\mathscr{L}_m$ 是其余部分的拉格朗日．我们必须区分两种物理意义不同的情况：$\mathscr{L}_m$ 是否含有 φ，即 φ 是否直接与物质场有相互作用．这里我们假设 $\mathscr{L}_m$ 不含 φ．设当 $\varphi=v$ 时 $V(\varphi)$ 取最小值．令 $\varphi=v$，则(8.1.2)退化为爱因斯坦作用量，其中

$$G_N=\frac{1}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\varepsilon v^2\right)^{-1}. \tag{8.1.3}$$

这样，需要一个非常大的真空期望值 v，量级为普朗克质量 $m_p=10^{19}m_N$．在下面讨论中令 $V(v)=0$，但不需要知道 $V(\varphi)$ 的具体形式．在特殊情况下，为得到明显结果，取 $V_{expl}=\frac{1}{8}(\varphi^2-v^2)^2$．

作代换 $\varphi=v+\zeta$，发现此理论要求存在一标量粒子 ζ，其质量由 $[V''(\varphi=v)]^{1/2}$ 给出．实际上，由于 φ 与引力的特殊耦合，这一质量略小于 $[V''(\varphi=v)/(1+6\varepsilon)]^{1/2}$，稍后我们会讨论这一点．

如果采用 V_{expl}，则 ζ 是有质量的，其质量为 $\lambda^{1/2}v\sim(\lambda/8\pi\varepsilon)^{1/2}m_p\sim10^{19}\mathrm{GeV}$，其中 $\lambda\lesssim1$．在一般情况下，尽管 ζ 的质量不能由理论确定，但是没有理由认为 ζ 相对地比较轻．ζ 与引力的相互作用跟任何其他粒子与引力的相互作用都不相同，特别是，它不稳定，很快衰变为两个引力子，宽度为 $\Gamma\sim\varepsilon^2m_\zeta^3/v^2$．若采用 V_{expl}，则 $\Gamma\sim\varepsilon^2\lambda m_\zeta$．在这里，我们先认定无量纲耦合常数(如 ε 和 λ)都具有量级 $\lesssim1$．于是若 $m_\zeta\ll m_p$，则 ζ 粒子可以是相对较窄的．

一个特别引人注目的猜测是，产生牛顿引力常数的对称性自发破缺也可以解释由统一理论导出的弱、强和电磁相互作用．人们已经知道，弱、电磁和强相互作用在某一大质量尺度下结合为统一的杨-米尔斯规范理论．特别诱人的方案是 Georgi 和 Glashow 的 SU(5)规范理论[13]．只要知道耦合常数是如何依赖于

质量的，知道低能时弱、电磁和强相互作用的值，就可以确定统一发生时的质量尺度．分析结果表明，统一发生在 10^{19}GeV．在这一框架内，接近于普朗克质量 m_p 的质量尺度似乎仅在数值上吻合；但是我们相信，这不是偶然的，而是表明了(8.1.2)式中的标量场 φ 应该换成 $SU(5)$ 下类似于 $\underline{24}$ 变换的 Higgs 场 $\vec{\varphi}$．(8.1.2)式中的 φ^2 和 $(\partial_\mu\varphi)^2$ 的表达式应该换成 $\vec{\varphi}^2$ 和 $(\partial_\mu\vec{\varphi})^2$．在统一的 $SU(5)$ 理论中，相关的质量尺度为 10^{19}GeV，且假定存在具有这种质量的矢量玻色子，$|\varphi|$ 的真空期望值也假定为 $\sim 10^{19}$ GeV．这样，一个统一的机制既可以解释引力的质量尺度，也可以解释 $SU(5)$ 到 $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ 的破缺．当然，这一想法并没有统一所有四种相互作用，但它确实提出了引力与其他三种相互作用之间令人感兴趣的联系．

我们可直接从(8.1.2)中的作用量导出运动方程，只需注意

$$\delta(g^{1/2}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}\delta g^{1/2}+g^{1/2}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+g^{1/2}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{8.1.4}$$

中最后一项是全散度，可在标准引力理论中省去．前两项导致爱因斯坦引力场方程中的爱因斯坦张量 $(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)$．这里，(8.1.4)式中的第三项必须保留．通过分布积分，再利用各个恒等式，可以得到修正的运动方程：

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)=-\frac{1}{2}[T^{\mu\nu}_{\omega}+T^{\mu\nu}_{\varphi}+(\varepsilon\varphi^2)^{;\mu;\nu}-g^{\mu\nu}(\varepsilon\varphi^2)^{;\lambda}_{;\lambda}]. \tag{8.1.5a}$$

式中 $T^{\mu\nu}_{\omega}$ 是(8.1.2)中由 $\mathscr{L}_\omega$ 得到的能动张量，

$$T^{\mu\nu}_{\varphi}=\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi-g^{\mu\nu}\left[\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\partial_\lambda\varphi\partial_\rho\varphi-V(\varphi)\right]. \tag{8.1.6}$$

场 φ 的运动方程为

$$\varphi^{;\mu}_{;\mu}+\frac{\delta V}{\delta\varphi}-\varepsilon R\varphi=0, \tag{8.1.7a}$$

$\mathscr{L}_\omega$ 不含 φ．若 $\mathscr{L}_\omega$ 含 φ，则上式右端不为零，代之以

$$\frac{\delta\mathscr{L}_\omega}{\delta\varphi}-\frac{\partial_\mu\delta\mathscr{L}_\omega}{\delta\partial_\mu\varphi}.$$

在现在世界的对称性破缺相中，$\varphi(x)=v$，$V(v)=0$，$\frac{1}{2}\varepsilon v^2=(16\pi G_N)^{-1}$. 于是(8.1.5a)变成期望的爱因斯坦场方程. 因此，现在的实验不能区分这个理论和爱因斯坦引力理论. 在(8.1.7a)式中的$\varepsilon R\varphi$项是可忽略的.

我们要给这个理论加上一个要求，即物质与引力场的能量变换应该由爱因斯坦理论精确描述. 这相当于等效原理的一个翻版. 我们现在证明这确实是对的，即只要$\mathscr{L}_\omega$不含φ. 则

$$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu}=0. \tag{8.1.8}$$

在爱因斯坦理论中，此方程由爱因斯坦张量所满足的缩并毕安基恒等式得到. 在现在的理论中，这一恒等式给出的是守恒定律

$$(a^{-1}[T^{\mu\nu}_{\omega}+t^{\mu\nu}])_{;\nu}=0. \tag{8.1.9}$$

式中

$$a\equiv\frac{1}{2}\varepsilon\varphi^2,$$

$$t^{\mu\nu}\equiv T^{\mu\nu}_{\varphi}+2a^{;\mu;\nu}-2g^{\mu\nu}a^{;\lambda}_{;\lambda},$$

圆括号中的量可认为是“等效”的能动张量. 我们要证明，考虑到φ的运动方程，(8.1.9)式实际上就是(8.1.8)式. (8.1.9)式可改写为

$$-\frac{1}{2}T^{\mu\nu}_{\omega;\nu}=a_{;\nu}\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)+\frac{1}{2}t^{\mu\nu}_{;\nu}. \tag{8.1.10}$$

利用恒等式

$$a^{;\sigma}R_{\sigma k}=a^{;\lambda}_{;\lambda;k}-a_{;k;\lambda}^{;\lambda}, \tag{8.1.11}$$

(8.1.10)式简化为

$$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu}=a^{;\mu}R-T^{\mu\nu}_{\varphi;\nu}. \tag{8.1.12}$$

最后，利用φ的运动方程(6.1.7)，得到

$$T^{\mu\nu}_{\varphi;\nu}=a^{;\mu}R, \tag{8.1.13}$$

我们的证明就完成了. 因此，时空度规决定质点的运动.

另一方面，如果$\mathscr{L}_\omega$含有φ，正如我们猜测的，φ也涉及到统一理论分化为弱、电磁和强相互作用，那时φ的运动方程不再是(8.1.7)，$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu}=0$不成立，而应有

$$T^{\mu\nu}_{\omega;\nu}=\varphi^{,\mu}\left(\partial_\mu\frac{\delta\mathscr{L}_\omega}{\delta\partial_\mu\varphi}-\frac{\delta\mathscr{L}_\omega}{\delta\varphi}\right). \tag{8.1.14}$$

但是在 φ 不变的时空区域中，例如现在的情况，确实有 $T^{\mu\nu}_{m;\nu}=0$.

早在 1961 年，Brans 和 Dicke 就已经提出了一个含标量场的引力理论. 与这些较早的理论不同，诱导引力理论包括了对称性自发破缺. 这是关键问题. Brans-Dicke 理论基于马赫原理的考虑，其中的标量场 φ 没有自相互作用，并把物质能动张量的迹作为源. 换句话说，(8.1.2)中的势 $V(\varphi)$ 没有包括进来. 这导致 B-D 理论在观测上不自洽，除非某一参量特别大. 相比之下，诱导引力理论中场 φ 被对称性破缺势固定而有一定值. 只要曲率标量 R 在所考虑的时空区域中不是非常大.

现在回到 ζ 粒子在时空中的传播，这与任何其他粒子不同. 考虑平直空间中的微扰 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+h_{\mu\nu}$，且 $\varphi=v+\zeta$. 我们把运动方程(8.1.5a)和(8.1.7a)展开到一阶：

$$\partial^2\left(h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h\right)=\frac{4}{v}(\eta_{\mu\nu}\partial^2\zeta-\partial_\mu\partial_\nu\zeta), \tag{8.1.5b}$$

$$[\partial^2+V''(\zeta)]\zeta=\frac{1}{2}\epsilon v\partial^2 h, \tag{8.1.7b}$$

这里我们采用了谐和规范

$$\partial_\mu h^\mu_\nu=\frac{1}{2}\partial_\nu h^\mu_\mu.$$

注意引力波的源[(8.1.5b)式右边]是 ζ 的一阶项，这与通常的源是物质场微扰的二阶项的情况不同. 取(8.1.5b)的迹，并代人(8.1.7b)，得到

$$\left(\partial^2+\frac{V''(v)}{1+6\epsilon}\right)\zeta=0. \tag{8.1.7c}$$

这个质量变化可认为是波函数重整化的结果. 因此，平直空间中传播的 ζ 粒子牵动了引力波激发，其幅度为

$$h_{\mu\nu}(k)=-\frac{2}{v}\left(\eta_{\mu\nu}+\frac{2k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\zeta(k). \tag{8.1.15}$$

虽然现在无法用实验区分诱导引力理论和爱因斯坦引力理论，但它使我们预言，在另外的时间和地点可能会显示二者的不同. 在 R-W 宇宙中，标量曲率为

$$R=6[k/\mathscr{R}^2+(1-q)H^2], \tag{8.1.16}$$

式中 H 为哈勃常数，q 为减速因子，R 是标度因子. $k=+1,0,-1$，分别对应于宇宙是闭的，平直的和开的. 当我们逆时间看此宇宙时，$\mathscr{R}$ 增加，(8.1.7a)中的 $\varepsilon\mathscr{R}\varphi$ 项变得越来越重要，它改变 φ 的真空期望值. 这样，引力"常数" G 随时间变化：

$$\frac{\delta G}{G}=-2\frac{\delta v}{v}=\frac{2\varepsilon R}{V''(v)}\sim\left(\frac{H}{m_\zeta}\right)^2. \tag{8.1.17}$$

这一变化完全可以忽略，除非宇宙的"年龄" H^{-1} 变得可以与 ζ 的康普顿时间相比拟. 对 $\delta G/G$ 有贡献的另一效应是当逆时间时宇宙温度的升高. 大致上说，有限温度 T 的效应是在势 $V(\varphi)$ 上加上 $\sim T^2\varphi^2$ 的项，此项导致引力"常数"的改变为

$$\delta G/G\sim T^2/V''(v)\sim(T/m_\zeta)^2. \tag{8.1.18}$$

同样，这一变化也可忽略，除非温度变得与 m_ζ 差不多.

引力常数变化的理论早就有人提出来了. 但在这些理论中，$\delta G/G$ 太大，与观测事实不符. 诱导引力理论不存在这个困难，因为 φ 的期望值本质上被 $V(\varphi)$ 固定. 这一理论和爱因斯坦引力理论只在标曲率和温度值超高时才有明显不同. 因此，在初始奇点附近两个理论给出不同结果. 当然，在奇点附近又必须考虑量子理论了.

§8.2 虫 洞 解[69, 68]

在小超空间近似下，R-W 度规可写为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+a^2(t)\mathrm{d}\Omega_3^2, \tag{8.2.1}$$

式中 $a(t)$ 为标度因子，$\mathrm{d}\Omega_3^2$ 为单位 3 球面上的度规. 引入共形时间 η，使满足

$$\mathrm{d}t=a\mathrm{d}\eta,$$

则(8.2.1)可写为

$$\mathrm{d}s^2=a^2(\eta)(-\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\Omega_3^2). \tag{8.2.2}$$

希格斯势可写为

$$V(\varphi)=\frac{1}{8}\lambda(\varphi^2-v^2)^2, \tag{8.2.3}$$

$\lambda \lesssim 1$.

式中 λ 为无量纲的自耦合常数. 设除希格斯场以外不存在其他物质场，则作用量(8.1.2)化为

$$I = 2\pi^2 \int \mathrm{d}\eta \Big[3\varepsilon \varphi^2 \dot{a}^2 - 3\varepsilon a^2 \dot{\varphi}^2 - 6\varepsilon a \dot{a} \varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{2} a^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{8} \lambda a^4 (\varphi^2 - v^2)^2 \Big]. \tag{8.2.4}$$

拉氏量 $\mathscr{L}$ 为

$$\mathscr{L} = 3\varepsilon \dot{a}^2 \varphi^2 - 3\varepsilon a^2 \dot{\varphi}^2 - 6\varepsilon a \dot{a} \varphi \dot{\varphi} + \frac{1}{2} a^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{8} \lambda a^4 (\varphi^2 - v^2)^2, \tag{8.2.5}$$

其中“$\cdot$”表示对共形时间 η 求导.

为了消除拉氏量 $\mathscr{L}$ 中的交叉项 $a\varphi$, 引入新变量

$$\begin{cases} x = a\varphi, \\ y = \varphi, \end{cases}$$

拉氏量(8.2.5)可重新写为

$$\mathscr{L} = 3\varepsilon \dot{x}^2 - 3\varepsilon x^2 + \frac{6\varepsilon + 1}{2} \frac{x^2}{y^2} \dot{y}^2 - \frac{1}{8} \lambda \frac{x^4}{y^4} (y^2 - v^2)^2, \tag{8.2.6}$$

与位形变量 x, y 相对应的正则动量为

$$P_x = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{x}} = -6\varepsilon \dot{x}, \tag{8.2.7}$$

$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (6\varepsilon + 1) \frac{x^2}{y^2} \dot{y}. \tag{8.2.8}$$

哈密顿量形式为

$$H = \dot{x} P_x + \dot{y} P_y - \mathscr{L} = -\frac{1}{12\varepsilon} P_x^2 + \frac{1}{2(6\varepsilon + 1)} \frac{y^2}{x^2} P_y^2 - 3\varepsilon x^2 + \frac{1}{8} \lambda \frac{x^4}{y^4} (y^2 - v^2)^2. \tag{8.2.9}$$

进行正则量子化，即在(8.2.9)式中作代换 $P_x \sim -i \dfrac{\partial}{\partial x}$, $P_y \sim -i \dfrac{\partial}{\partial y}$, 得到 W-D 方程

$$\left\{\frac{1}{6\epsilon}x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{1}{6\epsilon+1}y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}-6\epsilon x^4+\frac{1}{4}\lambda\frac{x^6}{y^4}(y^2-v^2)^2\right\}$$
$$\Psi(x, y)=0. \tag{8.2.10}$$

当希格斯标量场 φ 的取值接近真空期待值时，即 $\varphi=y\to v$ 时，W-D 方程(8.1.2)可近似写为

$$\frac{1}{6\epsilon}x^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}-\frac{1}{6\epsilon+1}y^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}-6\epsilon x^4\Psi=0. \tag{8.2.11}$$

分离变量

$$\Psi(x, y)=\Psi_x(x)\Psi_y(y),$$

上式变为

$$x^2\frac{d\Psi_x}{dx^2}+(E-36\epsilon^2x^4)\Psi_x=0, \tag{8.2.12}$$

$$\frac{1}{6\epsilon+1}y^2\frac{d^2\Psi_y}{dy^2}+\frac{E}{6\epsilon}\Psi_y=0, \tag{8.2.13}$$

其中 E 为常数.

我们所关心的是波函数中与尺度因子 a 有关的部分，即 $\Psi_x(x)$. 为此可以用 WKB 近似方法求解方程(8.2.12). 令 $\Psi_x=e^{iS(x)}$，(8.2.12)式变为

$$-x^2\left(\frac{dS}{dx}\right)^2+E-36\epsilon^2x^4=0. \tag{8.2.14}$$

当 $x<\left(\frac{E}{36\epsilon^2}\right)^{1/4}$，即 $a<\frac{1}{v}\cdot\left(\frac{E}{36\epsilon^2}\right)^{1/4}$时，

$$\Psi_x=\exp\left[i\int\frac{1}{x}\sqrt{E-36\epsilon^2x^4}dx\right]. \tag{8.2.15}$$

这是振荡形式的波函数，对应经典允许区，即洛伦兹区.

当 $x>\left(\frac{E}{36\epsilon^2}\right)^{1/4}$，即 $a>\frac{1}{v}\left(\frac{E}{36\epsilon^2}\right)^{1/4}$时，

$$\Psi_x=\exp\left[-\int\frac{1}{x}\sqrt{36\epsilon^2x^4-E}dx.\right] \tag{8.2.16}$$

即

$$\Psi_x=\exp\left[-\frac{\sqrt{E}}{2}\left\{\sqrt{\frac{36\epsilon^2x^4}{E}-1}-\arctan\sqrt{\frac{36\epsilon^2x^4}{E}-1}\right\}\right]. \tag{8.2.17}$$

这是指数形式的波函数，对应经典禁区，即欧几里德区. 在该区

域内发生的是量子过程，允许空间拓扑变化，允许出现连接两个大的时空区域的虫洞或子宇宙从母宇宙中分离出来. 从(8.2.17)式可以看出，当 $a\to\infty$，即 $x\to\infty$时，波函数 Ψ_x 指数衰减为零，这是描述虫洞的波函数.

设欧氏作用量为 I_E，则洛仑兹作用量 I_L 为

$$I_L = iI_E,$$

引入 $\tau = i\eta$，我们有

$$I_E = -2\pi^2\int d\tau\left[3\varepsilon a^2\varphi^2 + 3\varepsilon a^2\varphi^2 + 6\varepsilon a a\varphi\varphi - \frac{1}{2}a^2\varphi^2 - \frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2\right], \quad (8.2.18)$$

式中圆点表示对 τ 求导数.

由上式取变分，可以得到经典运动方程. 首先对 a 取变分，得到 a-方程：

$$6\varepsilon a\varphi^2 - (1-6\varepsilon)a\varphi^2 - \frac{\lambda}{2}a^3(\varphi^2 - v^2)^2 - 12\varepsilon\dot{a}\varphi\dot{\varphi} - 6\varepsilon a\varphi^2 - 6\varepsilon a\varphi\varphi = 0. \quad (8.2.19)$$

然后再对 φ 变分得到 φ-方程

$$6\varepsilon a^2\varphi - \frac{1}{2}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)\varphi - 6\varepsilon a a\varphi + 2aa\varphi + a^2\varphi = 0. \quad (8.2.20)$$

经过适当变换后，可把(6.2.19)和(6.2.20)式改写为

$$a^2\varphi^2 + 2aa\varphi\varphi + a^2\varphi\varphi - \frac{1}{2(1+6\varepsilon)}\lambda a^4 v^2(\varphi^2 - v^2) = 0, \quad (8.2.21)$$

$$6\varepsilon a^2\varphi^2 - a^2\varphi^2 - 6\varepsilon aa\varphi^2 - \frac{\lambda}{2}a^4(\varphi^2 - v^2)\left(\varphi^2 - \frac{v^2}{1+6\varepsilon}\right) = 0. \quad (8.2.22)$$

在希格斯场的真空附近，$\varphi\to v$，$\varphi^2\to v^2\to 0$，经典的 a-方程和 φ-方程分别为

$$a^2\varphi^2 + 2aa\varphi\varphi + a^2\varphi\varphi = 0, \quad (8.2.23)$$

$$6\varepsilon a^2\varphi^2 - a^2\varphi^2 - 6\varepsilon aa\varphi^2 = 0. \quad (8.2.24)$$

由(8.2.23)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(a^2\varphi\varphi)=0$$

或守恒量 $a^2\varphi\varphi\equiv q$, (8.2.25)

其中 q 为一不随时间 τ 而改变的守恒荷.

由(8.2.24)式可得

$$-a+a-\frac{q^2}{6\varepsilon a^3\varphi^4}=0. \tag{8.2.26}$$

定义函数为

$$f(a)=a^2-1.$$

这样可以用 $f(a)$对 a 的一阶导数来取代 $a(\tau)$对 τ 的二阶导数，把二阶常微分方程(8.2.26)简化为 $f(a)$对 a 的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}a}=2a-\frac{q^2}{3\varepsilon a^3v^4}, \tag{8.2.27}$$

其解为 $$f(a)=a^2+\frac{q^2}{6\varepsilon a^2v^4}+A. \tag{8.2.28}$$

式中 A 为积分常数.

$f(a)$作为虫洞解的判据是，在标度因子 a 取极大值 $a_{\max}$和极小值 $a_{\min}$两种情况下，$f(a)$均取值-1，并且 $f(a)$在 $a_{\max}$与 $a_{\min}$之间光滑地变化.

当 $f(a)=-1$ 时，由(29)式得

$$a^4+(A+1)a^2+\frac{q^2}{6\varepsilon v^4}=0, \tag{8.2.29}$$

其解为 $$a^2=\frac{1}{2}\left[-(A+1)\pm\sqrt{(A+1)^2-\frac{4q^2}{6\varepsilon v^4}}\right]. \tag{8.2.30}$$

由于 $a\geqslant 0$，故应要求 $A\leqslant-(1+\delta)$，其中 $\delta\equiv\frac{2q}{\sqrt{6\varepsilon}v^2}$，

(8.2.30)式可改写为

$$a^2=\frac{1}{2}\left[|1+A|\pm\sqrt{(1+A)^2-\frac{4q^2}{6\varepsilon v^4}}\right]. \tag{8.2.31}$$

当$|1+A|\gg\delta$ 时，

$$a_{\max}=\sqrt{|1+A|}, \tag{8.2.32}$$

$$a_{\min}=\left[\frac{1}{|1+A|},\ \frac{q^2}{6\varepsilon v^4}\right]^{1/2}. \tag{8.2.33}$$

由于希格斯场的真空期待值 v 很大，所以 $a_{\min}$ 很小，即 $a_{\max}\gg a_{\min}$，这正是一个虫洞的几何，它描述一个喉直径为 $a_{\min}$ 的虫洞把二个标度因子为 $a_{\max}$ 的母宇宙或标度因子为 $a_{\max}$ 的同一母宇宙的两部分连结起来.

由(8.2.33)式可知，仅当守恒荷 q 不为零时才可能存在虫洞解，而守恒荷的大小则决定于标度因子和希格斯场在真空附近的性态.

如果要求 $a_{\min}$ 不小于普朗克长度 l_p，由(8.2.33)式应要求

$$\left(\frac{1}{|1+A|}\ \frac{q^2}{6\varepsilon v^4}\right)^{1/2}\geqslant l_p$$

或 $$A\geqslant-\left(1+\frac{1}{l_p^2}\ \frac{q^2}{6\varepsilon v^4}\right),$$

亦即 $$-\left(1+\frac{\delta^2}{l_p^2}\right)\leqslant A\ll-(1+\delta).$$

自洽性要求

$$q\sqrt{\varepsilon}\gg\frac{1}{10}.$$

这个条件是可以被满足的.

下面采用维林金的边界条件，解 W-D 方程，从而求出隧道效应波函数.

现在，小超空间的坐标为 a，φ，它们的取值范围分别为

$$0<a<\infty;\quad -\infty<\varphi<\infty.$$

$a=0$，φ 有限是非奇异边界. 其他的超空间边界是奇异边界. 根据(8.2.5)式，求出与位形变量 a，φ 相对应的正则动量

$$P_a=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \dot{a}}=-6\varepsilon\dot{a}\varphi-6\varepsilon a\dot{\varphi}\varphi,$$

$$P_\varphi=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\varphi}}=-6\varepsilon a\dot{a}\varphi^2+a^2\dot{\varphi}.$$

由 $H=\dot{a}P_a+\dot{\varphi}P_\varphi-\mathscr{L}$ 计算出哈密顿量，正则量子化后，得到宇宙波函数满足的 W-D 方程

$$\left\{\frac{1}{(6\epsilon+1)a^2\varphi^2}\left[\frac{a^2}{12\epsilon}\frac{\partial^2}{\partial a^2}-\frac{1}{2}\varphi^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a\varphi\frac{\partial^2}{\partial a\partial\varphi}\right]-\right.$$

$$\left.3\epsilon a^2\varphi^2+\frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2-v^2)^2\right\}\Psi(a,\varphi)=0. \qquad (8.2.34)$$

要求在 $a=0$ 处，波函数有界，但方程(8.2.34)等号左端 $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}$ 和 $\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi\partial a}$ 两项前的系数在 $a=0$ 处均发散，只有当波函数 $\Psi(a,\varphi)$ 在 a 趋于零时不依赖于 φ，即 $\left.\frac{\partial\Psi(a,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{a=0}=0$ 情况下，才可以略去(8.2.34)式中的上述两项，而把方程写为

$$\frac{1}{12\epsilon\varphi^2}\frac{\partial^2\overline{\Psi}(a,\varphi)}{\partial a^2}-(1+6\epsilon)\times$$

$$\left[3\epsilon a^2\varphi^2-\frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2-v^2)^2\right]\overline{\Psi}(a,\varphi)=0. \qquad (8.2.35)$$

用 WKB 法对(8.2.35)式近似求解.

令 $\overline{\Psi}(a,\varphi)\sim\exp[\mathrm{i}S(a,\varphi)]$，当 $a^2>\frac{24\epsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)}$ 时，存在振荡形式的解，对应经典允许区.

$$\overline{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left\{\pm\mathrm{i}\frac{48\sqrt{1+6\epsilon}\epsilon^2\varphi^4}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\left[\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\epsilon\varphi^2}-1\right]^{3/2}\right\}.$$

由于在超空间的奇异边界上只允许存在外行波，所以上式应取“—”号.

$$\overline{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left\{-\mathrm{i}\frac{48\sqrt{1+6\epsilon}\epsilon^2\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\cdot\left[\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\epsilon\varphi^2}-1\right]^{3/2}\right\}. \qquad (8.2.36)$$

当 $a^2<\frac{24\epsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}$ 时，存在指数形式的解，对应经典禁区，

$$\overline{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left[\frac{48\epsilon^2\varphi^4\sqrt{1+6\epsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\cdot\left(1-\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\epsilon\varphi^2}\right)^{3/2}\right]. \qquad (8.2.37)$$

为了使 $a\to 0$ 时，$\dfrac{\partial\bar{\Psi}(a,\varphi)}{\partial\varphi}\to 0$，必须适当选择 $A(\varphi)$. 令

$$A(\varphi)=\exp\left(-\frac{48\varepsilon^2\varphi^4\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\right). \tag{8.2.38}$$

最后，可把诱导引力中的隧道波函数表示成

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)=A(\varphi)\exp\left\{-\frac{48\varepsilon^2\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\varphi^4\cdot\left[1-\left(1-\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2}\right)^{3/2}\right]\right\}$$

$$\left(当\ a^2<\frac{24\varepsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)}\right). \tag{8.2.39}$$

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)=\exp\left(-\frac{48\varepsilon^2\sqrt{1+6\varepsilon}\varphi^4}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\right)\exp\left\{-i\frac{48\varepsilon^2\sqrt{1+6\varepsilon}}{\lambda(\varphi^2-v^2)^2}\varphi^4\times\left[\frac{\lambda a^2(\varphi^2-v^2)^2}{24\varepsilon\varphi^2}(\varphi^2-v^2)^2-1\right]^{3/2}\right\}.\left(当\ a^2>\frac{24\varepsilon\varphi^2}{\lambda(\varphi^2-v^2)}\right), \tag{8.2.40}$$

当 a 很小时，(8.2.39)式可近似地写为

$$\bar{\Psi}(a,\varphi)\approx\exp(-2\varepsilon\sqrt{1+6\varepsilon}\varphi^2a^2). \tag{8.2.41}$$

所得到的解显然是非奇异的.

§8.3 Hosoya 量子化[30,71]

在文[30]中，Hosoya 在爱因斯坦理论中对宇宙场进行三次量子化，证明了宇宙存在多重产生的必然性；宇宙从“无”到有产生的几率分布为普朗克分布. 在文[70]中，朱建阳在诱导引力理论中用类似方法对宇宙场进行三次量子化. 结果表明，在没有其他物质场存在的情况下，在希格斯真空处宇宙仍然可以从“无”到有经过量子隧道过程而创生，创生的几率分布仍然遵守普朗克分布.

由上一节可知，诱导引力的作用量为

$$I=2\pi^2\int\mathrm{d}_\eta\left[3\varepsilon\varphi^2a^2-3\varepsilon a^2\varphi^2-6\varepsilon aa\varphi\varphi+\frac{1}{2}a^2\varphi^2-\right.$$

$$\frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2, \tag{8.3.1}$$

拉氏量为

$$\mathscr{L} = 3\varepsilon a^2\varphi^2 - 3\varepsilon a^2\varphi^2 - 6\varepsilon aa\varphi\varphi + \frac{1}{2}a^2\varphi^2 - \frac{1}{8}\lambda a^4(\varphi^2 - v^2)^2, \tag{8.3.2}$$

为了消除拉氏量 $\mathscr{L}$ 中的交叉项 $a\varphi$，引入新变量

$$x = a\varphi,\ y = \varphi. \tag{8.3.3}$$

则拉氏量可重新写为

$$\mathscr{L} = 3\varepsilon x^2 - 3\varepsilon x^2 + \frac{6\varepsilon + 1}{2}\frac{x^2}{y^2}y^2 - \frac{1}{8}\lambda\frac{x^4}{y^4}(y^2 - v^2)^2. \tag{8.3.4}$$

与位形变量 x，y 相对应的正则动量为

$$P_x = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial x} = -6\varepsilon x,$$

$$P_y = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial y} = (6\varepsilon + 1)\frac{x^2}{y^2}y. \tag{8.3.5}$$

哈密顿量形式为

$$H = xP_x + yP_y - \mathscr{L} =$$

$$-\frac{1}{12\varepsilon}P_x^2 + \frac{1}{2(6\varepsilon + 1)}\frac{y^2}{x^2}P_y^2 - 3\varepsilon x^2 + \frac{1}{8}\lambda\frac{x^4}{y^4}(y^2 - v^2)^2. \tag{8.3.6}$$

引入正则量子化

$$P_x \sim -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x},\ P_y \sim -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}, \tag{8.3.7}$$

但在由 c 数变为 q 数时，会出现排列上的不确定性，例如

$$(-6\varepsilon x)^2 = (-6\varepsilon x)(-6\varepsilon x) = P_x^2 =$$

$$\frac{1}{x^p}(-6\varepsilon x)x^p(-6\varepsilon x) =$$

$$\frac{1}{x^p}P_x x^p P_x,\ (p = 0, 1, 2, \cdots),$$

故一般有

$$P_x^2 = -\frac{1}{x^{p_1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{p_1}\frac{\partial}{\partial x}\right),\ p_1 = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$P_y^2 = -\frac{1}{y^{p_2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{p_2}\frac{\partial}{\partial y}\right),\ p_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{8.3.8}$$

其中 p_1，p_2 均表示算符次序因子的模糊度. 所以在一般情况下，Wheeler-Dewitt 方程为

$$\left[x^2\frac{1}{x^{p_1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{p_1}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{6\varepsilon}{6\varepsilon+1}y^2\frac{1}{y^{p_2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{p_2}\frac{\partial}{\partial y}\right) - \right.$$

$$\left. -(6\varepsilon)^2x^4 + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon\frac{x^6}{y^4}(y^2-v^2)^2\right]\Psi(x,\ y) = 0. \tag{8.3.9}$$

作变量代换

$$\alpha = \ln x,\ \beta = \ln y, \tag{8.3.10}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\alpha} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial\alpha},\quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\beta} = \frac{1}{y}\frac{\partial}{\partial\beta},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial\alpha^2},\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial\beta^2}, \tag{8.3.11}$$

则 W-D 方程变为

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + (p_1-1)\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{6\varepsilon}{6\varepsilon+1}\left[\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + (p_2-1)\frac{\partial}{\partial\beta}\right] - \right.$$

$$\left.(6\varepsilon)^2e^{4\alpha} + \frac{3}{2}\lambda\varepsilon e^{6\alpha-4\beta}(e^{2\beta}-v^2)^2\right\}\Psi(\alpha,\ \beta) = 0. \tag{8.3.12}$$

当希格斯场 φ 的取值接近真空期待值时，即 $\varphi = y = e^{\beta} \to v$ 时，W-D 方程可近似写为

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \rho^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - U(\alpha)\right]\Psi(\alpha,\ \beta) = 0, \tag{8.3.13}$$

其中 $\rho^2 = \frac{6\varepsilon}{6\varepsilon+1}$，$U(\alpha) = (6\varepsilon)^2e^{4\alpha}$.

这里已对算符次序因子的模糊度作了最简单的选择，即令 $p_1 = p_2 = 1$. 方程(8.3.13)是一个双曲型二阶偏微分方程，如将其中的变量 $\alpha = \ln x$ 和 $\beta = \ln y$ 分别看作是小超空间的时间变量和空间变量，则显然不可能由这个方程构造一种其时间分量为正定的守恒概率流. 为了克服宇宙波函数 $\Psi(\alpha,\ \beta)$ 的这种概率解释困难，下

面将作进一步的量子化处理[30,71].

按照正则量子化的标准程序，我们重新将宇宙波函数 $\Psi(\alpha,\beta)$看作是小超空间中的宇宙场. 为了简单，假定 Ψ 是一种中性标量场，因而在诱导引力理论框架下的宇宙场方程形式上与(8.3.13)式相同，即

$$\frac{\partial^2\psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha^2}-\rho^2\frac{\partial^2\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\beta^2}-U(\alpha)\Psi(\alpha,\beta)=0. \tag{8.3.14}$$

由场方程(8.3.14)，构造如下形式的作用量：

$$I'=\int \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta \mathscr{L}'=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right)^2-\rho^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)^2+U(\alpha)\Psi^2\right], \tag{8.3.15}$$

其中拉氏量为

$$\mathscr{L}'=\mathscr{L}'\left(\Psi,\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha},\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right)^2-\rho^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)^2+U(\alpha)\Psi^2\right]. \tag{8.3.16}$$

则由哈密顿原理

$$\delta I'=0, \tag{8.3.17}$$

可导得 $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial(\partial\Psi/\partial\alpha)}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial(\partial\Psi/\partial\beta)}-\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial\Psi}=0. \tag{8.3.18}$$

将拉氏量(8.3.16)式代入(8.3.18)式，显然可使场方程(8.3.14)重现. 这样，就可以由这特定的拉氏量 $\mathscr{L}'$ 来确定对应于场 $\Psi(\alpha,\beta)$的正则动量. 因为 α 被当作是时间变量，则由定义，$\Psi(\alpha,\beta)$的正则动量为

$$P_\Psi\equiv\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial(\partial\Psi/\partial\alpha)}=\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}. \tag{8.3.19}$$

将宇宙场的动力学变量 Ψ 和 $P_\Psi=\dfrac{\partial\Psi}{\partial\alpha}$ 换成 Hilbert 空间的厄密算符，它们满足如下形式的对易关系(等时对易子)：

$$\left[\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha},\ \Psi(\alpha,\beta')\right]=-\mathrm{i}\delta(\beta-\beta'),$$

$$\left[\frac{\partial\Psi(\alpha,\beta)}{\partial\alpha},\ \frac{\partial\Psi(\alpha,\beta')}{\partial\alpha}\right]=0,$$

$$[\Psi(\alpha,\beta),\ \Psi(\alpha,\beta')]=0. \tag{8.3.20}$$

由此则可将作用量(8.3.15)式所描述的系统正则量子化.

下面转向对场方程(8.3.14)作初步的讨论. 由于场方程(8.3.14)中的势项只与时间变量 α 有关，故有如下形式的特解(正频模解)：

$$u_p(\alpha,\beta)=N\exp\left(\mathrm{i}p\frac{\beta}{\rho}\right)Z(\alpha), \tag{8.3.21}$$

其中 $Z(\alpha)$满足方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2Z(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2}+[p^2-(6\varepsilon e^{2\alpha})^2]Z(\alpha)=0. \tag{8.3.22}$$

只须令

$$\xi=3\varepsilon e^{2\alpha},$$

则方程(8.3.22)转化为

$$\xi^2\frac{\mathrm{d}^2Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}+\xi\frac{\mathrm{d}Z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}-(\xi^2+\nu^2)Z(\xi)=0. \tag{8.3.23}$$

此为虚宗量 Bessel 方程，其中 $\nu=\pm\mathrm{i}\frac{|p|}{2}$. 方程(8.3.23)的两个线性无关解是第一类和第二类虚宗量 Bessel 函数，即

$$I_\nu(\xi)=\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}\xi),\ K_\nu(\xi)=\frac{\pi\mathrm{i}^{\nu+1}}{2}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}\xi), \tag{8.3.24}$$

其中 J_ν 为第一类 Bessel 函数，$H_\nu^{(1)}$ 为第一类 Hankel 函数.

显然用变数 p 标记的特解(8.3.21)式构成宇宙场方程(8.3.14)的正频模解集$\{u_p(\alpha,\beta)\}$，其中模函数必须满足如下形式的正交归一条件：

$$(u_p(\alpha,\beta),\ u_q(\alpha,\beta))=$$

$$-\mathrm{i}\int\mathrm{d}\beta\left[u_p(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}u_q^*(\alpha,\beta)-\right.$$

$$\left.u_q^*(\alpha,\beta)\frac{\partial}{\partial\alpha}u_p(\alpha,\beta)\right]=\delta_{pq}. \tag{8.3.25}$$

因而可将宇宙场 $\Psi(\alpha, \beta)$ 按 $\{u_p(\alpha, \beta)\}$ 展开为

$$\Psi(\alpha, \beta) = \sum_p [c_p u_p(\alpha, \beta) + c_p^\dagger u_p^*(\alpha, \beta)], \quad (8.3.26)$$

显然这里定义了一种由湮没算符 c_p 和产生算符 $c_p^\dagger$ 描述的宇宙 Fock 空间. 算符 c_p, $c_p^\dagger$ 互为厄密共轭，其对易关系可由 ψ, P_ψ 的等时对易子(8.3.20)式导出为

$$[c_p, c_{p'}^\dagger] = \delta_{pp'}, \; [c_p, c_{p'}] = [c_p^\dagger, c_{p'}^\dagger] = 0. \quad (8.3.27)$$

若定义基态 $|0\rangle$（"nothing"态）

$$c_p|0\rangle = 0, \; \forall \; p \in R. \quad (8.3.28)$$

则宇宙 Fock 空间的一般占有态可表示为

$$\{c_{p_1}^\dagger c_{p_2}^\dagger \cdots |0\rangle\}, \quad (8.3.29)$$

由于非静态度规(8.2.1)式使得宇宙场方程(8.3.14)中的势项显含时间，因而，可定义与过去某一初态相对应的 in 场和与未来某一末态相对应的 out 场，而 in 场和 out 场的"失配"将导致宇宙的创生，其创生宇宙的分布规律可通过计算 in, out 场之间的 Bogolubov 变换而得到.

注意到当 $\alpha \to -\infty$（即 $\xi \to 0$），势项 $V(\alpha)$ 渐近为零，因而满足方程(8.3.14)的渐近平直的正频模函数应该为

$$u_p(\alpha, \beta) \to \exp\left(\mathrm{i} p \frac{\beta}{\rho} - \mathrm{i}|p|\alpha\right). \quad (8.3.30)$$

首先考虑当 $\nu = +\mathrm{i}\dfrac{|p|}{2}$ 时，因为

$$e^{-\mathrm{i}|p|\alpha} = e^{-2\nu\alpha} = (e^{2\alpha})^{-\nu} \sim \xi^{-\nu}, \; \left(\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right),$$

而 $\quad I_\nu^*(\xi) = [\mathrm{i}^{-\nu} J_\nu(\mathrm{i}\xi)]^* \sim \xi^{-\nu}$,（当 $\xi \to 0$ 时）

故 in 场正频模函数应取为

$$u_p^{\text{in}}(\alpha, \beta) = N_1 \exp\left(\mathrm{i} p \frac{\beta}{\rho}\right) I_\nu^*(\xi), \; \left(\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right). \quad (8.3.31)$$

至于 out 场的正频模函数，显然应该作如下的选择：

$$u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta) = N_2 \exp\left(\mathrm{i} p \frac{\beta}{\rho}\right) K_\nu^*(\xi), \; \left(\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right), \quad (8.3.32)$$

这是因为当 $\alpha\to+\infty$ 时，上式的渐近形式为

$$u_p^{\text{out}}(\alpha,\ \beta)\to\exp\left(\mathrm{i}p\ \frac{\beta}{\rho}\right)\exp(-\alpha-3\varepsilon e^{2\alpha}), \tag{8.3.33}$$

因而，它不但是动量算符 $p_\alpha=-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\alpha}$ 具有负本征值的本征态，而且，由于

$$P_\alpha=\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\alpha}=-6\varepsilon e^{2\alpha}\alpha, \tag{8.3.34}$$

使得这种模式在经典上对应于膨胀宇宙.

(8.3.31)和(8.3.32)式中的 N_1 和 N_2 是归一化常数.利用关系式：

$$\begin{aligned}
&J_\nu^*(z)=J_{-\nu}(-z)=e^{-i\nu\pi}J_{-\nu}(z),\\
&H_\nu^{(1)}(z)=\frac{e^{-i\nu\pi}J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi},\\
&H_\nu^{(1)*}(z)=\frac{e^{-2i\nu\pi}J_{-\nu}(z)-e^{i\nu\pi}J_\nu(z)}{-\mathrm{i}\sin\nu\pi}\\
&J_\nu(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_{-\nu}(z)-J_{-\nu}(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\nu(z)=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z}
\end{aligned} \tag{8.3.35}$$

(ν, z 均为复数)

及归一化条件(8.3.25)式则可求得

$$\begin{aligned}
&N_1=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/2}\rho^{-1/2}\exp(-|p|\pi/2)[\sinh(|p|\pi/2)]^{-1/2},\\
&N_2=\left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2}\rho^{-1/2}[\cosh(|p|\pi/2)]^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{8.3.36}$$

作类似的分析可以得到，当取 $\nu=-\mathrm{i}\dfrac{|p|}{2}$ 时，对应于 in 场和 out 场的正频模分别为

$$\left.\begin{aligned}
&u_p^{\text{in}}(\alpha,\ \beta)=N_1'\exp\left(\mathrm{i}p\ \frac{\beta}{\rho}\right)I_\nu(\xi),\\
&u_p^{\text{out}}(\alpha,\ \beta)=N_2'\exp\left(\mathrm{i}p\ \frac{\beta}{\rho}\right)K_\nu(\xi).
\end{aligned}\right\}\left(\nu=-\mathrm{i}\frac{|p|}{2}\right) \tag{8.3.37}$$

显然，$u_p^{\text{in}}(\alpha,\ \beta)$ 和 $u_p^{\text{out}}(\alpha,\ \beta)$ 也应满足归一化条件(8.3.25)式.然而，因为

$$(u_p^{\text{in}},\ u_q^{\text{in}})=\frac{4}{\pi}N_1'^2\delta_{pq}\rho\exp(-|p|\pi)\sinh(|p|\pi/2),$$

$$(u_p^{\text{out}'}, u_q^{\text{out}'}) = -4\pi N_2'^2 \rho \delta_{pq} \cosh(|p|\pi/2). \tag{8.3.38}$$

由此可见，虽然 $u_p^{\text{in}'}(\alpha, \beta)$能归一，但无论如何选择常数 N_2' 都不能使 $u_p^{\text{out}'}(\alpha, \beta)$归一. 所以，由于归一化条件的限制，必须舍去 $\nu = -\mathrm{i}\frac{|p|}{2}$，而只取 $\nu = +\mathrm{i}\frac{|p|}{2}$.

现在，可将满足(8.3.14)式的宇宙场 $\Psi(\alpha, \beta)$分别按正频 in 模和 out 模展开为

$$\Psi(\alpha, \beta) = \sum_p [c_p^{\text{in}} u_p^{\text{in}}(\alpha, \beta) + c_p^{\text{in}\dagger} u_p^{\text{in}*}(\alpha, \beta)], \tag{8.3.39}$$

$$\Psi(\alpha, \beta) = \sum_p [c_p^{\text{out}} u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta) + c_p^{\text{out}\dagger} u_p^{\text{out}*}(\alpha, \beta)], \tag{8.3.40}$$

其中 c_p^{in}，$c_p^{\text{in}\dagger}$ 和 c_p^{out}，$c_p^{\text{out}\dagger}$ 分别为对应于 in 场和 out 场的湮没算符和产生算符，它们满足(8.3.27)式的对易关系. 而 in 真空 $|0, \text{in}\rangle$ 和 out 真空 $|0, \text{out}\rangle$则分别由下式定义：

$$c_p^{\text{in}}|0, \text{in}\rangle = 0, \ \forall\ p \in R, \tag{8.3.41}$$

$$c_p^{\text{out}}|0, \text{out}\rangle = 0, \ \forall\ p \in R. \tag{8.3.42}$$

in 场与 out 场之间的 Bogolubov 变换由下式定义：

$$u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta) = \sum_q [c_1(p, q) u_q^{\text{in}}(\alpha, \beta) + c_2(p, q) u_q^{\text{in}*}(\alpha, \beta)]. \tag{8.3.43}$$

作内积$(u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta), u_q^{\text{in}}(\alpha, \beta))$和$(u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta), u_q^{\text{in}*}(\alpha, \beta))$可求得 Bogolubov 变换系数为

$$c_1(p, q) = -\mathrm{i}\left(\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-2|p|\pi}}\right)^{1/2} \delta_{pq}, \tag{8.3.44}$$

$$c_2(p, q) = \mathrm{i}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2|p|\pi} - 1}\right)^{1/2} \delta_{p_1 - q_0}, \tag{8.3.45}$$

显然(8.3.44)和(8.3.45)式满足

$$(u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta), u_p^{\text{out}}(\alpha, \beta)) = \sum_q (|c_1(p, q)|^2 - |c_2(p, q)|^2) = 1. \tag{8.3.46}$$

由(8.3.39)，(8.3.40)和(8.3.43)式，还可得到$\{c_p^{\text{out}}, c_p^{\text{out}\dagger}\}$

与$\{c_p^{\text{in}}, c_{p_1}^{\text{in}\dagger}\}$之间的变换关系为

$$c_p^{\text{out}}=\frac{1}{AA^*-BB^*}(c_p^{\text{in}}u_p^{\text{in}}A^*-c_p^{\text{in}\dagger}u_p^{\text{in}*}B),$$
$$c_p^{\text{out}\dagger}=\frac{1}{AA^*-BB^*}(c_p^{\text{in}\dagger}u_p^{\text{in}*}A-c_p^{\text{in}}u_p^{\text{in}}B^*),\tag{8.3.47}$$

其中 $A=\sum\limits_q c_1(p, q)u_q^{\text{in}}(\alpha, \beta)$, $B=\sum\limits_q c_2^*(p, q)u_q^{\text{in}}(\alpha, \beta)$.

于是，对应于第 p 模式，宇宙从"nothing"(即 in 真空)中创生的平均数目为

$$N_p=\langle 0, \text{in}|c_p^{\text{out}\dagger}c_p^{\text{out}}|0, \text{in}\rangle=\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi|p|}-1}.\tag{8.3.48}$$

如将上式改写成

$$N_p=\frac{1}{\exp(\epsilon/k_{\mathrm{B}}T)-1},\tag{8.3.49}$$

其中 $\epsilon=c|p|$, $T=c/2\pi k_{\mathrm{B}}$, k_{B} 为 Boltzmann 常数. 很显然，这是一种 Planck 分布，表明创生宇宙遵从温度正比于 c 的 Planck 分布规律.

下面探讨模式的标记 p 的意义. 希格斯场的真空处，体系的哈密顿量用变量 $\alpha=\ln(a\varphi)$和 $\beta=\ln\varphi$可以表示为

$$H=-\frac{1}{12\epsilon\mathrm{e}^{2\alpha}}P_\alpha^2+\frac{1}{2(6\epsilon+1)\mathrm{e}^{2\alpha}}P_\beta^2-3\epsilon\mathrm{e}^{2\alpha},\tag{8.3.50}$$

其中 P_α, P_β 为与变量 α, β 相对应的正则动量

$$P_\alpha=-6\epsilon\mathrm{e}^{2\alpha}\dot{\alpha}, P_\beta=(6\epsilon+1)\mathrm{e}^{2\alpha}\dot{\beta}.\tag{8.3.51}$$

注意到动量算符 $P_\beta=-\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial\beta}$的本征值为$\sqrt{\dfrac{6\epsilon+1}{6\epsilon}}p$，因而 p 与 φ 场的经典能量

$$E=\frac{p^2}{12\epsilon\mathrm{e}^{2\alpha}}=\frac{p^2}{12\epsilon a^2\varphi^2}\tag{8.3.52}$$

有关. 由此可见，创生宇宙的分布规律(8.3.48)式，实际上是代表以 p 为标记的具有一定能量密度的那些宇宙的平均数目.

显然，本节得到的创生宇宙，即在无任何其他物质存在时，在希格斯场的真空处宇宙仍然可以通过量子隧道效应从"无"到有

地创生，这在真空经典爱因斯坦引力理论中是得不到的.这表明，在引力的量子效应不能忽略的区域，诱导引力理论和爱因斯坦引力理论有显著的区别.

§8.4 σ模型的宇宙波函数

本节讨论诱导引力理论中具有标量-旋量相互作用的σ模型的宇宙波函数[47].

诱导引力理论的拉格朗日具有形式

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\varepsilon\phi^2R-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi-V(\phi). \tag{8.4.1}$$

诱导引力常数 $G_{\text{ind}}=(8\pi\varepsilon\phi^2)^{-1}$，势在 ϕ_0 处有稳定极小值，并且在此处有 $G_{\text{ind}}(\phi_0)=G_N$.

R-W 度规具有形式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}t^2-\frac{a^2(t)}{\left(1+\frac{k}{4}r^2\right)^2}[\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2]. \tag{8.4.2}$$

我们考虑闭宇宙，$k=1$.

σ模型的拉格朗日具有形式

$$\mathscr{L}_m=\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\widetilde{\phi}\partial_\nu\widetilde{\phi}+\frac{m^2}{2}\widetilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{4}\widetilde{\phi}^4+\frac{i}{2}[\bar{\psi}r^\mu\nabla_\mu\psi-(\nabla_\mu\bar{\psi})r^\mu\psi]-g\bar{\psi}\widetilde{\phi}\psi. \tag{8.4.3}$$

这里 $\widetilde{\phi}$ 为标量场，ψ 为旋量场，$\lambda\sim g^2\ll1$，m 为标量场的质量，且 $\widetilde{\phi}=\widetilde{\phi}(t)$，$\psi=\psi(t)$，$\bar{\psi}=\psi^+\bar{r}_0$，$\bar{r}_0$ 为平空间的 Dirac 矩阵，ψ^+ 为 ψ 的共轭转置，r^μ 为弯曲空间 Dirac 矩阵，$\nabla_\mu=\partial_\mu+\Gamma_\mu$，$\partial_\mu$ 为普通微分，$\Gamma_\mu=-\frac{1}{4}r^\nu r_{\mu;\nu}$.

我们知道平空间 Dirac 矩阵满足关系：

$$\bar{r}_i\bar{r}_j+\bar{r}_j\bar{r}_i=2\eta_{ij}. \tag{8.4.4}$$

其中 $\eta_{ij}=\mathrm{diag}(1，-1，-1，-1)$.

式中 $\bar{r}_0$ 和 $\bar{r}_j$ 分别具有形式

$$\tilde{\gamma}_0=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},\ \tilde{\gamma}_j=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix},\ j=1,\ 2,\ 3. \tag{8.4.5}$$

这里 I 为 2×2 单位矩阵，σ_j 为 Pauli 矩阵.

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

而弯曲空间 Dirac 矩阵满足关系

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu}. \tag{8.4.6}$$

我们有

$$\gamma^0=\tilde{\gamma}_0,\quad \gamma^1=-\frac{1+\frac{1}{4}r^2}{a(t)}\tilde{\gamma}_1,$$

$$\gamma^2=-\frac{1+\frac{1}{4}r^2}{a(t)r}\tilde{\gamma}_2,\quad \gamma^3=-\frac{1+\frac{1}{4}r^2}{a(t)r\sin\theta}\tilde{\gamma}_3. \tag{8.4.7}$$

$$\gamma_0=\tilde{\gamma}_0,\quad \gamma_1=\frac{a(t)}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_1,$$

$$\gamma_2=\frac{a(t)r}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_2,\quad \gamma_3=\frac{a(t)r\sin\theta}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_3. \tag{8.4.8}$$

由此，经过计算，可以得到

$$\Gamma_0=0,$$

$$\Gamma_1=\frac{1}{2}\ \frac{a(t)}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1,$$

$$\Gamma_2=\frac{1}{2}\left[\frac{a(t)r}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_1-\frac{1-\frac{1}{4}r^2}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_2\right],$$

$$\Gamma_3=\frac{1}{2}\left[\frac{a(t)r\sin\theta}{1+\frac{1}{4}r^2}\tilde{\gamma}_0\tilde{\gamma}_3-\frac{1-\frac{1}{4}r^2}{1+\frac{1}{4}r^2}\sin\theta\tilde{\gamma}_1\tilde{\gamma}_3-\cos\theta\tilde{\gamma}_2\tilde{\gamma}_3\right]. \tag{8.4.9}$$

从而有

$$\mathscr{L}_m=\frac{1}{2}(\partial_t\tilde{\phi})^2+\frac{m^2}{2}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{4}\tilde{\phi}^4+$$

$$\frac{i}{2}\left[\psi^{+}\partial_{t}\psi-\partial_{t}\psi^{+}\psi+\frac{2}{ar}\left(1-\frac{r^{2}}{4}\right)\psi^{+}\tilde{r}_{0}\tilde{r}_{1}\psi+\right.$$

$$\left.\frac{1}{ar}\left(1+\frac{r^{2}}{4}\right)\cot\theta\psi^{+}\tilde{r}_{0}\tilde{r}_{2}\psi\right]-g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi. \tag{8.4.10}$$

引入共形时间 η，使 $\mathrm{d}t=ia\mathrm{d}\eta$，由上式可以得到欧氏作用量 $\bar{I}$：

$$\bar{I}=\int\mathrm{d}\eta[-6\varepsilon\phi a\phi' a'-3\varepsilon a'^{2}\phi^{2}-3\varepsilon\phi^{2}a^{2}+\varepsilon\Lambda\phi^{2}a^{4}+$$

$$\frac{1}{2}a^{2}\phi'^{2}-a^{4}V(\phi)+(\psi^{+}\psi'-\psi^{+\prime}\psi)a^{3}+$$

$$ik_{0}\psi^{+}\tilde{r}_{0}\tilde{r}_{1}\psi a^{3}+a^{2}\tilde{\phi}'^{2}+m^{2}a^{4}\tilde{\phi}^{2}-\frac{\lambda}{2}a^{4}\tilde{\phi}^{4}-$$

$$2g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi a^{4}]. \tag{8.4.11}$$

这里已引入宇宙常数 Λ，并舍去了常数及表面项，“，”表示对 η 求导，k_0 为常数.

令 $\alpha=a\phi$，$\chi=\ln\phi$，则有

$$\bar{I}=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}\eta\left[-\alpha'^{2}+c_{0}^{2}\alpha^{2}\chi'^{2}-\alpha^{2}+\frac{\Lambda}{3}\alpha^{4}e^{-2\chi}-\right.$$

$$\frac{1}{3\varepsilon}\alpha^{4}e^{-4\chi}V(\chi)+\frac{1}{3\varepsilon}(\psi^{+}\psi'-\psi^{+\prime}\psi)\alpha^{3}e^{-3\chi}+$$

$$\frac{ik_{0}}{3\varepsilon}\psi^{+}\tilde{r}_{0}\tilde{r}_{1}\psi\alpha^{3}e^{-3\chi}+\frac{1}{3\varepsilon}\alpha^{2}e^{-2\chi}\tilde{\phi}'^{2}+$$

$$\frac{1}{3\varepsilon}m^{2}\alpha^{4}e^{-4\chi}\tilde{\phi}^{2}-\frac{\lambda}{6\varepsilon}\alpha^{4}e^{-4\chi}\tilde{\phi}^{4}-$$

$$\left.\frac{2}{3\varepsilon}\alpha^{4}e^{-4\chi}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right]. \tag{8.4.12}$$

这里 $c_0=\dfrac{1+6\varepsilon}{6\varepsilon}$

W-D 方程具有形式

$$\left[\frac{\partial}{\partial\alpha^{2}}-\frac{1}{c_{0}^{2}\alpha^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial\chi^{2}}-\alpha^{2}+\frac{\Lambda}{3}\alpha^{4}e^{-4\chi}-\frac{1}{3\varepsilon}\alpha^{4}e^{-4\chi}V(x)-\right.$$

$$\frac{3\varepsilon}{\alpha^{2}e^{-2\chi}}\frac{\partial^{2}}{\partial\tilde{\phi}^{2}}+\frac{1}{3\varepsilon}m^{2}\alpha^{4}e^{-4\chi}\tilde{\phi}^{2}-\frac{\lambda}{6\varepsilon}\alpha^{4}e^{-4\chi}\tilde{\phi}^{4}-$$

$$\frac{2}{3\epsilon}\alpha^4 e^{-4\chi} g\bar{\psi}\,\tilde{\phi}\psi+\frac{ik_0}{3\epsilon}\psi^- \tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\alpha^3 e^{-3\chi}\Bigg]\Psi(\alpha,\ \chi,\ \psi,\ \tilde{\phi})=0.$$

(8.4.13)

严格求解方程(8.4.13)非常困难，但可用 WKB 方法来近似求解，为此需设 χ，$\tilde{\phi}$初始时变化足够缓慢，即 $\chi\gg1$，$\tilde{\phi}\gg1$，

令 $A=\alpha^2-\frac{e^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\epsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\epsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\epsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\epsilon}g\bar{\psi}\,\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^4$，

$B=-\frac{k_0}{3\epsilon}\psi^- \tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi\alpha^3 e^{-3\chi}$，

$A+Bi=R_{(\alpha)}e^{i\Theta(\alpha)}$.

其中 $$R^2(\alpha)=\left[1-\frac{e^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\epsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\epsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\epsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\epsilon}g\bar{\psi}\,\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\right]^2\alpha^4+\frac{k_0^2}{9\epsilon}(\psi^+\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi e^{-3\chi})^2\alpha^6.$$

$$\tan\Theta(\alpha)=\frac{-\frac{k_0}{3\epsilon}\psi^+\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi e^{-3\chi}\alpha}{1-\frac{e^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\epsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\epsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\epsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\epsilon}g\bar{\psi}\,\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2}.$$

(8.4.14)

从而 $$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\,\frac{e^{-\frac{i}{4}\Theta(\alpha)}}{\sqrt[4]{R(\alpha)}}\exp\left[\pm\int_0^\alpha\sqrt{R(\alpha)}e^{\frac{i}{2}\Theta(\alpha)}d\alpha\right].$$

(8.4.15)

为便于讨论，我们给出(8.4.15)式当 $\alpha\to0$(足够小)时和 $\alpha\to\infty$(足够大)时的渐近解. 当 $\alpha\to0$ 时：

(1) 若 $\frac{1}{3}e^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\epsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\epsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\epsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\epsilon}g\bar{\psi}\,\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\ll1$，则(17)式可简化为

$$R(\alpha)\sim\alpha^2,\ \Theta(\alpha)\sim\frac{k_0}{3\epsilon}\psi^+\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi e^{-3\chi}\cdot\alpha=c_1\cdot\alpha.\quad(8.4.16)$$

此处 $c_1=\frac{k_0}{3\epsilon}\psi^+\tilde{r}_0\tilde{r}_1\psi e^{-3\chi}$.

这时由(8.4.15)式可得

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\frac{e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}}{\sqrt{\alpha}}e^{\frac{ik}{3\varepsilon}\psi+r_0r_1\psi e^{-3\chi}\cdot\frac{\alpha}{4}}. \tag{8.4.17}$$

而当 $\alpha\to 0$ 时，通常的诱生引力理论解为 $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}e^{\pm\frac{\alpha^2}{2}}$. 因此考虑旋量场后，宇宙波函数将移动一个相因子 $e^{i\frac{c_1}{4}\alpha}$，由于这里 α 为一次幂，可以看出旋量场的贡献是很显著的，当旋量场不存在时，这个修正自然消失. 由于可观测量为 $|\Psi|^2$，因此附加的因子并不影响"测量"结果.

(2) 若 $\frac{1}{3}e^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\gg 1$，则(8.4.14)式可简化为

$$\tan\Theta(\alpha)\sim\frac{1}{\alpha},\ R(\alpha)\sim c_1\alpha^3. \tag{8.4.18}$$

从而 $\Theta(\alpha)\to\frac{\pi}{2}$.

这时 $$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim\frac{1}{\sqrt[4]{c_1\alpha^3}}e^{\pm\frac{2}{5}\sqrt{c_1}\alpha^{\frac{5}{2}}}. \tag{8.4.19}$$

显见此时宇宙波函数与不存在旋量场时相比，有较为显著的变化.

当 $\alpha\to\infty$(即 α 足够大)时：

(1) 若 $\frac{1}{3}e^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\gg 1$，则(17)式可简化为

$$\begin{aligned}R(\alpha)&\sim\frac{e^{-4\chi}}{3}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^4\\&\sim\beta\cdot\alpha^4.\end{aligned} \tag{8.4.20}$$

$$\Theta(\alpha)\sim-\frac{c_1}{\beta\alpha}.$$

这里 $\beta=\frac{1}{3}e^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)$.

这时波函数为

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}\,\alpha}e^{\pm\frac{\sqrt{\beta}\,\alpha^3}{3}}e^{\pm i\frac{c_1}{4\sqrt{\beta}}\alpha^2}. \tag{8.4.21}$$

由此可看出旋量场对波函数的贡献有两部分，一部分是场相互作用部分$\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi$，其对波函数的影响和通常标量场一样；另一部分是类似于(8.4.17)式中相移因子的贡献，此贡献是旋量场所特有的，但由于这时a为二次幂，旋量场的影响已减少.

若$\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi>\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4$，则

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}}\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{\beta}}{3}a^3}\mathrm{e}^{\pm i\frac{c_1}{4}\frac{a^2}{\sqrt{\beta}}}. \tag{8.4.22}$$

若$\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi<\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4$，则

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N'\frac{1}{\sqrt[4]{-\beta}}\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\pm\frac{\sqrt{-\beta}}{3}a^3}\mathrm{e}^{\pm i\frac{1}{4}\frac{a^2}{\sqrt{-\beta}}}. \tag{8.4.23}$$

由此我们可以看出，旋量部分在宇宙“创生”初期影响很显著，而随着宇宙的膨胀，旋量的影响越来越小，当宇宙进入Lorentz 区域$\left(\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi<\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4\right)$后，旋量场行为和通常标量场一样.

(2) 若$\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\chi}\left(\Lambda-\frac{1}{\varepsilon}V(\chi)+\frac{m^2}{\varepsilon}\tilde{\phi}^2-\frac{\lambda}{2\varepsilon}\tilde{\phi}^4-\frac{2}{\varepsilon}g\bar{\psi}\tilde{\phi}\psi\right)\alpha^2\ll 1$，则(8.4.14)式可简化为

$$R(\alpha)\sim c_1\alpha^3,\quad \tan\Theta(\alpha)\sim c_1\alpha. \tag{8.4.24}$$

此时波函数为

$$\Psi(\alpha,\chi,\psi,\tilde{\phi})\sim N\frac{1}{\sqrt[4]{c_1 a}}e^{\pm\frac{2}{5}\sqrt{c_1}a^{\frac{5}{2}}}. \tag{8.4.25}$$

最终ϕ将落入ϕ_0，$V(\phi)$取稳定最小值.此时由于ϕ为常数，所以诱导引力的宇宙波函数回到H-H 理论的对应情况.

参 考 文 献

[1] Bousso R. and Hawking. S W. Phys Rev, 1996, D (54): 6312

[2] Bousso R and Linde A D. Quant Creat of a Univ. gr-qc/9803068

[3] 布和,刘辽.半经典B-D理论的闭合宇宙解.物理学报,1998,47(5)

[4] Bucher M,Goldhaber A S and Turok N. Open Univ from Inf. Phys Rev, 1995, D (54): 3314
[5] Coleman S. and De Luccia F. Grav Integ and part Phys Rev, 1980, D (21): 3305
[6] Coleman S. Why There is Nothing. Nucl Phys, 1988, B (310) 643
[7] Dicke R H. Orig of Univ. Nature. 1962 (440): 192
[8] Dyson F J. ibid On Stat of Univ. Phys Rev, 1947 (75): 1736
[9] Efstathiou G M N Univ Van Fun. RAS, 1995, L (73): 274
[10] Garcia-Bellido J, Garriga J and Montes X. Ouasi-Open Inf. hep-ph, 1997 (11): 214
[11] Garriga J and Vilenkin A. In Def of Tunuel WF. Phys Rev, 1997, D (56): 2464
[12] Garriga J, Tanaka T and Vilenkin A. The Dens Param. astro-ph, 1998 (3): 268
[13] Garriga J. Dens Par and Anth. hep-th, 1998 (4): 106
[14] Ghoroku K. Tanaka M. Wormhole Sol. Phys Rev, 1990, D(43): 410
[15] Gibbons G W and Hawking S W. On The WS. Phys. Rev. 1977, D (15): 2752
[16] Gonzalez-Diaz. Wormhols and Thermd. Phys Rev, 1996, D (54): 1856
[17] Gott J R. On Orig of Univ. Nature 1982 (295): 304
[18] Gott J R. ibid Bound. Nature, 1993 (363): 315
[19] Halliwel J J and Hawking S W. Origin of Struct in Univ. Phys Rev, 1985, D(31): 1777
[20] Hartle J B and Hawking S W. Wave Funct of Univ. Phys Rev, 1983, D (28): 2960
[21] Hawking S W and Luttrell J C. High Deriv in Quant Cosm. Nucl Phys, 1984, B (247): 250
[22] Hawking S W. Nucl. Phys 1984, B (239): 257; Phys. Rev. 1988, D (38): 2655
[23] Hawking S W. and Luttrell J C. Phys. Lett, 1984, B (143): 83
[24] Hawking S W. and Wu-Zhongchao. Phys. Lett, 1985, B (15): 15
[25] Hawking S W. and Page D. N. Nucl. Phys., 1986, B (264): 185.
[26] Hawking S W. Mordern Phys. Lett. 1990 (5): 453

[27] Hawking S W. Phys. Rev, 1996, D (53): 3099
[28] Hawking S W. and Turok, NG. hep-th, 1998 (2): 30
[29] Hawking S W. and Turok N G. gr-qc, 1998 (2): 62
[30] Hosoya A Morikawa M. Phys. Rev., 1989, D (39): 1123
[31] Hu Xiaoming and Wu Zhongchao. Phys. Lett., 1984, B (149): 87
[32] Jensen L. and Steinhardt. P J. Nuc. Phys. B Nucl. Phys, 1984, B (237): 176
[33] Leslie J. Mind 101, 1992 (403): 521
[34] Linde A D. Lett. Nouvo Cimento. 1984 (39): 401
[35] Linde A D. and Mezhlumian A. Phys. Rev, 5538 1995, D (52): 5538
[36] Linde A D. Phys. Lett, 1995, B(351): 99; Linde A D. and Mezhlumian A. Phys. Rev, 1995, D (52): 6789
[37] 沈有根. 天体物理学报, 1989 (9): 25; 天文学进展, 1991 (9): 182
[38] Linde. A D. gr-qc, 1998 (2): 38
[39] Martel H, Shapiro P R. and Weinberg S. Ap. J, 1998 (492): 29
[40] Liu L. Rhys. Rev., 1993, D (48): R5463; Liu L Xu D Y. Chin. Phy. Lett., 1998 (15), 79
[41] 刘辽, 物理学报, 47 (1998 (3): 47; 莫厚俊. 物理学进展, 1988 (3): 8
[42] Liu L. Huang C G. Frontiers in Particle Theory. edited by Y. S. Duan (World Scientific Pub. Singapore), 1987, 319
[43] Maede K. Phys. Rev., 1986, D (35): 471
[44] Moss I G. and Wright W A. Phys. Rev., 1984, D (29): 1067
[45] Press W H. and Schechter P. Ap. J, 1974 (187): 425
[46] Rees. M. Ruffini R & Wheeler J A. Black Holes. Gravitational Waves and Cosmology. New York London Paris, 1974, 151
[47] 沈有根. 中国科学, 1990, A (4); 1991 (1); 1990 (3), 1989 (1); 天文学报, 1990 (6)
[48] Tegmark M. and Rees M J. Ap. J, 1998 (526): 499
[49] Turok N G. and Hawking S W. hep-th, 1998 (3): 156
[50] Unruh W. gr-qc. 1998 (3): 50
[51] Vilenkin. A. Phys. Lett, 1982, B (117): 25
[52] Vilenkin A. Phys. Rev, 1984, D (30): 509

[53] Vilenkin A. Phys. Lett, 1982, B (117): 25. Phys. Rev, 1983, D (27): 2848
[54] Vilenkin A. Nucl. Phys. 1985, B (252): 141; Phys. Rev, 1988 (0); 888
[55] Vilenkin A. in Cosmological Constant and the Evolution of the Universe. ed. By K. Sato et. al. Universal Academy Press. Tokyo, 1996
[56] Vilenkin A. Phys. Rev, 1994, D (50): 2581
[57] Vilenkin A. Phys. Rev. Lett, 1995 (74): 846
[58] Vilenkin A. and Winitzki S. Phys. Rev, 1997, D (55): 548
[59] Vilenkin A. hep-th, 1998 (3): 84
[60] Weinberg S. The First Three Minutes. Basic Books Ins Publishers New York. 1977
[61] Weinberg S. Phys. Rev. Lett, 1987 (59): 2607
[62] Weinberg S. in Critical Dialogues in Cosmology, ed. By N. Turok World Scientific Singapore, 1997
[63] Wheeler J A. Ann. Phys, 1957 (2): 604
[64] De Witt B S. Phys. Rev, 1968 (160): 1113
[65] Wheeler J A. in Relativity. Gordon and Breach. New York, 1964
[66] Wu Zhongchao Phys. Lett., 1984, B (146): 307
[67] 许殿彦，刘辽. 科学通报，1983 (28): 254; 中国科学，1983，A (9)
[68] 许建梅，刘辽. 物理学报，1993 (42): 2032
[69] Yamamoto K. Sasaki M. and Tanaka. T. Ap. J, 1995 (455): 412; Zee A. Phys. Lett, 1979 (42): 253; Phys. Rev. Lett, 1979 (42): 417
[70] 朱建阳. 物理学报，1995，44 (9)
[71] 王永久，唐智明. 引力理论和引力效应. 长沙：湖南科学技术出版社，1990: 6～8篇
[72] 王永久. 空间时间和引力. 长沙：湖南教育出版社，1992; 黑洞物理学. 长沙：湖南师范大学出版社，1999
[73] Wang Yongjiu. Tang Zhiming. Chin. Phys. Lett. 1999, No. 4
[74] 刘辽. 量子宇宙学. 北京：北京师范大学出版社，1999